数 学 年 刊
2009,30A(6):727–740

半量子群 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ ***

王 振* 陈惠香**

提要 设 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 表示一个固定单李代数的半量子群，给出了 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的性质和表示．证明了 Hopf 代数 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 不是拟余交换的，因此左 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模范畴不是辫子 monoidal 范畴．在权模范畴 $\mathcal{W}$ 中，给出了所有单对象和投射对象．最后描述了所有单的 Yetter-Drinfel'd $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-权模．

关键词 半量子群，拟余交换， Yetter-Drinfel'd 模
MR (2000) 主题分类 17B37, 16W35
中图法分类 O153.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2009)06-0727-14

1 引 言

对半单李代数 $\mathfrak{g}$, Drinfel'd 和 Jimbo 各自独立地介绍了一类非交换非余交换 Hopf 代数 $U_q(\mathfrak{g})$ (见 [1, 2]), 这类代数称为量子包络代数，可以看作包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的形变，对它已有大量的研究，详细介绍见文 [3–5]. 令 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 表示 $U_q(\mathfrak{g})$ 的上三角 Hopf 子代数，称为半量子群 (见 [6, 7]), $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 上的 Yetter-Drinfel'd 模的泛 R-矩阵提供了量子 Yang-Baxter 方程的解，它们同纽结理论和三维流形不变量也有着有趣的联系 (见 [8, 9]).

当 q 不是单位根时， $U_q(\mathfrak{g})$ 同 $U(\mathfrak{g})$ 的表示理论本质上一样，但当 q 是单位根时，$U_q(\mathfrak{g})$ 包含一个较大的中心子代数，所以情况完全不同 (见 [3]). 对于半量子群 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$, 有类似的现象，这时，我们可以得到 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的一个有限维 Hopf 商代数 $u^{\geqslant 0}$, Gunnlaugsdóttir 在文 [7] 中研究了 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ 时 $u^{\geqslant 0}$ 的 monoidal 性．对单边李代数 $\mathfrak{g}$, Cibils 通过箭图和关系描述了 $u^{\geqslant 0}$, 证明了仅有 $u^{\geqslant 0}(\mathfrak{sl}_2)$ 是有限表示型的，其它均为野表示型 (见 [6]).

本文目的是对任意单李代数 $\mathfrak{g}$, 研究 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的性质和表示．第 1 节，我们回顾了量子群 $\mathcal{U}=U_q(\mathfrak{g})$, 并给出 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的定义和一些性质．讨论了分次 Hopf 代数的拟余交换性，证明了 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 不是拟余交换的，因此左 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模范畴 ${}_{\mathcal{U}^{\geqslant 0}}\mathcal{M}$ 不是辫子 monoidal 范畴．注意到当 $H^{\rm cop}$ 是 Hopf 代数时， Yetter-Drinfel'd H-模范畴 ${}_H\mathcal{YD}^H$ 是辫子 monoidal 范畴 (见 [10]). 而 ${}_H\mathcal{M}$ 的中心 $\mathcal{Z}({}_H\mathcal{M})$ 是辫子 monoidal 范畴且张量等价于 ${}_H\mathcal{YD}^H$ (见 [5, 定理 XIII.5.1]). 我们还考虑商代数 $u^{\geqslant 0}(\mathfrak{g})$, 推广了文 [7] 中的结果．在第 2 节中，我们研究了单模， Verma 模和权模范畴 $\mathcal{W}$ 中的不可分解投射对象，讨论了 $\mathcal{W}$ 的 monoidal 结构，给出了两个 Verma 模张量积的分解式．我们确定了单的 Yetter-Drinfel'd 权模，利用 Radford 的结论 (见 [11]), 证明了在集合 $\mathcal{G}((\mathcal{U}^{\geqslant 0})^{\circ})\times\mathcal{G}(\mathcal{U}^{\geqslant 0})$ 与单的 Yetter-Drinfel'd 权模的同构类集 $\mathcal{E}$ 之间存在一个一一对应．关于量子群和 Hopf 代数的相关内容可参见文 [4, 5, 12].

2 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的结构

2.1 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的定义

本文恒设 k 是特征为零的代数闭域， $k^{\times}=k\setminus\{0\}$, $q\in k^{\times}$ 且 $q\neq\pm 1$. 除非特别指

本文 2009 年 5 月 2 日收到.
*盐城工学院基础部，江苏 盐城 224003. E-mail: wangzhen118@gmail.com
**扬州大学数学科学学院，江苏 扬州 225002. E-mail: hxchen@yzu.edu.cn
***国家自然科学基金 (No. 10771183) 和教育部博士点基金 (No. 200811170001) 资助的项目.

出，所有代数， Hopf 代数及模均定义在 k 上，符号 dim, $\otimes$ 与 Hom 分别表示 $\dim_k$, $\otimes_k$ 与 Hom_k. 对于 Hopf 代数的余乘法我们使用 Sweedler 符号 (见 [12]). 用 $\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数集. 设 $n\in\mathbb{Z}$, 令 $[n]_q=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}$, 定义 $[0]_q!=1$, $[n]_q!=[n]_q[n-1]_q\cdots[1]_q$, $n\geqslant 1$, 及 Gaussian q-二项式系数 $\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right]_q=\frac{[n]_q!}{[j]_q![n-j]_q!}$, $n\geqslant j\geqslant 0$.

给定一个秩为 n 的单李代数 $\mathfrak{g}$, 设对应的 Cartan 矩阵为 $C=(a_{ij})_{n\times n}$, 则一定存在 $\mathbb{Z}$ 上对角矩阵 $D=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$, 使得 DC 是对称的. 假定每个 $d_i>0$ 且使 $\sum\limits_i d_i$ 尽可能小, 令 $q_i=q^{d_i}$, 则伴随 $\mathfrak{g}$ 的量子包络代数 $\mathcal{U}=U_q(\mathfrak{g})$ 作为代数由 E_i,F_i,K_i,K_i^{-1} $(1\leqslant i\leqslant n)$ 生成，并且满足下列关系：对任意 $1\leqslant i,j\leqslant n$,

$$K_iK_j=K_jK_i,\quad K_iK_i^{-1}=K_i^{-1}K_i=1, \tag{2.1}$$

$$K_iE_jK_i^{-1}=q_j^{a_{ji}}E_j, \tag{2.2}$$

$$K_iF_jK_i^{-1}=q_j^{-a_{ji}}F_j, \tag{2.3}$$

$$E_iF_j-F_jE_i=\delta_{ij}\frac{K_i-K_i^{-1}}{q_i-q_i^{-1}}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}}(-1)^s\left[\begin{array}{c} 1-a_{ij} \\ s \end{array}\right]_{q_i}E_i^{1-a_{ij}-s}E_jE_i^s=0,\quad 当\ i\neq j, \tag{2.5}$$

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}}(-1)^s\left[\begin{array}{c} 1-a_{ij} \\ s \end{array}\right]_{q_i}F_i^{1-a_{ij}-s}F_jF_i^s=0,\quad 当\ i\neq j, \tag{2.6}$$

并且 $\mathcal{U}$ 是 Hopf 代数，其余乘法 Δ, 反极元 S 和余单位 ε 定义为

$$\Delta E_i=E_i\otimes 1+K_i\otimes E_i,\quad \Delta F_i=F_i\otimes K_i^{-1}+1\otimes F_i,\quad \Delta K_i=K_i\otimes K_i, \tag{2.7}$$

$$SE_i=-K_i^{-1}E_i,\quad SF_i=-F_iK_i,\quad SK_i=K_i^{-1}, \tag{2.8}$$

$$\varepsilon E_i=0,\quad \varepsilon F_i=0,\quad \varepsilon K_i=1, \tag{2.9}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$.

设 $\mathcal{U}^+,\mathcal{U}^-$ 和 $\mathcal{U}^0$ 分别表示由 $\{E_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$, $\{F_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 和 $\{K_i,K_i^{-1}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 生成的 $\mathcal{U}$ 的子代数. 由 (2.1)–(2.6) 知 $\mathcal{U}=\mathcal{U}^-\mathcal{U}^0\mathcal{U}^+$, 并且乘法给出了向量空间同构

$$\mathcal{U}^-\otimes\mathcal{U}^0\otimes\mathcal{U}^+\cong\mathcal{U}. \tag{2.10}$$

设 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}=\mathcal{U}^0\mathcal{U}^+$ 是 $\mathcal{U}$ 的由 $\{E_i,K_i,K_i^{-1}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 生成的子代数. 作为代数，$\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 也可直接定义为由 E_i,K_i,K_i^{-1} $(1\leqslant i\leqslant n)$ 生成的满足关系 (2.1), (2.2) 和 (2.5) 的代数. 设 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+$ 和 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0$ 分别表示 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的由 $\{E_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 和 $\{K_i,K_i^{-1}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 生成的子代数，则有 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+=\mathcal{U}^+$ 和 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0=\mathcal{U}^0$. 容易验证 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个 Hopf 子代数. 本文主要研究 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的性质和表示理论.

2.2 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的结构与性质

给定一个 Cartan 矩阵 (a_{ij}), 设 $P=\sum\limits_{i=1}^n\mathbb{Z}\varpi_i$ 是权格. 定义单根如下： $\alpha_j=\sum\limits_{i=1}^n a_{ij}\varpi_i$, $j=1,\cdots,n$. 设 $\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, $Q=\mathbb{Z}\Delta$ (根格) 及 $Q_+=\sum\limits_i\mathbb{Z}_+\alpha_i$. 如果 $\lambda-\mu\in Q_+$, 则定义 $\mu\leqslant\lambda$. 这在 P 上定义了一个偏序 “$\leqslant$”.

定义 P 的自同构 γ_i, 使得 $\gamma_i\varpi_j=\varpi_j-\delta_{ij}\alpha_i\,(i,j=1,\cdots,n)$, 则 $\gamma_i\alpha_j=\alpha_j-a_{ij}\alpha_i$. 设 W 是由 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 生成的 $\mathrm{GL}(P)$ 的 (有限) 子群，称为 Weyl 群，则 Q 是 W-不变的.

令 $R=W\Delta$, $R^+=R\cap Q_+$ 及 $R^-=-R^+$, 则 R 是伴随 Cartan 矩阵 (a_{ij}) 的一个根系，R^+ 是正根集， $R=R^+\cup R^-$.

固定 W 中最长元素 ω_0 的一个既约表达式 $\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_N}$, 我们可以定义正根集 R^+ 上的一个序： $\beta_1=\alpha_{i_1}$, $\beta_2=\gamma_{i_1}\alpha_{i_2},\cdots$, $\beta_N=\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_{N-1}}\alpha_{i_N}$.

设 $T_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathcal{U}$ 的自同构，使得

$$T_i(E_j)=\begin{cases}-F_iK_i, & 若\ i=j,\\ \sum\limits_{l=0}^{r}(-1)^{l+r}q_i^{-l}E_i^{(r-l)}E_jE_i^{(l)}, & 若\ i\neq j,\end{cases}$$

其中 $r=-a_{ij}$ 和 $E_i^{(l)}=\frac{E_i^l}{[l]_{q_i}!}$. 定义根向量 (见 [3, 4]) 如下：

$$E_{\beta_s}=T_{i_1}\cdots T_{i_{s-1}}E_{i_s},\quad 1\leqslant s\leqslant N.$$

从现在开始，我们假设 $\mathfrak{g}$ 是一个秩为 n 的单李代数， $C=(a_{ij})_{n\times n}$ 是它的 Cartan 矩阵， $D=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的对角矩阵，使得 DC 对称，其中每个 $d_i>0$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$ 尽可能小.

定理 2.1　符号如上，则有

(1) $\{E_{\beta_1},E_{\beta_2},\cdots,E_{\beta_N}\}\subset(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+$.

(2) $\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}\subset\{E_{\beta_1},E_{\beta_2},\cdots,E_{\beta_N}\}$. 确切地说，若 $\alpha_t=\beta_j$, 则 $E_{\beta_j}=E_t$.

(3) 对整数 $r\ (1\leqslant r\leqslant N)$, 设 $\omega=\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_r}\in W$, 使得 $l(\omega)=r$, 再设 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+(\omega)=k\langle E_{\beta_1},E_{\beta_2},\cdots,E_{\beta_r}\rangle$ 是由 $E_{\beta_1},E_{\beta_2},\cdots,E_{\beta_r}$ 生成的 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+$ 的子代数, 则所有单项式 $E_{\beta_1}^{m_1}E_{\beta_2}^{m_2}\cdots E_{\beta_r}^{m_r}$, $m_1,m_2,\cdots,m_r\in\mathbb{Z}_+$, 构成了 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+(\omega)$ 的一组基.

(4) $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+(\omega_0)=(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+$.

(5) 作为向量空间 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cong(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0\otimes(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+$.

证　由 $\mathcal{U}$ 的性质 (见 [13]) 和关系 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+=\mathcal{U}^+$, $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0=\mathcal{U}^0$ 得证.

我们也可以通过 smash 积定义 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$. 设 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0$ 在 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+$ 上的右作用为 $E_j\cdot K_i=q_j^{-a_{ji}}E_j$, $1\leqslant i,j\leqslant n$, 则 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+$ 是一个右 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0$-模代数，然后可以构造一个 smash 积 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0\#(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+$: 作为向量空间， $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0\#(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+=(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0\otimes(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+$, 乘法由下式给出 $(a\otimes x)(b\otimes y)=\sum ab_{(1)}\otimes(x\cdot b_{(2)})y$, $a,b\in(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0$, $x,y\in(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+$.

定理 2.2　作为代数， $\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cong(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0\#\,(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^+$.

证　直接验证.

对 $\mathbf{k}=(k_1,\cdots,k_N)\in\mathbb{Z}_+^N$ 和 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i\alpha_i\in Q$, 令 $E^{\mathbf{k}}=E_{\beta_1}^{k_1}\cdots E_{\beta_N}^{k_N}$ 和 $K_\lambda=K_1^{t_1}\cdots K_n^{t_n}$, 则由定理 2.1, $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 有 PBW 基 $\{E^{\mathbf{k}}K_\lambda\mid \mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N,\ \lambda\in Q\}$.

对 $1\leqslant i\leqslant n$, 令 $\deg(K_i)=0$, $\deg(E_i)=\alpha_i$. 既然 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的定义关系式是齐次的， $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 是一个 $Q_+(=\mathbb{Z}_+\Delta)$-分次代数，显然， $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 关于这个分次是一个分次 Hopf 代数.

引理 2.1　设 $A=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}_+I}A_i$ 是个 $\mathbb{Z}_+I$-分次代数，其中 I 为某个集合. 如果 $x=\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}_+I}x_i\in A$ 是可逆元，则 $x_0\in A_0$ 也可逆. 从而 x_0 是非零的.

证　直接验证可得.

一个 Hopf 代数 H 称为拟余交换的, 如果存在一个可逆元 $R\in H\otimes H$, 使得 $\Delta^{\mathrm{op}}(h)=R\Delta(h)R^{-1}$, $h\in H$. 这时，我们也称 (H,R) 是拟余交换的.

引理 2.2 设 H 是 $\mathbb{Z}_+I$-分次 Hopf 代数，则 $H\otimes H$ 也是 $\mathbb{Z}_+I$-分次 Hopf 代数，其分次为 $(H\otimes H)_i=\bigoplus\limits_{j+l=i}H_j\otimes H_l$, $i\in\mathbb{Z}_+I$. 如果 $R=\sum\limits_i R_i\in H\otimes H$, 使得 (H,R) 是拟余交换的，其中 $R_i\in(H\otimes H)_i$, $i\in\mathbb{Z}_+I$, 则 $(H,\,R_0)$ 和 $(H_0,\,R_0)$ 都是拟余交换的.

证 注意到 $(H\otimes H)_0=H_0\otimes H_0$, 由引理 2.1 知 R_0 可逆. 设 $h\in H_i$, $i\in\mathbb{Z}_+I$, 因为 (H,R) 是拟余交换的，所以有 $\Delta^{\rm op}(h)=R\Delta(h)R^{-1}$, 因此 $\Delta^{\rm op}(h)R=R\Delta(h)$. 通过比较这个等式两边 i 次齐次部分，有 $R_0\Delta(h)=\Delta^{\rm op}(h)R_0$, 因此 (H,R_0) 是拟余交换的. 由于 H_0 是 H 的 Hopf 子代数且 R_0 是 H_0 中可逆元，所以 (H_0,R_0) 也是拟余交换的.

由上面引理，可以得到下面的定理.

定理 2.3 Hopf 代数 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 不是拟余交换的.

证 如果存在可逆元 $R\in\mathcal{U}^{\geqslant 0}\otimes\mathcal{U}^{\geqslant 0}$, 使得 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0},\,R)$ 是拟余交换的，则由引理 2.2 可以假设 $R\in(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_0\otimes(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_0=(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0\otimes(\mathcal{U}^{\geqslant 0})^0$. 设 $R=\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}K^j\otimes K^l$, 其中 $K^r=K_1^{r_1}K_2^{r_2}\cdots K_n^{r_n}$, $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)\in\mathbb{Z}^n$, 再设 $e_i=(\delta_{1i},\cdots,\delta_{ni})$, $i=1,\cdots,n$. 在等式 $R\Delta(h)=\Delta^{\rm op}(h)R$ 中分别令 $h=E_1,\cdots,E_n$, 则有

$$\begin{cases}\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}q_1^{\sum\limits_{i=1}^n a_{1i}j_i}E_1K^j\otimes K^l+\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}q_1^{\sum\limits_{i=1}^n a_{1i}l_i}K^{j+e_1}\otimes E_1K^l\\ =\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}K^j\otimes E_1K^l+\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}E_1K^j\otimes K^{l+e_1},\\ \sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}q_2^{\sum\limits_{i=1}^n a_{2i}j_i}E_2K^j\otimes K^l+\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}q_2^{\sum\limits_{i=1}^n a_{2i}l_i}K^{j+e_2}\otimes E_2K^l\\ =\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}K^j\otimes E_2K^l+\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}E_2K^j\otimes K^{l+e_2},\\ \qquad\qquad\vdots\\ \sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}q_{n-1}^{\sum\limits_{i=1}^n a_{n-1,i}j_i}E_{n-1}K^j\otimes K^l+\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}q_{n-1}^{\sum\limits_{i=1}^n a_{n-1,i}l_i}K^{j+e_{n-1}}\otimes E_{n-1}K^l\\ =\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}K^j\otimes E_{n-1}K^l+\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}E_{n-1}K^j\otimes K^{l+e_{n-1}},\\ \sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}q_n^{\sum\limits_{i=1}^n a_{ni}j_i}E_nK^j\otimes K^l+\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}q_n^{\sum\limits_{i=1}^n a_{ni}l_i}K^{j+e_n}\otimes E_nK^l\\ =\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}K^j\otimes E_nK^l+\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}E_nK^j\otimes K^{l+e_n}.\end{cases}\tag{2.11}$$

比较这些等式两边的系数，得

$$\begin{cases}a_{j,l}=q_1^{\sum\limits_{i=1}^n a_{1i}l_i}a_{j-e_1,l}, & a_{j,l}=q_1^{\sum\limits_{i=1}^n a_{1i}j_i}a_{j,l+e_1},\\ a_{j,l}=q_2^{\sum\limits_{i=1}^n a_{2i}l_i}a_{j-e_2,l}, & a_{j,l}=q_2^{\sum\limits_{i=1}^n a_{2i}j_i}a_{j,l+e_2},\\ \qquad\vdots & \qquad\vdots\\ a_{j,l}=q_{n-1}^{\sum\limits_{i=1}^n a_{n-1,i}l_i}a_{j-e_{n-1},l}, & a_{j,l}=q_{n-1}^{\sum\limits_{i=1}^n a_{n-1,i}j_i}a_{j,l+e_{n-1}},\\ a_{j,l}=q_n^{\sum\limits_{i=1}^n a_{ni}l_i}a_{j-e_n,l}, & a_{j,l}=q_n^{\sum\limits_{i=1}^n a_{ni}j_i}a_{j,l+e_n}.\end{cases}\tag{2.12}$$

因此对任意 $j,l,j',l'\in\mathbb{Z}^n$, 有 $a_{j,l}=ba_{j',l'}$, $b\in k^\times$. 因为 $R=\sum\limits_{j,l\in\mathbb{Z}^n}a_{j,l}K^j\otimes K^l$ 是有限和 (即几乎所有 $a_{j,l}$ 等于 0), 所以 $a_{j,l}$ 全等于零，因此 $R=0$, 与 R 可逆矛盾．证毕．

当 q 是本原 r-次单位根时，令

$$d=\begin{cases} r, & \text{如果 } r \text{ 是奇数},\\ \dfrac{r}{2}, & \text{如果 } r \text{ 是偶数}.\end{cases}$$

设 $u^{\geqslant 0}$ 是 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 模由 $\{K_i^d-1,E_i^d\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 生成的理想所得的商代数．如果 $d>d_0=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$, 则 $u^{\geqslant 0}$ 是分次 Hopf 代数，其中 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 是 D 的对角线上的元素．如果 $d\leqslant d_0$, 则 $u^{\geqslant 0}$ 不是一个 Hopf 代数，即由 $\{K_i^d-1,E_i^d\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 生成的理想不是 Hopf 理想．在本节余下部分，我们总假设 $d>d_0$.

对 $j=(j_1,j_2,\cdots,j_n)$, $l=(l_1,l_2,\cdots,l_n)\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n$ 和 $X=(x_{si})_{n\times n}\in M_n(\mathbb{Z})$, 令 $A(j,l)=jXl^{\mathrm{T}}=\sum\limits_{s,i=1}^{n}x_{si}j_sl_i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, 其中 l^{T} 是 l 的转置．显然，如果 X 是对称矩阵，$A(j,l)=A(l,j)$.

定理 2.4　$u^{\geqslant 0}$ 是拟余交换的当且仅当 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ 且$r=4$.

证　如果 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ 和$r=4$, 则 $u^{\geqslant 0}(\mathfrak{sl}_2)$ 恰好是 Sweedler's 4-维 Hopf 代数．众所周知，$(u^{\geqslant 0}(\mathfrak{sl}_2),R)$ 是三角 Hopf 代数，其中 $R=\frac{1}{2}(1\otimes 1+1\otimes K+K\otimes 1-K\otimes K)$. 因此 $(u^{\geqslant 0}(\mathfrak{sl}_2),R)$ 是拟余交换的．

现在假设 $\mathfrak{g}\neq\mathfrak{sl}_2$ 或 $r\neq 4$, 并假设存在可逆元 $R=\sum\limits_{j,l\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n}a_{j,l}K^j\otimes K^l\in(u^{\geqslant 0})_0\otimes(u^{\geqslant 0})_0$ 使得 $(u^{\geqslant 0},R)$ 是拟余交换的．类似于定理 2.3 证明，我们有等式组 (2.12), 其中 $j,l\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n$. 由等式组 (2.12) 知 $a_{j,0}=a_{0,l}=a_{0,0}$ 和 $a_{j,0}=q^{A(j,l)}a_{j,l}=q^{2A(j,l)}a_{0,l}$, $j,l\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n$, 其中 $A(j,l)=jDCl^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, DC 是对应 Cartan 矩阵 C 的对称化．现在对 $\mathfrak{g}$ 的不同类型通过考虑 $A(j,l)$ 的值就可以导出矛盾．例如，若 $\mathfrak{g}$ 是 G_2 型的，则 $n=2$ 且 $DC=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&2\end{pmatrix}$. 这种情况下，令 $j=(0,1),l=(1,1)$, 则 $A(j,l)=-1$. 因为 $q^{-2}\neq 1$, $a_{0,l}=a_{j,0}=a_{0,0}=0$, 所以对任意 $j,l\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2$ 有 $a_{j,l}=0$, 因此 $R=0$, 矛盾．证毕．

对于情况 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ 且 $r=4$, 由定理 2.4 的证明知，若一个可逆元 $R\in(u^{\geqslant 0})_0\otimes(u^{\geqslant 0})_0$, 使得 $(u^{\geqslant 0}(\mathfrak{g}),R)$ 是拟余交换的，则 R 一定形如

$$R=\sum_{j,l\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}q^{A(j,l)}aK^j\otimes K^l=\sum_{j,l\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}q^{2jl}aK^j\otimes K^l,\quad a\in k^\times.$$

注 2.1　(1) 对于 $u^{\geqslant 0}(\mathfrak{sl}_2)$, Gunnlaugsdóttir 在 [7] 中证明了 $u^{\geqslant 0}(\mathfrak{sl}_2)$ 是拟余交换的当且仅当 $r=4$.

(2) 由文 [5] 知, 量子包络代数 $U_h(\mathfrak{g})$ 是拟余交换的, 而且当 q 是阶为 r 的单位根时, $U_q(\mathfrak{g})$ 模由 $\{K_i^d-1,E_i^d,F_i^d\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 生成的理想 (这是 $U_q(\mathfrak{g})$ 的一个 Hopf 理想) 所得的商 Hopf 代数也是拟余交换的．

3　$\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的表示

本节讨论 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的表示．我们使用上一节中的符号并假设 q 不是单位根．

设 H 是 Hopf 代数，反极元 S, $H^*=\mathrm{Hom}_k(H,k)$ 是 H 的对偶代数．设 H° 表示 H 的有限对偶，即 $H^\circ=\{f\in H^*\mid f(I)=0,I$ 是 H 的某个理想，并且 $\dim(H/I)<\infty\}$, 则

H° 有一个诱导的 Hopf 代数结构. 设 M 和 N 是两个左 H-模, 则 $M^* = \mathrm{Hom}_k(M,k)$ 和 $M\otimes_k N$ 也是左 H-模, 模作用为 $(h\cdot f)(m) = f(S(h)\cdot m)$ 和 $h\cdot(m\otimes n) = h_{(1)}\cdot m\otimes h_{(2)}\cdot n$, 其中 $h\in H$, $f\in M^*$, $m\in M$, $n\in N$ (见 [12]).

3.1 单模

设 ${}_H\mathcal{M}$ 表示 Hopf 代数 H 的左模范畴. 以下, 除非特别指出, 一个 H-模是指一个左 H-模, 一个 H-余模是指一个右 H-余模.

设 M 是 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模, 对任意 $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\in(k^\times)^n$, 令 $M_{(\sigma)} = \{v\in M \mid K_i\cdot v = \sigma_i v, 1\leqslant i\leqslant n\}$. 一个向量 $v\in M$ 称为权向量如果存在 $\sigma\in(k^\times)^n$, 使得 $v\in M_{(\sigma)}$. 易证对 $1\leqslant j\leqslant n$, 有 $E_j\cdot M_{(\sigma)}\subset M_{(\epsilon_j\sigma)}$, 其中 $\epsilon_j = (q_j^{a_{j1}}, q_j^{a_{j2}},\cdots,q_j^{a_{jn}})\in(k^\times)^n$, $\epsilon_j\sigma = (q_j^{a_{j1}}\sigma_1, q_j^{a_{j2}}\sigma_2,\cdots,q_j^{a_{jn}}\sigma_n)$, 因此 $\sum\limits_{\sigma\in(k^\times)^n} M_{(\sigma)}$ 是 M 的一个子模, 其和是向量空间的直和. $\Pi(M) := \{\sigma\in(k^\times)^n \mid M_{(\sigma)}\neq 0\}$ 称为 M 的权空间. 如果 $M = \bigoplus\limits_{\sigma\in(k^\times)^n} M_{(\sigma)}$, 则 M 称为权模. 令 $\mathcal{W}$ 表示由所有权模构成的 ${}_{\mathcal{U}^{\geqslant 0}}\mathcal{M}$ 的全子范畴, 显然, $\mathcal{W}$ 对于直和封闭.

设 $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\in(k^\times)^n$, 则 σ 确定了一个代数同态 $\sigma:\mathcal{U}^{\geqslant 0}\to k$, $\sigma(K_i) = \sigma_i$, $\sigma(E_i) = 0$, $1\leqslant i\leqslant n$. 用 V_σ 表示相应的 1-维 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模, 即 $K_i\cdot v = \sigma_i v$, $E_i\cdot v = 0$, $v\in V_\sigma$, $i = 1,\cdots,n$. 显然, V_σ 是一个单的 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模, 并且对 $(k^\times)^n$ 中任意元素 σ 和 τ, $V_\sigma\cong V_\tau$ 当且仅当 $\sigma = \tau$.

现在设 M 是有限维 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模, 由于 k 是代数闭的, 所以存在 $\sigma\in(k^\times)^n$, 使得 $M_{(\sigma)}\neq 0$, 因此 $\bigoplus\limits_{\sigma\in(k^\times)^n} M_{(\sigma)} = \bigoplus\limits_{\sigma\in\Pi(M)} M_{(\sigma)}$ 是 M 的一个非零子模. 这样, 如果 M 是一个单 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模, 则 $M = \bigoplus\limits_{\sigma\in\Pi(M)} M_{(\sigma)}$, 即 M 是一个权模, 从而每个半单 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模是权模.

现在假设 M 是一个有限维单 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模, 则 $\Pi(M)$ 是一个有限非空集. 既然 q 不是单位根, 存在 $\sigma\in\Pi(M)$, 使得对任意 $1\leqslant j\leqslant n$, 有 $\epsilon_j\sigma\notin\Pi(M)$, 因此有 $E_j\cdot M_{(\sigma)} = 0$, $1\leqslant j\leqslant n$, $M_{(\sigma)}$ 的任一子空间均是 M 的子模, 从而 $M = M_{(\sigma)}\cong V_\sigma$. 这样我们有下面的定理.

定理 3.1 任一有限维单 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模均是权模且是 1-维的. 进一步地, 在 $(k^\times)^n$ 与有限维单 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模的同构类的集合之间有一个 1-1 对应.

注 3.1 对 Hopf 代数 H, 令 $\mathcal{G}(H)$ 表示 H 中所有群样元的集合. 众所周知, 一个元素 $f\in H^*$ 是 H° 中群样元当且仅当 f 是 H 到 k 的代数同态 (见 [12, 定理 9.1.4]). 这说明, $\mathcal{G}(H^\circ) = \mathrm{Alg}(H,k)$, 其中 $\mathrm{Alg}(H,k)$ 表示 H 到 k 的代数同态集. 由前面的讨论知, $(k^\times)^n$ 中任一元素 σ 都决定一个代数同态 $\sigma:\mathcal{U}^{\geqslant 0}\to k$, $\sigma(K_i) = \sigma_i$, $\sigma(E_i) = 0$, $1\leqslant i\leqslant n$. 另一方面, 如果 $\sigma:\mathcal{U}^{\geqslant 0}\to k$ 是一个代数同态, 由于 q 不是一个单位根, 易证 $\sigma(K_i)\in k^\times$ 且 $\sigma(E_i) = 0$. 因此我们可以认为 $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\in(k^\times)^n$, 其中 $\sigma_i = \sigma(K_i)$, $i = 1,2,\cdots,n$. 这样, 有 $(k^\times)^n = \mathrm{Alg}(\mathcal{U}^{\geqslant 0},k) = \mathcal{G}((\mathcal{U}^{\geqslant 0})^\circ)$.

3.2 Verma 模

对任意 $\sigma\in(k^\times)^n$, 既然 $\mathcal{U}^0$ 是 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的子代数, V_σ 也是 1-维 $\mathcal{U}^0$-模, 因此可定义 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模 $M(\sigma) := \mathcal{U}^{\geqslant 0}\otimes_{\mathcal{U}^0} V_\sigma$, 称为 Verma 模. 由于有 $\mathcal{U}^+$-$\mathcal{U}^0$-双模同构 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cong\mathcal{U}^+\otimes\mathcal{U}^0$, 所以作为 $\mathcal{U}^+$-模, 有 $M(\sigma) = \mathcal{U}^{\geqslant 0}\otimes_{\mathcal{U}^0} V_\sigma\cong(\mathcal{U}^+\otimes\mathcal{U}^0)\otimes_{\mathcal{U}^0} V_\sigma\cong\mathcal{U}^+\otimes V_\sigma\cong\mathcal{U}^+$, 即 $M(\sigma)$ 是秩为 1 的自由 $\mathcal{U}^+$-模. 选取一个非零元 $x_\sigma\in V_\sigma$, 令 $v_\sigma = 1\otimes_{\mathcal{U}^0} x_\sigma\in M(\sigma)$, 则 $M(\sigma) = \mathcal{U}^+\cdot v_\sigma$.

不难验证作为 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模, 对任意 $\sigma\in(k^\times)^n$ 有 $M(\sigma)\simeq M(\mathbf{1})\otimes V_\sigma\simeq V_\sigma\otimes M(\mathbf{1})$, 其中 $\mathbf{1} = (1,1,\cdots,1)\in(k^\times)^n$.

引理 3.1　设 $\sigma,\tau\in(k^\times)^n$, 则有

(1) $M(\sigma)$ 是一个权模;

(2) $M(\sigma)$ 的由 $E_1\cdot v_\sigma,\cdots,E_n\cdot v_\sigma$ 生成的子模 $J(\sigma)$ 是 $M(\sigma)$ 的唯一极大子模;

(3) $L(\sigma):=M(\sigma)/J(\sigma)$ 是 1-维单模且 $L(\sigma)\cong V_\sigma$;

(4) $M(\sigma)$ 是不可分解的;

(5) $M(\sigma)\cong M(\tau)$ 当且仅当 $\sigma=\tau$.

证　注意到 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 是 Q_+-分次 Hopf 代数, 其分次如下: $\deg(K_i)=0,\deg(E_i)=\alpha_i,i=1,2,\cdots,n$, 显然, $\mathcal{U}^+$ 是 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的分次子代数. 对任意 $1\leqslant i\leqslant n$, 由于 $K_iE_jK_i^{-1}=q^{d_ja_{ji}}E_j$, $j=1,2,\cdots,n$, 所以映射 $\mathcal{U}^+\to\mathcal{U}^+$, $u\mapsto K_iuK_i^{-1}$ 是分次代数自同构. 现在令 $u\in\mathcal{U}^+$ 是齐次元, 次数为 $\deg(u)=\sum\limits_{j=1}^n l_j\alpha_j\in Q_+=\mathbb{Z}_+\Delta$, 则 $K_iuK_i^{-1}=q^{\sum\limits_{j=1}^n l_jd_ja_{ji}}u=q^{\sum\limits_{j=1}^n l_jd_ia_{ij}}u$. 因此, 在 $M(\sigma)$ 中, 有 $K_i\cdot(u\cdot v_\sigma)=(K_iuK_i^{-1})\cdot(K_i\cdot v_\sigma)=\sigma_iq^{\sum\limits_{j=1}^n l_jd_ia_{ij}}(u\cdot v_\sigma)$, $1\leqslant i\leqslant n$, 所以 $u\cdot v_\sigma$ 是权向量, 权 $\tau\in(k^\times)^n$ 为 $\tau_i=\sigma_iq^{\sum\limits_{j=1}^n l_jd_ia_{ij}}$, $i=1,2,\cdots,n$. 这就证明了 (1).

设 $u,u'\in\mathcal{U}^+$. 既然 C 是非奇异矩阵 (见 [14]) 且 q 不是单位根, 由前面讨论知, $u\cdot v_\sigma\in M(\sigma)$ 是权向量当且仅当 u 是一个齐次元. 另外, 若 u 和 u' 均是齐次的, 则 $u\cdot v_\sigma$ 和 $u'\cdot v_\sigma$ 有相同的权当且仅当 $\deg(u)=\deg(u')$. 进一步地, $u\cdot v_\sigma\in M(\sigma)_{(\sigma)}$ 当且仅当 $\deg(u)=0$, $K_iuK_i^{-1}=u$, $1\leqslant i\leqslant n$.

由文 [4, p. 161] 知 E_{β_s} 是齐次元且次数为 $\deg(E_{\beta_s})=\beta_s\neq 0$, $s=1,2,\cdots,N$. 这样, 若 $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_N)\in\mathbb{Z}_+^N$, 则 $E^{\mathbf{k}}$ 是齐次的且 $\deg(E^{\mathbf{k}})=\sum\limits_{s=1}^N k_s\beta_s$, 特别地, 若 $\mathbf{k}\neq 0$ 则 $\deg(E^{\mathbf{k}})\neq 0$. 既然 $\{E^{\mathbf{k}}\mid\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N\}$ 是 $\mathcal{U}^+$ 的一组 k-基, $\mathcal{U}^+$ 的 0 次齐次分支是 $k1$, 其中 1 是 $\mathcal{U}^+$ 中单位元, 从而 $M(\sigma)_{(\sigma)}=kv_\sigma$, $v_\sigma\notin J(\sigma)$ 且 $\sum\limits_{\tau\neq\sigma}M(\sigma)_{(\tau)}=\mathrm{span}\{E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\mid 0\neq\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N\}$. 显然, 如果在 $\mathbb{Z}_+^N$ 中 $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_N)\neq 0$, 则 $E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\in J(\sigma)$, 因此, $J(\sigma)=\sum\limits_{\tau\neq\sigma}M(\sigma)_{(\tau)}=\mathrm{span}\{E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\mid 0\neq\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N\}$ 且 $M(\sigma)/J(\sigma)\cong V_\sigma$. 这就证得了 (3).

易证权模的子模是权模. 令 M' 是 $M(\sigma)$ 的真子模, 则由 (1) 知 M' 是权模. 因为 $v_\sigma\notin M'$ 且 $M(\sigma)_{(\sigma)}=kv_\sigma$, 所以 $M'_{(\sigma)}=0$, 即 $\sigma\notin\Pi(M')$, 这样, 由前面讨论知, $M'=\sum\limits_{\tau\in\Pi(M')}M'_{(\tau)}\subseteq J(\sigma)$. 这就证得了 (2) 和 (4).

若 $\sigma=\tau$, 则显然 $M(\sigma)\cong M(\tau)$; 若 $\sigma\neq\tau$, 则 $V_\sigma\ncong V_\tau$, 从而 $M(\sigma)\ncong M(\tau)$. (5) 得证.

命题 3.1　设 M 是 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模, $\sigma\in(k^\times)^n$, 则存在 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模满射 $f:M(\sigma)\to M$ 当且仅当存在权为 σ 的权向量 $v\in M$, 使得 $M=\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot v=\mathcal{U}^+\cdot v$.

证　显然.

在 $(k^\times)^n$ 上定义偏序 "$\geqslant$" 如下: 若有 $s_1,s_2,\cdots,s_n\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $\sigma\tau^{-1}=\epsilon_1^{s_1}\epsilon_2^{s_2}\cdots\epsilon_n^{s_n}$, 则令 $\sigma\geqslant\tau$, 其中 $\sigma,\tau\in(k^\times)^n$ 且 $\sigma\tau^{-1}:=(\sigma_1\tau_1^{-1},\sigma_2\tau_2^{-1},\cdots,\sigma_n\tau_n^{-1})$. 给定一个 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模 M, 一个权为 $\sigma\in(k^\times)^n$ 的权向量 $v\in M_{(\sigma)}$ 称为最低权向量, 如果不存在另一个权为 $\tau\in\Pi(M)$ 的权向量 w, 使得 $v\in\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot w$ 而 $w\notin\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot v$. 一个权模 M 称为最低权模, 如果存在某个最低权向量 v, 使得 $M=\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot v$.

显然, 每个 Verma 模 $M(\sigma)$ 均是最低权模.

命题 3.2 设 M 是 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 上的一个权模，则 M 是一个最低权模当且仅当 M 是某个 $M(\sigma)$ 的商模.

证 由命题 3.1 可知.

易证权模范畴 $\mathcal{W}$ 对张量积，子模和商模封闭.

命题 3.3 在 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模同构意义下，有

(1) $\{V_\sigma, \sigma \in (k^\times)^n\}$ 是 $\mathcal{W}$ 中单对象的一个完全集.

(2) $\{M(\sigma) \mid \sigma \in (k^\times)^n\}$ 是 $\mathcal{W}$ 中互不同构的不可分解投射对象集.

证 (1) 设 V 是 $\mathcal{W}$ 中的一个单对象，则 V 是权模，任选一个权向量 $v \in V$，设权为 σ，则 $V = \mathcal{U}^{\geqslant 0} \cdot v$，由命题 3.1 知， V 同构于 $M(\sigma)$ 的一个商模，再由引理 3.1 知， $V \cong V_\sigma$.

(2) 由引理 3.1 知，每个 $M(\sigma)$ 是不可分解的．任取 $\mathcal{W}$ 中的一个满态射 $f : M \to L$ 和一个态射 $g : M(\sigma) \to L$，则对任意 $\tau \in (k^\times)^n$，有 $f(M_{(\tau)}) = L_{(\tau)}$ 且 $g(M(\sigma)_{(\tau)}) \subseteq L_{(\tau)}$．因此存在权向量 $m \in M_{(\sigma)}$，使得 $f(m) = g(v_\sigma)$．定义 $\phi : M(\sigma) \to M$, $\phi(u \cdot v_\sigma) = u \cdot m$, $u \in \mathcal{U}^+$．既然 $M(\sigma)$ 是 $\mathcal{U}^+$-基为 $\{v_\sigma\}$ 的自由 $\mathcal{U}^+$-模， ϕ 的定义合理，显然 ϕ 是 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模同态且 $f\phi = g$．因此对任意 $\sigma \in (k^\times)^n$, $M(\sigma)$ 是 $\mathcal{W}$ 中的一个不可分解投射对象．由引理 3.1 知，若 $\sigma \neq \tau$，则 $M(\sigma) \ncong M(\tau)$.

现在我们讨论两个权模的张量积．下面的引理是显然的.

引理 3.2 设 M 和 N 是两个权模，则 $M \otimes N$ 也是权模且

$$(M \otimes N)_{(\sigma)} = \bigoplus_{\tau\nu=\sigma} M_{(\tau)} \otimes N_{(\nu)}.$$

注意到对任意 $\sigma, \tau \in (k^\times)^n$，有 $V_\sigma \otimes V_\tau \cong V_\tau \otimes V_\sigma \cong V_{\sigma\tau}$.

我们已经知道 $\mathcal{U}^+$ 是一个 Q_+-分次代数且对 $\eta \in Q_+$，齐次分支 $(\mathcal{U}^+)_\eta$ 等于

$$\mathrm{span}\Big\{E_{\beta_1}^{k_1} \cdots E_{\beta_N}^{k_N} \mid \sum_{i=1}^N k_i\beta_i = \eta\Big\}.$$

定义一个群同态 $F : Q \to (k^\times)^n$，使得 $F(\alpha_i) = \epsilon_i$，其中 $1 \leqslant i \leqslant n$, ϵ_i 如上．对 Verma 模 $M(\sigma)$，定义映射 $F_\sigma : Q_+ \to \Pi(M(\sigma))$ 为

$$F_\sigma\Big(\sum_{i=1}^n l_i\alpha_i\Big) = F\Big(\sum_{i=1}^n l_i\alpha_i\Big)\sigma = \epsilon_1^{l_1}\epsilon_2^{l_2}\cdots\epsilon_n^{l_n}\sigma.$$

不难验证 F_σ 是双射．设 $\eta \in Q_+$，若 $F_\sigma(\eta) = \tau$，则由引理 3.1 的证明知， $M(\sigma)_{(\tau)} = (\mathcal{U}^+)_\eta \cdot v_\sigma$，因此 $\dim M(\sigma)_{(\tau)} = \dim(\mathcal{U}^+)_\eta$.

对任意 $\sigma, \sigma' \in (k^\times)^n$, $M(\sigma) \otimes M(\sigma')$ 也是权模．下面讨论 $M(\sigma) \otimes M(\sigma')$ 的分解.

引理 3.3 设 $\sigma, \sigma' \in (k^\times)^n$，则 $E^{\mathbf{k}} \cdot v_\sigma \otimes v_{\sigma'}$ 是 $M(\sigma) \otimes M(\sigma')$ 的最低权向量，其中 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^N$.

证 设 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^N$ 且 $v = E^{\mathbf{k}} \cdot v_\sigma \otimes v_{\sigma'}$．由引理 3.1 的证明可知， v 是权向量．假设在 $M(\sigma) \otimes M(\sigma')$ 中有权为 τ 的权向量 $w = \sum\limits_{\mathbf{r},\mathbf{s}} a_{\mathbf{r},\mathbf{s}} E^{\mathbf{r}} \cdot v_\sigma \otimes E^{\mathbf{s}} \cdot v_{\sigma'}$，使得 $v \in \mathcal{U}^{\geqslant 0} \cdot w$, $w \notin \mathcal{U}^{\geqslant 0} \cdot v$．由于 w 是权向量，所以 $\mathcal{U}^{\geqslant 0} \cdot w = \mathcal{U}^+ \cdot w$，因此有齐次元 $h \in \mathcal{U}^+$，使得

$$E^{\mathbf{k}} \cdot v_\sigma \otimes v_{\sigma'} = h \cdot \Big(\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} a_{\mathbf{r},\mathbf{s}} E^{\mathbf{r}} \cdot v_\sigma \otimes E^{\mathbf{s}} \cdot v_{\sigma'}\Big) = \sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} a_{\mathbf{r},\mathbf{s}} h_{(1)} E^{\mathbf{r}} \cdot v_\sigma \otimes h_{(2)} E^{\mathbf{s}} \cdot v_{\sigma'}. \qquad (*)$$

设 $\deg(h)=\eta\in Q_+$, 则 $h\in(\mathcal{U}^+)_\eta$. 由文 [4, p. 59], 有

$$\Delta((\mathcal{U}^+)_\eta)\subseteq\bigoplus_{0\leqslant\mu\leqslant\eta}(\mathcal{U}^+)_{\eta-\mu}K_\mu\otimes(\mathcal{U}^+)_\mu.$$

由于 $w\notin\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot v$, 所以 $\eta\neq 0$, 因此 $\Delta(h)=K_\eta\otimes h+\sum\limits_{i=1}^m h_i\otimes g_i$, 其中 $h_i\in(\mathcal{U}^+)_{\eta-\mu_i}K_{\mu_i}$ 且 $g_i\in(\mathcal{U}^+)_{\mu_i}$, $0\leqslant\mu_i<\eta$, $i=1,2,\cdots,m$. 不妨假设 $h_i=a_iE^{\mathbf{k}_i}K_{\mu_i}$, $g_i=E^{\mathbf{l}_i}$, 这里 $a_i\in k^\times$, $\mathbf{k}_i,\mathbf{l}_i\in\mathbb{Z}_+^N$ 使得 $\deg(E^{\mathbf{k}_i})=\eta-\mu_i$ 和 $\deg(E^{\mathbf{l}_i})=\mu_i$, $i=1,2,\cdots,m$. 因此由 $(*)$, 可得

$$E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}=\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}}a_{\mathbf{r},\mathbf{s}}K_\eta E^{\mathbf{r}}\cdot v_\sigma\otimes hE^{\mathbf{s}}\cdot v_{\sigma'}+\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}a_{\mathbf{r},\mathbf{s}}h_iE^{\mathbf{r}}\cdot v_\sigma\otimes g_iE^{\mathbf{s}}\cdot v_{\sigma'}.$$

由引理 3.1 的证明知, $a_{\mathbf{r},\mathbf{s}}K_\eta E^{\mathbf{r}}\cdot v_\sigma=a'_{\mathbf{r},\mathbf{s}}E^{\mathbf{r}}\cdot v_\sigma$, $a'_{\mathbf{r},\mathbf{s}}=ba_{\mathbf{r},\mathbf{s}}$, $b\in k^\times$ 和 $a_{\mathbf{r},\mathbf{s}}h_iE^{\mathbf{r}}\cdot v_\sigma=a_{\mathbf{r},\mathbf{s}}a_iE^{\mathbf{k}_i}K_{\mu_i}E^{\mathbf{r}}\cdot v_\sigma=b_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}E^{\mathbf{k}_i}E^{\mathbf{r}}\cdot v_\sigma$, $b_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}=c_ia_{\mathbf{r},\mathbf{s}}$, $c_i\in k^\times$. 因此

$$E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}=\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}}a'_{\mathbf{r},\mathbf{s}}E^{\mathbf{r}}\cdot v_\sigma\otimes hE^{\mathbf{s}}\cdot v_{\sigma'}+\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}b_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}E^{\mathbf{k}_i}E^{\mathbf{r}}\cdot v_\sigma\otimes E^{\mathbf{l}_i}E^{\mathbf{s}}\cdot v_{\sigma'}.$$

因为 $M(\sigma)$ 和 $M(\sigma')$ 均是自由 $\mathcal{U}^+$-模，分别有 $\mathcal{U}^+$-基 v_σ 和 $v_{\sigma'}$, 所以 $M(\sigma)\otimes M(\sigma')$ 是基为 $v_\sigma\otimes v_{\sigma'}$ 的自由 $\mathcal{U}^+\otimes\mathcal{U}^+$-模，因此，上面最后的等式等价于

$$E^{\mathbf{k}}\otimes 1=\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}}a'_{\mathbf{r},\mathbf{s}}E^{\mathbf{r}}\otimes hE^{\mathbf{s}}+\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}b_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}E^{\mathbf{k}_i}E^{\mathbf{r}}\otimes E^{\mathbf{l}_i}E^{\mathbf{s}}. \tag{$**$}$$

由定理 2.1, $\{E^{\mathbf{k}}\mid\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N\}$ 是 $\mathcal{U}^+$ 的一组 k-基，所以 $\{E^{\mathbf{k}}\otimes E^{\mathbf{l}}\mid\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathbb{Z}_+^N\}$ 是 $\mathcal{U}^+\otimes\mathcal{U}^+$ 的一组 k-基. 由文 [3, Corollary 1.8] 知 $\mathcal{U}$ 没有零因子，因此 $\{hE^{\mathbf{s}}\mid\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^N\}$ 在 k 上线性无关，从而 $\{E^{\mathbf{r}}\otimes hE^{\mathbf{s}}\mid\mathbf{r},\ \mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^N\}$ 也线性无关. 另一方面，由于 $\mathcal{U}^+$ 是一个 Q^+-分次代数，所以 $\mathcal{U}^+\otimes\mathcal{U}^+$ 是一个 $Q^+\oplus Q^+$-分次代数，并且 $\deg(E^{\mathbf{r}}\otimes E^{\mathbf{s}})=(\deg(E^{\mathbf{r}}),\deg(E^{\mathbf{s}}))$, 其中 $\mathbf{r},\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^N$. 当 $\mathbf{s}=(s_1,s_2,\cdots,s_N)\neq\mathbf{0}$ (在 $\mathbb{Z}_+^N$ 中) 时, $\deg(E^{\mathbf{s}})=\sum\limits_{j=1}^N s_j\beta_j\neq 0$. 设 $\deg(E^{\mathbf{s}'})$ 是 Q 的有限子集 $\{\deg(E^{\mathbf{s}})\mid a'_{\mathbf{r},\mathbf{s}}\neq 0$ 对某个 $\mathbf{r}\}$ 中的最大元，则存在 $\mathbf{r}'$, 使得 $a'_{\mathbf{r}',\mathbf{s}'}\neq 0$. 下证 $\deg(E^{\mathbf{r}'}\otimes hE^{\mathbf{s}'})\notin\{\deg(E^{\mathbf{k}_i}E^{\mathbf{r}}\otimes E^{\mathbf{l}_i}E^{\mathbf{s}})\mid b_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}\neq 0\}$. 事实上，如果 $\deg(E^{\mathbf{r}'}\otimes hE^{\mathbf{s}'})=\deg(E^{\mathbf{k}_i}E^{\mathbf{r}}\otimes E^{\mathbf{l}_i}E^{\mathbf{s}})$, $b_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}\neq 0$, 则 $\deg(hE^{\mathbf{s}'})=\deg(E^{\mathbf{l}_i}E^{\mathbf{s}})$. 因此 $\deg(h)+\deg(E^{\mathbf{s}'})=\deg(E^{\mathbf{l}_i})+\deg(E^{\mathbf{s}})$, 这说明 $\deg(E^{\mathbf{s}})-\deg(E^{\mathbf{s}'})=\deg(h)-\deg(E^{\mathbf{l}_i})=\eta-\mu_i>0$, 矛盾. 由于 $b_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}\neq 0$ 当且仅当 $a_{\mathbf{r},\mathbf{s}}\neq 0$ 当且仅当 $a'_{\mathbf{r},\mathbf{s}}\neq 0$, 所以元素 $\sum\limits_{\mathbf{r},\mathbf{s}}a'_{\mathbf{r},\mathbf{s}}E^{\mathbf{r}}\otimes hE^{\mathbf{s}}+\sum\limits_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}b_{\mathbf{r},\mathbf{s},i}E^{\mathbf{k}_i}E^{\mathbf{r}}\otimes E^{\mathbf{l}_i}E^{\mathbf{s}}$ 中次数为 $\deg(E^{\mathbf{r}'}\otimes hE^{\mathbf{s}'})$ 的齐次部分非零. 因为 $\deg(hE^{\mathbf{s}'})=\eta+\deg(E^{\mathbf{s}'})\neq 0$, 所以 $\deg(E^{\mathbf{r}'}\otimes hE^{\mathbf{s}'})\neq\deg(E^{\mathbf{k}}\otimes 1)=\Big(\sum\limits_{j=1}^N k_j\beta_j,0\Big)$, 这样, $(**)$ 导出矛盾. 证毕.

定理 3.2　对任意 $\sigma,\sigma'\in(k^\times)^n$, 在 $\mathcal{W}$ 中存在一个直和分解

$$M(\sigma)\otimes M(\sigma')=\bigoplus_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N}\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}). \tag{3.1}$$

证　设 $\mathbf{k}\neq\mathbf{l}\in\mathbb{Z}_+^N$. 假设 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\cap\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\neq\{0\}$, 则存在非零权向量 $v\in\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\cap\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})=\mathcal{U}^+\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\cap\mathcal{U}^+\cdot(E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})$, 因此存在齐次元 $g,h\in\mathcal{U}^+$, 使得 $v=g\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})=h\cdot(E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})$, 设在 Q_+ 中, $\deg(g)=\xi$, $\deg(h)=\eta$, 若 $\eta=0$, 则不妨设 $h=1$, 此时 $E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}=g\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\in\mathcal{U}^+\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})$, 由引理 3.3 知, $E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}$ 和 $E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}$ 均是最低权向量，因此

$E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}\in\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})=\mathcal{U}^+\cdot(E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})$, 并且 $E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}=g'\cdot(E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})$, $g'\in\mathcal{U}^+$, 从而有 $E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}=(gg')\cdot(E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})$. 比较它们的权知， $\deg(gg')=0$, 这说明 $\deg(g)=0$, 因此 g 是个非零纯量且 $E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}=g\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})=gE^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}$. 由于 $M(\sigma)\otimes M(\sigma')$ 是一个基为 $v_\sigma\otimes v_{\sigma'}$ 的自由 $\mathcal{U}^+\oplus\mathcal{U}^+$-模，所以有 $E^{\mathbf{l}}\otimes 1=gE^{\mathbf{k}}\otimes 1$, 从而 $\mathbf{l}=\mathbf{k}$, 矛盾，因此 $\eta\neq 0$. 类似地可证 $\xi\neq 0$.

类似于引理 3.3 的证明，可设

$$\Delta(h)=K_\eta\otimes h+\sum_{i=1}^{m}a_iE^{\mathbf{k}_i}K_{\eta_i}\otimes E^{\mathbf{l}_i},$$
$$\Delta(g)=K_\xi\otimes g+\sum_{j=1}^{n}b_jE^{\mathbf{s}_j}K_{\xi_j}\otimes E^{\mathbf{r}_j},$$

其中 $a_i,b_j\in k^\times$, $0\leqslant\eta_i<\eta$, $0\leqslant\xi_j<\xi$, $\deg(E^{\mathbf{k}_i})=\eta-\eta_i$, $\deg(E^{\mathbf{l}_i})=\eta_i$, $\deg(E^{\mathbf{s}_j})=\xi-\xi_j$ 及 $\deg(E^{\mathbf{r}_j})=\xi_j$. 因此

$$h\cdot(E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})=aE^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes h\cdot v_{\sigma'}+\sum_{i=1}^{m}a_ic_iE^{\mathbf{k}_i}E^{\mathbf{l}}\cdot v_\sigma\otimes E^{\mathbf{l}_i}\cdot v_{\sigma'},$$
$$g\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})=bE^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes g\cdot v_{\sigma'}+\sum_{j=1}^{n}b_jd_jE^{\mathbf{s}_j}E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes E^{\mathbf{r}_j}\cdot v_{\sigma'},$$

其中 $a,b,c_i,d_j\in k^\times$. 因为 $M(\sigma)\otimes M(\sigma')$ 是一个基为 $v_\sigma\otimes v_{\sigma'}$ 的自由 $\mathcal{U}^+\oplus\mathcal{U}^+$-模，所以在 $\mathcal{U}^+\otimes\mathcal{U}^+$ 中，有

$$aE^{\mathbf{l}}\otimes h+\sum_{i=1}^{m}a_ic_iE^{\mathbf{k}_i}E^{\mathbf{l}}\otimes E^{\mathbf{l}_i}=bE^{\mathbf{k}}\otimes g+\sum_{j=1}^{n}b_jd_jE^{\mathbf{s}_j}E^{\mathbf{k}}\otimes E^{\mathbf{r}_j}.\tag{***}$$

注意到 $\mathcal{U}^+\otimes\mathcal{U}^+$ 是一个 $Q_+\oplus Q_+$-分次代数, 并且有 $\deg(E^{\mathbf{l}}\otimes h)=(\deg(E^{\mathbf{l}}),\eta)$, $\deg(E^{\mathbf{k}_i}E^{\mathbf{l}}\otimes E^{\mathbf{l}_i})=(\eta-\eta_i+\deg(E^{\mathbf{l}}),\eta_i)$, $\deg(E^{\mathbf{k}}\otimes g)=(\deg(E^{\mathbf{k}}),\xi)$ 以及 $\deg(E^{\mathbf{s}_j}E^{\mathbf{k}}\otimes E^{\mathbf{r}_j})=(\xi-\xi_j+\deg(E^{\mathbf{k}}),\xi_j)$. 由于 $\eta>\eta_i$, $\xi>\xi_j$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$, 所以通过比较 (***) 中各项的次数得 $aE^{\mathbf{l}}\otimes h=bE^{\mathbf{k}}\otimes g$, 这说明 $E^{\mathbf{l}}=E^{\mathbf{k}}$ 且 $h=cg$, $c\in k^\times$, 这与 $\mathbf{l}\neq\mathbf{k}$ 矛盾. 这样就证得了 $\sum\limits_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N}\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})$ 是直和.

由前面的讨论知， $\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})=\mathcal{U}^+\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})$ 是一个秩为 1 的自由 $\mathcal{U}^+$-模，其 $\mathcal{U}^+$-基为 $E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}$, 这里 $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N$. 因此对任意 $\eta\in Q_+$ 和 $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N$, 有 $\dim((\mathcal{U}^+)_\eta\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}))=\dim(\mathcal{U}^+)_\eta$.

对任意 $\tau\in\Pi(M(\sigma)\otimes M(\sigma'))$, 权向量空间

$$\begin{aligned}(M(\sigma)\otimes M(\sigma'))_{(\tau)}&=\bigoplus_{\nu\mu=\tau}M(\sigma)_{(\nu)}\otimes M(\sigma')_{(\mu)}\\&=\bigoplus_{\nu\mu=\tau}(\mathcal{U}^+)_{F_\sigma^{-1}(\nu)}\cdot v_\sigma\otimes(\mathcal{U}^+)_{F_{\sigma'}^{-1}(\mu)}\cdot v_{\sigma'}\\&=\bigoplus_{\substack{\eta,\xi\in Q_+\\F_{\sigma\sigma'}(\eta+\xi)=\tau}}(\mathcal{U}^+)_\eta\cdot v_\sigma\otimes(\mathcal{U}^+)_\xi\cdot v_{\sigma'},\end{aligned}$$

这里由引理 3.2 可得第 1 个等式，由 F_σ 和 $F_{\sigma'}$ 均为双射， $F_{\sigma\sigma'}(\eta+\xi)=F_\sigma(\eta)F_{\sigma'}(\xi)$ 等事实可得第 3 个等式. 另一方面，对任意 $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_N),\mathbf{l}=(l_1,l_2,\cdots,l_N)\in\mathbb{Z}_+^N$, $E^{\mathbf{l}}\cdot(E^{\mathbf{k}}v_\sigma\otimes v_{\sigma'})$ 都是一个权为 $F_{\sigma\sigma'}(\deg(E^{\mathbf{l}})+\deg(E^{\mathbf{k}}))=F_{\sigma\sigma'}(\deg(E^{\mathbf{l}}E^{\mathbf{k}}))=F_{\sigma\sigma'}\Big(\sum\limits_{j=1}^{N}(l_j+$

$k_j)\beta_j\Big)$ 的权向量，因此

$$\begin{aligned}
&\Big(\bigoplus_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N}\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\Big)_{(\tau)}\\
&=\Big(\bigoplus_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N}\mathcal{U}^{+}\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\Big)_{(\tau)}\\
&=\Big(\bigoplus_{\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathbb{Z}_+^N}E^{\mathbf{l}}\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\Big)_{(\tau)}\\
&=\mathrm{span}\{E^{\mathbf{l}}\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\mid \mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathbb{Z}_+^N, F_{\sigma\sigma'}(\deg(E^{\mathbf{l}})+\deg(E^{\mathbf{k}}))=\tau\}\\
&=\bigoplus_{\substack{\eta,\xi\in Q_+\\ F_{\sigma\sigma'}(\eta+\xi)=\tau}}(\mathcal{U}^+)_\eta\cdot((\mathcal{U}^+)_\xi\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}).
\end{aligned}$$

现在设 $\eta,\xi\in Q_+$ 且 $F_{\sigma\sigma'}(\eta+\xi)=\tau$. 由于 $M(\sigma)\otimes M(\sigma')$ 是一个基为 $v_\sigma\otimes v_{\sigma'}$ 的自由 $\mathcal{U}^+\oplus\mathcal{U}^+$-模，所以有 $\dim((\mathcal{U}^+)_\eta\cdot v_\sigma\otimes(\mathcal{U}^+)_\xi\cdot v_{\sigma'})=\dim((\mathcal{U}^+)_\eta\otimes(\mathcal{U}^+)_\xi)=(\dim(\mathcal{U}^+)_\eta)(\dim(\mathcal{U}^+)_\xi)<\infty$. 另一方面，因为 $\{E^{\mathbf{k}}\mid\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N,\deg(E^{\mathbf{k}})=\xi\}$ 是 $(\mathcal{U}^+)_\xi$ 的一组 k-基，所以

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}^+)_\eta\cdot((\mathcal{U}^+)_\xi\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})&=\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N\\ \deg(E^{\mathbf{k}})=\xi}}(\mathcal{U}^+)_\eta\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\\
&=\bigoplus_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N\\ \deg(E^{\mathbf{k}})=\xi}}(\mathcal{U}^+)_\eta\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}),
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\dim((\mathcal{U}^+)_\eta\cdot((\mathcal{U}^+)_\xi\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}))&=\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N\\ \deg(E^{\mathbf{k}})=\xi}}\dim((\mathcal{U}^+)_\eta\cdot(E^{\mathbf{k}}\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}))\\
&=(\dim(\mathcal{U}^+)_\xi)(\dim(\mathcal{U}^+)_\eta),
\end{aligned}$$

这样 $\dim((\mathcal{U}^+)_\eta\cdot v_\sigma\otimes(\mathcal{U}^+)_\xi\cdot v_{\sigma'})=\dim((\mathcal{U}^+)_\eta\cdot((\mathcal{U}^+)_\xi\cdot v_\sigma\otimes v_{\sigma'}))$. 因为 $\{(\eta,\xi)\mid\eta,\xi\in Q_+,F_{\sigma\sigma'}(\eta+\xi)=\tau\}$ 是个有限集，所以有 $\dim((M(\sigma)\otimes M(\sigma'))_{(\tau)})=\dim\Big(\Big(\bigoplus_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N}\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{k}}v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\Big)_{(\tau)}\Big)$, 从而 $(M(\sigma)\otimes M(\sigma'))_{(\tau)}=\Big(\bigoplus_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N}\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{k}}v_\sigma\otimes v_{\sigma'})\Big)_{(\tau)}$.

推论 3.1　对任意 $\sigma,\sigma'\in(k^\times)^n$, 存在一个 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模同构

$$M(\sigma)\otimes M(\sigma')\cong\bigoplus_{\eta\in Q^+}(\dim(\mathcal{U}^+)_\eta)M(F(\eta)\sigma\sigma').$$

证　设 $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_N)\in\mathbb{Z}_+^N$, 令

$$\eta=\deg(E^{\mathbf{k}})=\sum_{j=1}^N k_j\beta_j=\sum_{i=1}^n s_i\alpha_i\in Q_+,$$

则由定理 3.2 的证明知，$\mathcal{U}^{\geqslant 0}\cdot(E^{\mathbf{k}}v_\sigma\otimes v_{\sigma'})$ 同构于 $M(F(\eta)\sigma\sigma')$, 其中 $F(\eta)\sigma\sigma'=F_{\sigma\sigma'}(\eta)=\epsilon_1^{s_1}\epsilon_2^{s_2}\cdots\epsilon_n^{s_n}\sigma\sigma'$. 这样由定理 3.2 便得推论.

推论 3.2 作为 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模有 $M(\sigma)\otimes M(\sigma')\cong M(\sigma')\otimes M(\sigma)$, 其中 $\sigma,\sigma'\in(k^{\times})^n$.

3.3 余模与 Yetter-Drinfel'd 模

映射 $ht:Q\to\mathbb{Z}$, $ht\big(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\big)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$, 是 $\mathbb{Z}$-线性的，即 ht 是交换群 Q 到 $\mathbb{Z}$ 的群同态，因此可以在 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 上定义一个 $\mathbb{Z}_+$-分次 h 如下

$$h(E^{\mathbf{k}}K_\lambda)=\sum_{j=1}^{N}k_j ht(\beta_j),$$

其中 $E^{\mathbf{k}}K_\lambda=E_{\beta_1}^{k_1}\cdots E_{\beta_N}^{k_N}K_1^{t_1}\cdots K_n^{t_n}$, $\mathbf{k}=(k_1,\cdots,k_N)\in\mathbb{Z}_+^N$ 及 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i\alpha_i\in Q$. 这样 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}=\bigoplus\limits_{l=0}^{\infty}(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{(l)}$ 是一个 $\mathbb{Z}_+$-分次 Hopf 代数，其中 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{(l)}=\mathrm{span}\{E^{\mathbf{k}}K_\lambda\mid h(E^{\mathbf{k}}K_\lambda)=l,\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^N,\lambda\in Q\}$. 特别地， $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{(0)}=k[K_1^{\pm 1},K_2^{\pm},\cdots,K_n^{\pm}]$ 是一个 n 元 Laurent 多项式代数.

由于 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的余根包含在 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{(0)}$ 中 (见 [12, Lemma 5.3.4]), 所以 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{(0)}=k\mathcal{G}(\mathcal{U}^{\geqslant 0})$ 是 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的余根，并且 $\mathcal{G}(\mathcal{U}^{\geqslant 0})=\{K_\lambda\mid\lambda\in Q\}$, 因此 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的每个单右余理想都是一个单子余代数且形如 kg, 其中 $g\in\mathcal{G}(\mathcal{U}^{\geqslant 0})$.

设 H 是一个有双射反极元 S 的 Hopf 代数，一个 (左-右)Yetter-Drinfel'd H-模 (简记为 YD H-模) M 是指三元组 $(M,\cdot,\rho)$, 使得 $(M,\cdot)$ 是一个左 H-模， (M,ρ) 是一个右 H-余模，并且满足下面两个等价的相容性条件 (见 [15]):

$$h_{(1)}\cdot m_{(0)}\otimes h_{(2)}m_{(1)}=(h_{(2)}\cdot m)_{(0)}\otimes(h_{(2)}\cdot m)_{(1)}h_{(1)}, \tag{3.2}$$

$$\rho(h\cdot m)=h_{(2)}\cdot m_{(0)}\otimes h_{(3)}m_{(1)}S^{-1}(h_{(1)}), \tag{3.3}$$

其中 $h\in H$, $m\in M$. 一个 YD H-模映射是指一个 H-模映射同时也是一个 H-余模映射，用 ${}_H\mathcal{YD}^H$ 表示 (左-右)YD H-模和 YD H-模同态构成的范畴，这是一个 monoidal 范畴. 设 $M\in{}_H\mathcal{YD}^H$, M 的一个 YD H-子模是指一个 H-子模同时是一个 H-子余模. 一个 YD H-模是单的如果它没有非平凡的 YD H-子模.

在文 [11] 中， Radford 给出了一种通过 H 上的模和余模构造 YD H-模的方法.

设 L 是单 H-模，则 $L\otimes H\in{}_H\mathcal{YD}^H$, 其中作用和余作用如下：

$$h\cdot(l\otimes a)=h_{(2)}\cdot l\otimes h_{(3)}aS^{-1}(h_{(1)}),\quad \rho(l\otimes a)=(l\otimes a_{(1)})\otimes a_{(2)},$$

$l\in L,h,a\in H$ (见 [11]). 显然，有 H-余模同构 $L\otimes H\cong(\dim L)H$.

对 $\beta\in\mathcal{G}(H^\circ)$, 令 L_β 表示对应的 1-维单 H-模： $h\cdot l=\beta(h)l$, $h\in H$, $l\in L_\beta$. 定义 $H_\beta=(H,\cdot_\beta,\Delta)\in{}_H\mathcal{YD}^H$, 其中 $h\cdot_\beta a=(h_{(2)}\leftharpoonup\beta)aS^{-1}(h_{(1)})=\beta(h_{(2)})h_{(3)}aS^{-1}(h_{(1)})$, 则 $H_\beta\cong L_\beta\otimes H$. 设 N 是 H 的右余理想，则 $H_{\beta,N}=H\cdot_\beta N$ 是 H_β 的一个 YD H-子模 (见 [11]).

引理 3.4 (见 [11]) 设 $H=\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty}H_{(n)}$ 是 k 上一个分次双代数，使得 H^{op} 是分次 Hopf 代数. 假设 $H_{(0)}$ 是 H^{op} 的一个交换余交换的子双代数.

(a) 设 $\beta:H\to k$ 是一个分次代数同态， N 是 H 的一个单的右余理想，则 $H_{\beta,N}$ 是一个单的 YD H-模.

(b) 假设 $\beta,\beta':H\to k$ 为分次代数同态， N,N' 是 H 的单的右余理想，则 $H_{\beta,N}\simeq H_{\beta',N'}$ 当且仅当 $\beta=\beta'$, $N=N'$.

我们将把这些结果应用到半量子群 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 上.

引理 3.5　设 $\beta : \mathcal{U}^{\geqslant 0} \to k$ 是一个代数同态，则 β 是一个分次代数同态.

证　由注 3.1 即得.

对任意 $\beta \in \mathcal{G}((\mathcal{U}^{\geqslant 0})^{\circ})$ 和 $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U}^{\geqslant 0})$, 有 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{\beta,g} = \mathcal{U}^{\geqslant 0} \cdot_{\beta} g \subset (\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{\beta}$, 其中 $h \cdot_{\beta} g = \beta(h_{(2)}) h_{(3)} g S^{-1}(h_{(1)})$, $h \in \mathcal{U}^{\geqslant 0}$, S 为 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的双射反极元. 既然 kg 是 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的一个单的右余理想，由引理 3.4, $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{\beta,g}$ 是一个单的 YD $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模.

定理 3.3　设 $\Phi(\beta, g) = [(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{\beta,g}]$, 则 Φ 是一个从 $\mathcal{G}((\mathcal{U}^{\geqslant 0})^{\circ}) \times \mathcal{G}(\mathcal{U}^{\geqslant 0})$ 到 $\mathcal{E}$ 的双射，这里 $\mathcal{E}$ 表示所有单的 YD $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-权模的同构类构成的集合.

证　由前面讨论知，$(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{\beta,g}$ 是一个单的 YD $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模，显然 $(\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{\beta,g}$ 也是一个 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-权模，再由引理 3.4 知，$\Phi$ 是单射.

现在设 M 为单的 YD $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-权模，则 $M = \bigoplus\limits_{\sigma \in (k^{\times})^n} M_{(\sigma)}$. 类似于文 [11, p. 697] 的讨论过程，可以证明 M 是某个 $L \otimes \mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的 Yetter-Drinfel'd $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-子模. 事实上，令 N 是 M 的一个单 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-子余模，由于 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的每个单的子余代数形如 kg, $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U}^{\geqslant 0})$, 所以 $N = km$ 对某个 $m \in M$, 并且 $\rho(m) = m \otimes g$, $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U}^{\geqslant 0})$. 设 $m = \sum\limits_{j=1}^{s} m_j$, $0 \neq m_j \in M_{(\tau^j)}$, 其中 $\tau^1, \tau^2, \cdots, \tau^s$ 是 $\Pi(M)$ 中互不相同的元素. 若 $s \geqslant 2$, 则存在某个 $1 \leqslant i \leqslant n$, 使得 $\tau_i^1 \neq \tau_i^2$. 由 (3.3), $\rho(K_i \cdot m) = K_i \cdot m \otimes K_i g S(K_i) = K_i \cdot m \otimes g$, 即 $\mathrm{span}\{K_i \cdot m\}$ 也是一个单子余模且同构于 N. 设 $m' = \tau_i^1 m - K_i \cdot m$, 则 km' 是 M 的一个单子余模且 $m' \in \bigoplus\limits_{j=2}^{s} M_{(\tau^j)}$. 继续这个过程，我们可以假定 m 是一个权为 σ 的权向量，由 (3.3) 知，$\mathcal{U}^{\geqslant 0} \cdot N$ 是 M 的一个 YD $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-子模，所以由命题 3.1, $M = \mathcal{U}^{\geqslant 0} \cdot N$ 且 M 作为 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模同构于 $M(\sigma)$ 的某个商. 由于 $M(\sigma)$ 仅有一个 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-极大子模，所以 M 也仅有一个 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-极大子模，设为 M', 则 $L = M/M'$ 是 1-维 $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模且 $L \cong V_{\sigma}$. 定义 $f : M \to L \otimes \mathcal{U}^{\geqslant 0}$, $f(m) = p(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}$, 其中 $p : M \to L$ 表示典型满同态，$L \otimes \mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的 YD $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模结构如上. 显然 f 是 YD $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模同态, 既然 M 是一个单的 YD $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-模且 $f \neq 0$, 所以 $\mathrm{Ker}\, f = 0$, 从而 M 是 $L \otimes \mathcal{U}^{\geqslant 0}$ 的一个 YD $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-子模.

注意到 $L \otimes \mathcal{U}^{\geqslant 0} \cong V_{\sigma} \otimes \mathcal{U}^{\geqslant 0} \cong (\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{\beta}$, 其中 $\beta = \sigma \in (k^{\times})^n = \mathrm{Alg}(\mathcal{U}^{\geqslant 0}, k) = \mathcal{G}((\mathcal{U}^{\geqslant 0})^{\circ})$ (见注 3.1). 因此不妨认为 $M \subset (\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{\beta}$, 于是 $N = kg$, $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U}^{\geqslant 0})$, 从而 $M = \mathcal{U}^{\geqslant 0} \cdot_{\beta} g = (\mathcal{U}^{\geqslant 0})_{\beta,g}$, 所以 Φ 是满射.

参　考　文　献

[1] Drinfel'd V. G., Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation [J], *Soviet Math. Dokl.*, 1985, 32:254–258.

[2] Jimbo M., A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation [J], *Lett. Math. Phys.*, 1985, 10:63–69.

[3] de Concini C. and Kac V. G., Representations of quantum groups at roots of 1 [J], *Progress in Mathematics*, 1990, 92:471–506.

[4] Jantzen J. C., Lectures on quantum groups [M]//Graduate Studies in Mathematics, 6, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996.

[5] Kassel C., Quantum Groups [M], GTM, 155, New York: Springer-Verlag, 1995.

[6] Cibils C., Half quantum groups at roots of unity, path algebras and representation theory [J], *Internat. Math. Res. Notices*, 1997, 12:541–553.

[7] Gunnlaugsdóttir E., Monoidal structure of the category of u_q^+-modules [J], *Linear Alg. and Its Applications*, 2003, 365:183–199.

[8] Majid S., Physics for algebraists: non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras by a bicross product construction [J], *J. Algebra*, 1990, 130:17–64.

[9] Reshetikhin N. and Turaev V. G., Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups [J], *Invent. Math.*, 1991, 103:547–597.

[10] Yetter D. N., Quantum groups and representations of momoidal categories [J], *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1990, 108:261–290.

[11] Radford D. E., On oriented quantum algebras derived from representatins of the quantum duouble of a finite-dimensional Hopf algebra [J], *J. Algebra*, 2003, 270:670–695.

[12] Montgomery S., Hopf algebras and their actions on rings [M]//CBMS Series in Math., 82, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.

[13] Brown K. A. and Goodearl K. R., Lectures on algebraic quantum groups [M]//Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Basel: Birkhauser, 2002.

[14] Humphreys J. E., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory [M], New York, Heiderberg, Berlin: Springer-Verlag, 1972.

[15] Lambe L. A. and Radford D. E., Algebraic aspects of the quantum Yang-Baxter equation [J], *J. Algebra*, 1993, 154:228–288.

The Half-quantum Group $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$

WANG Zhen* CHEN Huixiang**

*Department of Fundamental Sciences, Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224003, Jiangsu, China. E-mail: wangzhen118@gmail.com

**Department of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou 225002, Jiangsu, China. E-mail: hxchen@yzu.edu.cn

Abstract Let $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ denote the half-quantum group for a fixed simple Lie algebra. This paper examines some properties and representation of $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$. The authors prove that the Hopf algebra $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$ is not quasi-cocommutative, and hence the category of left $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-module is not a braided monoidal category. In the weight module category $\mathcal{W}$, all the simple objects and the projective objects are described. And all simple Yetter-Drinfel'd $\mathcal{U}^{\geqslant 0}$-weight modules are also described.

Keywords Half-quantum group, Quasi-cocommutative, Yetter-Drinfel'd module

2000 MR Subject Classification 17B37, 16W35