数 学 年 刊
2009,30A(6):845–856

一类具有抑制剂的非均匀恒化器模型的共存态 ***

聂 华* 吴建华* 谢文昊**

提要 研究了一类具有抑制剂和 Beddington-DeAngelis 功能反应项的非均匀恒化器模型．根据单调动力系统理论得到了正平衡解的存在性．利用度理论、分歧理论以及摄动理论，分析了抑制剂对系统正平衡解及渐近行为的影响．结果表明当体现抑制作用的参数 μ 充分大时，此模型或者没有正解，并且一个半平凡的非负解是全局吸引的；或者模型的所有正解均由一个极限问题决定．

关键词 恒化器， Beddington-DeAngelis 功能反应项，共存解，稳定性，扰动理论
MR (2000) 主题分类 35K57
中图法分类 O175.26
文献标识码 A
文章编号 1000-8314(2009)06-0845-12

1 引 言

恒化器 (chemostat) 是用于微生物连续培养的一种实验装置．它不仅可模拟湖泊和海洋中单细胞藻类浮游生物的生长，而且它已被广泛地应用于微生物的生产、生物制药、食品加工及生态系统尤其是水生生态系统的管理、预测和环境污染的控制．关于恒化器竞争模型的详细数学描述见文 [1].

在对水生种群的研究过程中，人们发现了一个有趣的现象，某些水生种群在种群密度变大时能产生大量的化学物质，这些化学物质对别的水生种群有抑制生长的作用，而且经过大量的观察发现水生生态系统中产生抑制剂的现象广泛存在．比如文 [2] 给出了抗生素抑制剂的实验．依据该文的实验结果， Levin [3] 提出了一类具有内部抑制剂的均匀搅拌的恒化器模型，他通过大量的数值模拟说明了该模型具有双稳定的吸引子，严格的数学证明见文 [4]. 考虑到环境的非齐次性，文 [5, 6] 去掉均匀搅拌的假设，研究了两类具有内部抑制剂的非均匀恒化器模型，给出了当抑制剂的影响足够大时， PDE 系统的一些渐近性.

但上述文献研究的都是具有 Michaelis-Menten 反应项的恒化器模型，该反应项仅体现了物种间的竞争．然而物种间不仅有竞争，而且存在着相互影响．为考察物种间的相互影响，文 [7, 8] 率先提出了如下反应函数

$$f(s,u)=\frac{s}{k_1+s+\beta_1 u},\quad g(s,v)=\frac{s}{k_2+s+\beta_2 v},$$

其中 k_i,β_i 为正常数．它与 Michaelis-Menten 反应项类似，但在分母中多了一项 $\beta_1 u$ 或 $\beta_2 v$, 用于模拟物种间的相互影响． Harrison [9] 用实验验证了在微生物的捕食与被捕食系统中 Beddington-DeAnglis 反应项要比不考虑种群间相互作用的反应项更符合现实．于是，具有 Beddington-DeAnglis 反应项的模型日益受到重视，见文 [10, 11] 等.

本文 2008 年 7 月 24 日收到， 2009 年 4 月 16 日收到修改稿.
*陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710062. E-mail: niehua@snnu.edu.cn; wjhua@snnu.edu.cn
**西安石油大学理学院，西安 710065. E-mail: muxiangshu@yahoo.com.cn
***国家自然科学基金 (No. 10971124, No. 10726042) 和陕西省科技计划 (No. 2009JQ1007) 资助的项目.

本文研究一类具有内部抑制剂和 Beddington-DeAngelis 功能反应函数的非均匀恒化器模型. 这里假设一物种将其一部分营养供给抑制剂, 该抑制剂会导致另一物种生长率减小, 但不影响前一物种的生长. 设 $s(x,t),u(x,t),v(x,t)$ 和 $p(x,t)$ 分别为 t 时刻营养物、两竞争物种和抑制剂的浓度, 则类似于文 [5, 6, 12], 具有内部抑制剂和 Bedding-DeAngelis 功能反应函数的非均匀恒化器模型为

$$\begin{cases} s_t = ds_{xx} - \frac{1}{r_1}auf(s,u) - \frac{1}{r_2}bvg(s,v)\mathrm{e}^{-\mu p}, & x\in(0,1),\ t>0,\\ u_t = du_{xx} + a(1-k)uf(s,u), & x\in(0,1),\ t>0,\\ v_t = dv_{xx} + bvg(s,v)\mathrm{e}^{-\mu p}, & x\in(0,1),\ t>0,\\ p_t = dp_{xx} + akuf(s,u), & x\in(0,1),\ t>0 \end{cases}$$

具有边界条件和初始条件

$$\begin{array}{lll} s_x(0,t)=-s^0, \quad s_x(1,t)+\gamma s(1,t)=0, & p_x(0,t)=p_x(1,t)+\gamma p(1,t)=0, & t>0,\\ u_x(0,t)=u_x(1,t)+\gamma u(1,t)=0, & v_x(0,t)=v_x(1,t)+\gamma v(1,t)=0, & t>0,\\ s(x,0)=s_0(x)\geqslant 0, & p(x,0)=p_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0, & \\ u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0, & v(x,0)=v_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0, & \end{array}$$

其中常数 $s^0>0$ 为营养物的输入浓度, d 为扩散系数, r_1, r_2 为产出率, a, b 分别为两竞争物的最大生长率, $d, r_1, r_2, a, b, \gamma$ 均为大于零的常数. $\mathrm{e}^{-\mu p}$ 反映了抑制剂 p 对物种 v 生长率的抑制程度, 其中常数 $\mu>0$ 体现了抑制剂对物种 v 的影响, 其详细的生物解释见文 [13]. k 为用于产生抑制剂的营养比率, 因此 $0<k<1$.

为讨论问题方便, 引入如下无量纲参数和变量: $\overline{s}=\frac{s}{s^0}$, $\overline{u}=\frac{u}{r_1 s^0}$, $\overline{v}=\frac{v}{r_2 s^0}$, $\overline{p}=\frac{p}{r_1 s^0}$, $\overline{k}_i=\frac{k_i}{s^0}$, $\overline{\mu}=r_1 s^0\mu$, $f_i(\overline{s})=f_i(s^0\overline{s})$, 则上述 PDE 系统可简化为 (仍用原记号表示相应的无量纲参数和变量)

$$\begin{cases} s_t = ds_{xx} - auf(s,u) - bvg(s,v)\mathrm{e}^{-\mu p}, & x\in(0,1),\ t>0,\\ u_t = du_{xx} + a(1-k)uf(s,u), & x\in(0,1),\ t>0,\\ v_t = dv_{xx} + bvg(s,v)\mathrm{e}^{-\mu p}, & x\in(0,1),\ t>0,\\ p_t = dp_{xx} + akuf(s,u), & x\in(0,1),\ t>0,\\ s_x(0,t)=-1, \quad s_x(1,t)+\gamma s(1,t)=0, & \\ p_x(0,t)=p_x(1,t)+\gamma p(1,t)=0, & t>0,\\ u_x(0,t)=u_x(1,t)+\gamma u(1,t)=0, & \\ v_x(0,t)=v_x(1,t)+\gamma v(1,t)=0, & t>0,\\ s(x,0)=s_0(x)\geqslant 0, \quad p(x,0)=p_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0, & \\ u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0, \quad v(x,0)=v_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0. & \end{cases} \tag{1.1}$$

鉴于 chemostat 模型所固有的守恒率, 在 (1.1) 中引入变换 $\Phi(x,t)=s+u+v+p$ 和 $\Psi(x,t)=p-cu$, 其中 $c=\frac{k}{1-k}$, 则类似于文 [5, 6], (1.1) 的极限系统为

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + a(1-k)uf(z-(1+c)u-v,u), & x\in(0,1),\ t>0,\\ v_t = dv_{xx} + bvg(z-(1+c)u-v,v)\mathrm{e}^{-\mu cu}, & x\in(0,1),\ t>0,\\ u_x(0,t)=u_x(1,t)+\gamma u(1,t)=0, & \\ v_x(0,t)=v_x(1,t)+\gamma v(1,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0, \quad v(x,0)=v_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0, & x\in[0,1], \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $z(x)=\frac{1+\gamma}{\gamma}-x$, $(1+c)u_0(x)+v_0(x)\leqslant z(x),\not\equiv z(x)$.

本文主要考察系统 (1.2) 非负平衡态解的稳定性和 (1.2) 解的长时行为. 特别地, 讨论抑制剂对系统共存态和渐近行为的影响. 因此, 本文主要研究 (1.2) 的平衡态系统:

$$\begin{array}{l} du''+a(1-k)uf(z-(1+c)u-v,u)=0, \quad x\in(0,1),\\ dv''+bvg(z-(1+c)u-v,v)\mathrm{e}^{-\mu cu}=0, \quad x\in(0,1),\\ u'(0)=u'(1)+\gamma u(1)=0, \quad v'(0)=v'(1)+\gamma v(1)=0. \end{array} \tag{1.3}$$

下面给出本文的主要结果. 为此, 首先给出一些已知的结论和一些必要的记号. 设 λ_1, σ_1 分别为如下特征值问题的主特征值:

$$\begin{aligned} &d\varphi_1''+\lambda_1 f(z,0)\varphi_1=0, \quad x\in(0,1), \quad \varphi_1'(0)=\varphi_1'(1)+\gamma\varphi_1(1)=0,\\ &d\psi_1''+\sigma_1 g(z,0)\psi_1=0, \quad x\in(0,1), \quad \psi_1'(0)=\psi_1'(1)+\gamma\psi_1(1)=0.\end{aligned}$$

相应的正单位特征函数 φ_1,ψ_1 满足 $\max\limits_{[0,1]}\varphi_1=\max\limits_{[0,1]}\psi_1=1$. 参照文 [14] 易知, 若 $a\leqslant\frac{\lambda_1}{1-k}$, 则零是如下边值问题的唯一非负解:

$$du''+a(1-k)uf(z-u,(1-k)u)=0, \quad x\in(0,1), \quad u'(0)=u'(1)+\gamma u(1)=0, \tag{1.4}$$

若 $a>\frac{\lambda_1}{1-k}$, 则 (1.4) 存在唯一正解, 记为 ϑ, 而且 ϑ 具有以下 4 个性质: (i) $0<\vartheta<z$; (ii) ϑ 关于 a 在区间 $a\in(\frac{\lambda_1}{1-k},+\infty)$ 上连续可微且关于 a 逐点递增; (iii) $\lim\limits_{a\to\frac{\lambda_1}{1-k}}\vartheta=0$ 在 $x\in(0,1)$ 上一致成立, $\lim\limits_{a\to+\infty}\vartheta=z(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上几乎处处成立; (iv) 令 $L_a=d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+a(1-k)(f(z-\vartheta,(1-k)\vartheta)-\vartheta f_1'(z-\vartheta,(1-k)\vartheta)+(1-k)\vartheta f_2'(z-\vartheta,(1-k)\vartheta)$ 为 (1.4) 在 ϑ 处的线性化算子, 则 L_a 是 $C_B^2([0,1])=\{u\in C^2([0,1]):u'(0)=u'(1)+\gamma u(1)=0\}$ 上的可微算子, 且其所有特征值都小于零.

同理, 对另一单物种的平衡态问题

$$dv''+bvg(z-v,v)=0, \quad x\in(0,1), \quad v'(0)=v'(1)+\gamma v(1)=0$$

有类似的结果. 这里记其唯一正解为 θ, 记 θ 处的线性化算子为 $L_b=d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+b(g(z-\theta,\theta)-\theta g_1'(z-\theta,\theta)+\theta g_2'(z-\theta,\theta))$.

设 $\widehat{\lambda}_1$ 和 $\widehat{\sigma}_1(\mu)$ 分别为如下两个特征值问题的主特征值:

$$\begin{aligned} &d\widehat{\varphi}_1''+\widehat{\lambda}_1 f(z-\theta,0)\widehat{\varphi}_1=0, && x\in(0,1), \quad \widehat{\varphi}_1'(0)=\widehat{\varphi}_1'(1)+\gamma\widehat{\varphi}_1(1)=0;\\ &d\widehat{\psi}_1''+\widehat{\sigma}_1(\mu)g(z-\vartheta,0)\mathrm{e}^{-\mu k\vartheta}\widehat{\psi}_1=0, && x\in(0,1), \quad \widehat{\psi}_1'(0)=\widehat{\psi}_1'(1)+\gamma\widehat{\psi}_1(1)=0,\end{aligned}$$

相应的正单位特征函数 $\widehat{\varphi}_1,\widehat{\psi}_1$ 满足 $\max\limits_{[0,1]}\widehat{\varphi}_1=\max\limits_{[0,1]}\widehat{\psi}_1=1$. 易见, $\widehat{\sigma}_1(\mu)$ 关于参数 μ 连续, 并且当 $\mu\to+\infty$ 时, $\widehat{\sigma}_1(\mu)\to+\infty$.

定理 1.1　若 $a>\frac{\lambda_1}{1-k}$, $b>\sigma_1$ 且 $(a-\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})(b-\widehat{\sigma}_1(\mu))>0$, 则 (1.3) 存在正解. 特别地, 如果 $a>\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, $b>\widehat{\sigma}_1(\mu)$, 则 (1.3) 存在一个稳定的正解, 并且系统 (1.2) 一致持续.

本文采用正则摄动的方法研究抑制剂对系统 (1.2) 平衡态和长时行为的影响. 结果表明当 μ 充分大时, (1.3) 的任意正解 (u,v) 满足 $(\mu u,v)$ 趋于如下问题的正解:

$$\begin{aligned} &d\omega''+a(1-k)\omega f(z-v,0)=0, \quad x\in(0,1),\\ &dv''+bvg(z-v,v)\mathrm{e}^{-c\omega}=0, \quad x\in(0,1),\\ &\omega'(0)=\omega'(1)+\gamma\omega(1)=0, \quad v'(0)=v'(1)+\gamma v(1)=0,\end{aligned} \tag{1.5}$$

即当抑制剂的影响足够大时, (1.3) 的所有正解均由 (1.5) 决定. 因此通过详细研究问题 (1.5), 再根据正则摄动理论可得到如下结果. 它揭示了系统 (1.2) 的共存性和长时行为.

定理 1.2　(i) 设 $b>\sigma_1$ 固定, 则存在充分大的常数 $M>0$, 使得对任意 $a\geqslant\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},\mu\geqslant M$, (1.3) 没有正解. 特别地, 对任意 $a>\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, $\mu\geqslant M$, 半平凡的非负解 $((1-k)\vartheta,0)$ 为 (1.2) 的全局吸引子.

(ii) 设 $b>\sigma_1$ 固定, 则存在 $\epsilon_1>0$ 充分小和 $M_1>0$ 充分大 (均与 a 无关), 使得若 $\mu\geqslant M_1$, 则当 $a\in[\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_1,\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$ 时, (1.3) 仅有一个不稳定的正解.

(iii) 设 $b>\sigma_1$ 固定, 则对任意充分小的 $\epsilon>0$ 和任意 $a\in[\frac{\lambda_1}{1-k}+\epsilon,\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_1)$, 若 (1.5)

恰好存在 m 个正解且均非退化，则当 μ 充分大时， (1.3) 也恰好存在 m 个非退化且不稳定的正解.

注 1.1 设 $(u(\cdot,t),v(\cdot,t))$ 为 (1.2) 具有初始条件 $u(\cdot,0)=u_0$, $v(\cdot,0)=v_0$ 的解，则称 (1.2) 的平衡态解 (u_e,v_e) 为 (1.2) 的全局吸引子，如果它是稳定的，而且对任意非平凡的初始条件 $(u_0,v_0)\in C([0,1])\times C([0,1])$ 且 $u_0\geqslant 0, v_0\geqslant 0$, 均有 $\|u(\cdot,t)-u_e\|_{C^1}+\|v(\cdot,t)-v_e\|_{C^1}\to 0\ (t\to\infty)$.

2 共存解的存在性

本节利用单调动力系统理论研究一般情形下椭圆系统 (1.3) 共存解 (即正解) 的存在性以及抛物系统 (1.2) 的渐近性，从而给出定理 1.1 的证明. 为此，首先讨论 (1.3) 正解存在的必要条件和先验估计. 设 $\lambda_1(q(x))$ 为如下特征值问题的最小特征值:

$$d\phi''+\lambda q(x)\phi=0,\quad x\in(0,1),\quad \phi'(0)=\phi'(1)+\gamma\phi(1)=0,$$

其中 $q(x)\in C([0,1])$ 且 $q(x)>0\ (x\in[0,1])$, $d,\gamma>0$, 则 $\lambda_1(q)=\inf\limits_{\phi}\frac{d\gamma\phi^2(1)+\int_0^1 d\phi'^2\mathrm{d}x}{\int_0^1 q(x)\phi^2\mathrm{d}x}$ 是单重的，相应的特征函数 $\phi_1>0\ (x\in[0,1])$. 而且有比较定理：若 $q_1\geqslant q_2\ (x\in[0,1])$, 则 $\lambda_j(q_1)\leqslant\lambda_j(q_2)$, 并且若 $q_1(x)\not\equiv q_2(x)$, 则 $\lambda_j(q_1)<\lambda_j(q_2)$ (见 [15]).

引理 2.1 设 (u,v) 为 (1.3) 的非负解，并且 $u\not\equiv 0$, $v\not\equiv 0$, 那么 (i) $a>\frac{\lambda_1}{1-k}$, $b>\sigma_1$; (ii) $0<u\leqslant(1-k)\vartheta<z$, $0<v\leqslant\theta<z$, $x\in[0,1]$; (iii) $(1+c)u+v<z\ (x\in[0,1])$; (iv) 对于给定的 $b>\sigma_1$, 存在 $A_0=A_0(b)>\frac{\lambda_1}{1-k}$, 使得 $a<A_0$.

证 这里仅证明 (iv), (i)–(iii) 的证明类似于文 [14] 中的引理 4.1–4.2. 假设存在 $a_i\to\infty$, 使得当 $a=a_i$ 时， (1.3) 存在正解 (u_i,v_i), 则由 (ii) 可知， $0<u_i,v_i<z$. 再由 u_i,v_i 所满足的方程可得 $\{-du_i''\},\{-dv_i''\}$ 在 $L^\infty([0,1])$ 上有界. 因此，由椭圆方程正则化理论和嵌入定理，可假设存在 $\{u_i\},\{v_i\}$ 的子列 (仍记为 $\{u_i\},\{v_i\}$) 及函数 $u,v\in C_B^1([0,1])=\{u(x)\in C^1([0,1]):u'(0)=u'(1)+\gamma u(1)=0\}$, 使得在 C^1 中，有 $u_i\to u\geqslant 0$, $v_i\to v\geqslant 0$. 又根据 u_i 的方程可知， $a_i(1-k)=\lambda_1(f(z-(1+c)u_i-v_i,u_i))$. 由于 $a_i\to\infty$, 根据特征值的变分原理知，当 $i\to\infty$ 时，在区间 $[0,1]$ 上几乎处处有 $f(z-(1+c)u_i-v_i,u_i)\to 0$, 因此，在区间 $[0,1]$ 上几乎处处有 $(1+c)u_i+v_i\to z$. 令 $\widetilde{v}_i=\frac{v_i}{\|v_i\|_\infty}$, 由 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理，可假设存在 $\widetilde{v}\in C_B^1([0,1])$, 使得 $\|\widetilde{v}_i-\widetilde{v}\|_{C^1}\to 0$ 且 $\widetilde{v}\geqslant 0,\not\equiv 0$ 满足

$$d\widetilde{v}''+b\widetilde{v}g(0,v)\mathrm{e}^{-\mu cu}=0,\quad \widetilde{v}'(0)=\widetilde{v}'(1)+\gamma\widetilde{v}(1)=0,$$

这表明在区间 $[0,1]$ 上几乎处处有 $\widetilde{v}=0$. 又 $\widetilde{v}\in C_B^1([0,1])$, 因此 $\widetilde{v}\equiv 0$, 这与 $\|\widetilde{v}\|_\infty=1$ 矛盾，故存在 $A_0=A_0(b)>\frac{\lambda_1}{1-k}$, 使得 $a<A_0$.

引理 2.1 表明，如果 $a\leqslant\frac{\lambda_1}{1-k}$ 或 $b\leqslant\sigma_1$, 则 (1.3) 没有正解. 因此，下面主要关注 $a>\frac{\lambda_1}{1-k}$, $b>\sigma_1$ 的情形. 显然，如果 $a>\frac{\lambda_1}{1-k}$, $b>\sigma_1$, 则系统 (1.3) 存在两个半平凡的非负解 $((1-k)\vartheta,0)$ 和 $(0,\theta)$. 为此，首先给出半平凡的非负解 $((1-k)\vartheta,0)$ 和 $(0,\theta)$ 的稳定性，其证明参见文 [12] 的定理 4.1 和文 [5] 的引理 2.3.

引理 2.2 (i) 若 $a<\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, 则 (1.3) 的半平凡非负解 $(0,\theta)$ 稳定，若 $a>\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, 则它不稳定.

(ii) 若 $b<\widehat{\sigma}_1(\mu)$, 则 (1.3) 的半平凡非负解 $((1-k)\vartheta,0)$ 稳定，若 $b>\widehat{\sigma}_1(\mu)$, 则它不稳定.

下面借助单调系统理论证明定理 1.1. 此外，也可采用度理论证明，参见文 [6] 的定理 1.1.

定理 1.1 的证明　由于 $a > \frac{\lambda_1}{1-k}$ 且 $b > \sigma_1$, 所以 (1.3) 存在两个半平凡的非负解 $((1-k)\vartheta, 0)$ 和 $(0, \theta)$. 根据引理 2.2, 若 $(a - \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})(b - \widehat{\sigma}_1(\mu)) > 0$, 则要么这两个半平凡的非负解 $((1-k)\vartheta, 0)$ 和 $(0,\theta)$ 都稳定，要么它们都不稳定．再根据标准的单调系统理论可知，(1.3) 至少存在一个正解．而且如果 $a > \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, $b > \widehat{\sigma}_1(\mu)$, 则 (1.3) 至少存在一个稳定的正解．进一步地，类似于文 [16] 的定理 5, 可以证明，若 $a > \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, $b > \widehat{\sigma}_1(\mu)$, 则系统 (1.2) 是一致持续的.

3　抑制剂的作用

本节主要讨论当抑制剂的影响充分大时 (即参数 μ 充分大时), 平衡态问题 (1.3) 正解的稳定性以及抛物系统 (1.2) 的渐近行为．显然 $\widehat{\sigma}_1(\mu) \to \infty$ $(\mu \to \infty)$. 因此，对任意给定的 $b > \sigma_1$, 只要 μ 充分大，则必有 $b < \widehat{\sigma}_1(\mu)$, 从而半平凡的非负解 $((1-k)\vartheta, 0)$ 总稳定 (见引理 2.2). 下面证明当 μ 充分大时，若 $a > \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, 则 $((1-k)\vartheta, 0)$ 为系统 (1.2) 的全局吸引子；若 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-k}, \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$, 则两个半平凡的非负解是双稳定的，并且竞争排斥理论成立．为此，首先给出引理 3.1 和 3.2, 其证明参见文 [6].

引理 3.1　设 $b > \sigma_1$ 固定，则 (1.5) 存在正解当且仅当 $\frac{\lambda_1}{1-k} < a < \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, 而且 (1.5) 的所有正解均不稳定.

引理 3.2　设 $b > \sigma_1$ 固定，则存在 $\epsilon_0 > 0$ 充分小，使得如果 $\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k} - \epsilon_0 \leqslant a < \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, 则 (1.5) 存在唯一正解，且它不稳定.

下面证明 (1.3) 的所有正解均可由问题 (1.5) 决定．根据引理 2.1, 以下总假设 $b > \sigma_1$, $\frac{\lambda_1}{1-k} < a < A_0$.

引理 3.3　设 $a_i \to a \in (\frac{\lambda_1}{1-k}, A]$ ($A > \frac{\lambda_1}{1-k}$ 为任意常数), $\mu_i \to \infty$, (u_i, v_i) 为 (1.3) 当 $a = a_i$, $\mu = \mu_i$ 时的正解，则 $\|u_i\|_{C^1} \to 0$ $(i \to \infty)$. 而且若 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-k}, \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}]$, 则当 i 充分大时，$(\mu_i u_i, v_i)$ 以 C^1 范数趋于 (1.5) 的正解.

证　由引理 2.1 可知，$0 < u_i, v_i < z$. 再由 u_i, v_i 所满足的方程可得 $\|-du_i''\|_\infty$, $\|-dv_i''\|_\infty$ 有界．因此，根据椭圆方程正则化理论和嵌入定理，可假设存在 $\{u_i\}, \{v_i\}$ 的子列 (仍记为 $\{u_i\}, \{v_i\}$) 及函数 $u, v \in C_B^1([0,1]) = \{u(x) \in C^1([0,1]) : u'(0) = u'(1) + \gamma u(1) = 0\}$, 使得 $\|u_i - u\|_{C^1} \to 0$, $\|v_i - v\|_{C^1} \to 0$ $(i \to \infty)$ 且 $u \geqslant 0, v \geqslant 0$. 下面证明 $u \equiv 0$. 实际上，若 $u \geqslant 0$, $\not\equiv 0$, 则由强最大值原理，有 $u > 0$. 于是 $dv'' = 0$, $v'(0) = v'(1) + \gamma v(1) = 0$, 因此 $v \equiv 0$. 设 $\widetilde{v}_i = \frac{v_i}{\|v_i\|_\infty}$, 则

$$d\widetilde{v}_i'' + b\widetilde{v}_i g(z - (1+c)u_i - v_i, v_i)\mathrm{e}^{-\mu_i c u_i} = 0, \quad \widetilde{v}_i'(0) = \widetilde{v}_i'(1) + \gamma\widetilde{v}_i(1) = 0.$$

由 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理，可假设存在 $\widetilde{v} \in C_B^1([0,1])$, 使得 $\|\widetilde{v}_i - \widetilde{v}\|_{C^1} \to 0$, 并且 $\widetilde{v} \geqslant 0$, $\not\equiv 0$. 再根据强最大值原理，$\widetilde{v} > 0$, 并且 $\widetilde{v}$ 满足 $d\widetilde{v}'' = 0$, $\widetilde{v}'(0) = \widetilde{v}'(1) + \gamma\widetilde{v}(1) = 0$, 即 $\widetilde{v} \equiv 0$, 这与 $\|\widetilde{v}\|_\infty = \lim\limits_{i\to\infty} \|\widetilde{v}_i\|_\infty = 1$ 矛盾．因此 $u \equiv 0$, 即 $\|u_i\|_{C^1} \to 0$ $(i \to \infty)$.

下面采用反证法证明若 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-k}, \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}]$, 则当 i 充分大时，$(\mu_i u_i, v_i)$ 以 C^1 范数趋于 (1.5) 的正解．假设存在 $a_i \to a \in (\frac{\lambda_1}{1-k}, \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}]$, $\mu_i \to \infty$, 使得 (1.3) 在 $(a, \mu) = (a_i, \mu_i)$ 时有

正解 (u_i,v_i), 并且 $(\mu_i u_i,v_i)$ 不趋于 (1.5) 的任意正解, 则可以证明 $\mu_i\|u_i\|_\infty$ 一致有界. 实际上, 假设 $\mu_i\|u_i\|_\infty\to\infty$ $(i\to\infty)$, 则 $\widetilde{u}_i=\frac{u_i}{\|u_i\|_\infty}$ 满足

$$-d\widetilde{u}_i''=a_i(1-k)\widetilde{u}_i f(z-(1+c)u_i-v_i,u_i),\quad \widetilde{u}_i'(0)=\widetilde{u}_i'(1)+\gamma\widetilde{u}_i(1)=0.$$

由 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理, 可假设 $\|\widetilde{u}_i-\widetilde{u}\|_{C^1}\to 0$, 并且 $\widetilde{u}\geqslant 0,\ \not\equiv 0$ 满足

$$-d\widetilde{u}''=a(1-k)\widetilde{u}f(z-v,0),\quad \widetilde{u}'(0)=\widetilde{u}'(1)+\gamma\widetilde{u}(1)=0.$$

由于 $0<v_i<z$, 所以 $0\leqslant v\leqslant z$. 根据强最大值原理和 Hopf 边值引理可知, $\widetilde{u}>0$ $(x\in[0,1])$. 于是 $\mathrm{e}^{-\mu_i c u_i}=\mathrm{e}^{-c\mu_i\|u_i\|_\infty\widetilde{u}_i}\to 0$ $(i\to\infty)$. 再利用 v_i 的方程易见 $v_i\to 0$ 且 $\widetilde{v}_i=\frac{v_i}{\|v_i\|_\infty}\to\widetilde{v}\equiv 0$, 这与 $\|\widetilde{v}\|_\infty=\lim\limits_{i\to\infty}\|\widetilde{v}_i\|_\infty=1$ 矛盾. 因此 $\mu_i\|u_i\|_\infty\leqslant C$. 设 $\omega_i=\mu_i u_i$, 则

$$\begin{cases} d\omega_i''+a_i(1-k)\omega_i f(z-(1+c)u_i-v_i,u_i)=0,\\ dv_i''+bv_i g(z-(1+c)u_i-v_i,v_i)\mathrm{e}^{-c\omega_i}=0,\\ \omega_i'(0)=\omega_i'(1)+\gamma\omega_i(1)=0,\quad v_i'(0)=v_i'(1)+\gamma v_i(1)=0.\end{cases}\tag{3.1}$$

由于 $\mu_i\|u_i\|_\infty\leqslant C$, $0<v_i<z$, 根据标准的椭圆正则化理论和 Sobolev 嵌入定理, 可假设存在 $\omega,v\in C_B^1([0,1])$, 使得 $\|\omega_i-\omega\|_{C^1}+\|v_i-v\|_{C^1}\to 0$ $(i\to\infty)$. 在 (3.1) 中, 令 $i\to\infty$, 则 (ω,v) 满足方程组 (1.5), 即 (ω,v) 为 (1.5) 的非负解. 若 $\omega\geqslant 0,\ \not\equiv 0$, 则由强最大值原理, 有 $\omega>0$. 另一方面, 由 (1.5) 的第一个方程可得 $a(1-k)=\lambda_1(f(z-v,0))$, 这表明 $v\geqslant 0,\ \not\equiv 0$. 否则 $a=\frac{\lambda_1(f(z,0))}{1-k}=\frac{\lambda_1}{1-k}$, 矛盾. 再根据强最大值原理可知, $v>0$, 即 $(\mu_i u_i,v_i)$ 收敛到 (1.5) 的正解 (ω,v), 与假设矛盾. 因此 $\omega\equiv 0$. 于是 $v\equiv 0$ 或 $v=\theta$. 假设 $v_i\to v\equiv 0$, 则 $\widetilde{u}_i=\frac{u_i}{\|u_i\|_\infty}$ 满足

$$d\widetilde{u}_i''+a_i(1-k)\widetilde{u}_i f(z-(1+c)u_i-v_i,u_i)=0,\quad \widetilde{u}_i'(0)=\widetilde{u}_i'(1)+\gamma\widetilde{u}_i(1)=0.$$

由 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理, 可假设 $\|\widetilde{u}_i-\widetilde{u}\|_{C^1}\to 0$. 根据强最大值原理, $\widetilde{u}>0$ 且

$$d\widetilde{u}''+a(1-k)\widetilde{u}f(z,0)=0,\quad \widetilde{u}'(0)=\widetilde{u}'(1)+\gamma\widetilde{u}(1)=0,$$

从而 $a=\frac{\lambda_1}{1-k}$, 矛盾. 因此 $v_i\to\theta$. 类似地, 可以证明 $\|\widetilde{u}_i-\widetilde{u}\|_{C^1}\to 0$, 并且 $\widetilde{u}>0$ 满足

$$d\widetilde{u}''+a(1-k)\widetilde{u}f(z-\theta,0)=0,\quad \widetilde{u}'(0)=\widetilde{u}'(1)+\gamma\widetilde{u}(1)=0,$$

从而 $a=\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, 即 $(a_i,\omega_i,v_i)\to(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},0,\theta)$. 另一方面, 标准的局部分歧理论表明 (1.5) 存在发自 $(a,\omega,v)=(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},0,\theta)$ 的正解分支, 因此存在 $a=\widetilde{a}_i\to\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, 使得 (1.5) 当 $a=\widetilde{a}_i$ 时, 存在正解 $(\widetilde{\omega}_i,\widetilde{v}_i)$, 并且它以 L^∞ 范数收敛到 $(0,\theta)$. 于是当 i 充分大时, $(a_i,\mu_i u_i,v_i)$ 趋于 $(\widetilde{a}_i,\widetilde{\omega}_i,\widetilde{v}_i)$, 与假设矛盾.

引理 3.4 设 $b>\sigma_1$ 固定, 则存在 $M>0$ 充分大, 使得对任意 $a\geqslant\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, $\mu\geqslant M$, (1.3) 没有正解.

证 由引理 2.1 知, 如果 $a\geqslant A_0$, 则 (1.3) 没有正解. 因此, 只须证明 $A_0>\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$ 且 $\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}\leqslant a<A_0$ 时, (1.3) 没有正解.

假设存在 $\mu_i\to\infty$, $a_i\geqslant\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$ 且 $a_i\to a\in[\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},A_0]$, 使得 (1.3) 在 $(a,\mu)=(a_i,\mu_i)$ 时, 存在正解 (u_i,v_i), 则由引理 3.3 可知, $u_i\to 0$. 而且类似于引理 3.3, 可以证明 $\mu_i\|u_i\|_\infty$ 一致有界. 设 $\omega_i=\mu_i u_i$, 则 (ω_i,v_i) 满足 (3.1). 同理, 可假设存在 $\omega,v\in C_B^1([0,1])$, 使得 $\|\omega_i-\omega\|_{C^1}+\|v_i-v\|_{C^1}\to 0$ $(i\to\infty)$, 并且 (ω,v) 满足 (1.5), 即 (ω,v) 为 (1.5) 的非负解. 下面分以下两种情形讨论:

(i) $a\in(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},A_0]$. 此时可以证明 $\omega\equiv 0$. 反设 $\omega\geqslant 0,\ \not\equiv 0$, 则由强最大值原理, 有 $\omega>0$. 而根据 (1.5) 的第一个方程, 有 $a(1-k)=\lambda_1(f(z-v,0))$. 由于 $a>\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}>\frac{\lambda_1}{1-k}$, 所

以 $v \geqslant 0, \not\equiv 0$. 由强最大值原理, $v > 0$, 即 (ω, v) 为 (1.5) 的正解, 这与引理 3.1 矛盾. 因此 $\omega \equiv 0$, 从而, 类似于引理 3.3 可得 $v \equiv \theta$. 令 $\widetilde{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\|\omega_i\|_\infty}$, 则 $\widetilde{\omega}_i$ 满足

$$d\widetilde{\omega}_i'' + a_i(1-k)\widetilde{\omega}_i f(z-(1+c)u_i - v_i, u_i) = 0, \quad \widetilde{\omega}_i'(0) = \widetilde{\omega}_i'(1) + \gamma\widetilde{\omega}_i(1) = 0.$$

同理, 可假设 $\|\widetilde{\omega}_i - \widetilde{\omega}\|_{C^1} \to 0$, 并且 $\widetilde{\omega} > 0$ 满足

$$d\widetilde{\omega}'' + a(1-k)\widetilde{\omega} f(z-\theta, 0) = 0, \quad \widetilde{\omega}'(0) = \widetilde{\omega}'(1) + \gamma\widetilde{\omega}(1) = 0,$$

从而 $a = \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, 矛盾.

(ii) $a = \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$. 类似于 (i), 可以证明 $\|\mu_i u_i\|_{C^1} + \|v_i - \theta\|_{C^1} \to 0$ $(i \to \infty)$. 设 $Q_i = (1+c)u_i + v_i$, $\widetilde{u}_i = \frac{u_i}{\|u_i\|_\infty}$, 则 $Q_i \to \theta$, 并且 $\widetilde{u}_i$ 满足

$$d\widetilde{u}_i'' + a_i(1-k)\widetilde{u}_i f(z-(1+c)u_i - v_i, u_i) = 0, \quad \widetilde{u}_i'(0) = \widetilde{u}_i'(1) + \gamma\widetilde{u}_i(1) = 0.$$

由于 $a_i \to \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, 根据 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理, 可假设 $\|\widetilde{u}_i - \widetilde{u}\|_{C^1} \to 0$, 并且 $\widetilde{u} > 0$ 满足 $d\widetilde{u}'' + \widehat{\lambda}_1\widetilde{u} f(z-\theta, 0) = 0$, $\widetilde{u}'(0) = \widetilde{u}'(1) + \gamma\widetilde{u}(1) = 0$, 从而 $\widetilde{u} = \widehat{\varphi}_1$. 在 v_i 所满足的方程两端同乘 θ, 在 [0, 1] 上积分并利用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{(\theta - v_i)(\beta_2(z-Q_i) + k_2 + \beta_2 v_i)v_i\theta}{(k_2 + z - \theta + \beta_2\theta)(k_2 + z - Q_i + \beta_2 v_i)}\\ &= \int_0^1 \frac{(z-Q_i)(1-\mathrm{e}^{-\mu_i c u_i})}{k_2 + z - Q_i + \beta_2 v_i} v_i\theta + \int_0^1 \frac{(1+c)u_i(k_2 + \beta_2 v_i)v_i\theta}{(k_2 + z - \theta + \beta_2\theta)(k_2 + z - Q_i + \beta_2 v_i)}.\end{aligned}$$

上式两端同除 $\|u_i\|_\infty$, 并考虑到在 C^1 中有 $u_i \to 0$, $v_i \to \theta$, $Q_i = (1+c)u_i + v_i \to \theta < z$, $\widetilde{u}_i \to \widehat{\varphi}_1$, $\mu_i u_i \to 0$, 可得 $\frac{1-\mathrm{e}^{-\mu_i c u_i}}{\|u_i\|_\infty} = (c + O(\mu_i u_i))\mu_i\widetilde{u}_i \to +\infty$ $(i \to \infty)$, 并且

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{\frac{\theta - v_i}{\|u_i\|_\infty}(\beta_2(z-Q_i) + k_2 + \beta_2 v_i)v_i\theta}{(k_2 + z - \theta + \beta_2\theta)(k_2 + z - Q_i + \beta_2 v_i)}\\ &= \int_0^1 \frac{(z-Q_i)\frac{1-\mathrm{e}^{-\mu_i c u_i}}{\|u_i\|_\infty}}{k_2 + z - Q_i + \beta_2 v_i} v_i\theta + \int_0^1 \frac{(1+c)\widetilde{u}_i(k_2 + \beta_2 v_i)v_i\theta}{(k_2 + z - \theta + \beta_2\theta)(k_2 + z - Q_i + \beta_2 v_i)} \to +\infty.\end{aligned}$$

鉴于当 $i \to \infty$ 时, $\frac{(\beta_2(z-Q_i)+k_2+\beta_2 v_i)v_i\theta}{(k_2+z-\theta+\beta_2\theta)(k_2+z-Q_i+\beta_2 v_i)} \to \frac{(\beta_2(z-\theta)+k_2+\beta_2\theta)\theta^2}{(k_2+z-\theta+\beta_2\theta)^2} > 0$ $(\forall x \in [0,1])$, 并且 $v_i < \theta$ (见引理 2.1), 由积分中值定理, 必有 $\int_0^1 \frac{v_i - \theta}{\|u_i\|_\infty} \to -\infty$ $(i \to \infty)$.

另一方面, 在 u_i 所满足的方程两端同乘 $\widehat{\varphi}_1$, 在 [0, 1] 上积分并利用 Green 公式, 得

$$(a_i(1-k) - \widehat{\lambda}_1)\int_0^1 \frac{z - Q_i}{k_1 + z - Q_i + \beta_1 u_i} u_i\widehat{\varphi}_1 = \widehat{\lambda}_1\int_0^1 \frac{k_1(Q_i - \theta) + \beta_1 u_i(z-\theta)}{(k_1 + z - Q_i + \beta_1 u_i)(k_1 + z - \theta)} u_i\widehat{\varphi}_1.$$

上式两端同除 $\|u_i\|_\infty^2$, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{a_i(1-k) - \widehat{\lambda}_1}{\|u_i\|_\infty}\int_0^1 \frac{(z-Q_i)\widetilde{u}_i\widehat{\varphi}_1}{k_1 + z - Q_i + \beta_1 u_i}\\ &= \widehat{\lambda}_1 k_1\int_0^1 \frac{\frac{v_i - \theta}{\|u_i\|_\infty}\widetilde{u}_i\widehat{\varphi}_1}{(k_1 + z - Q_i + \beta_1 u_i)(k_1 + z - \theta)} + \widehat{\lambda}_1\int_0^1 \frac{(k_1(1+c) + \beta_1(z-\theta))\widetilde{u}_i^2\widehat{\varphi}_1}{(k_1 + z - Q_i + \beta_1 u_i)(k_1 + z - \theta)}.\end{aligned}$$

由于 $\frac{\widetilde{u}_i\widehat{\varphi}_1}{(k_1+z-Q_i+\beta_1 u_i)(k_1+z-\theta)} > 0$, $\frac{\widetilde{u}_i\widehat{\varphi}_1}{(k_1+z-Q_i+\beta_1 u_i)(k_1+z-\theta)} \to \frac{\widehat{\varphi}_1^2}{(k_1+z-\theta)^2} > 0$ $(\forall x \in [0,1])$ $(i \to \infty)$, 并且 $v_i < \theta$, 根据积分中值定理必有 $\int_0^1 \frac{\frac{v_i-\theta}{\|u_i\|_\infty}\widetilde{u}_i\widehat{\varphi}_1}{(k_1+z-Q_i+\beta_1 u_i)(k_1+z-\theta)} \to -\infty$ $(i \to \infty)$. 因此当 i 充分大时, 有 $a_i(1-k) - \widehat{\lambda}_1 < 0$, 这与假设 $a_i \geqslant \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$ 矛盾.

定理 3.1　设 $b > \sigma_1$ 固定, 则存在 $M > 0$ 充分大, 使得对任意 $a > \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, $\mu \geqslant M$, 半平凡的非负解 $((1-k)\vartheta, 0)$ 为系统 (1.2) 的全局吸引子.

证 只须验证当 $a > \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$ 且 $\mu \geqslant M$ 充分大时，以下结论成立.

(i) $((1-k)\vartheta, 0)$ 稳定. 由于当 μ 充分大时有 $b < \widehat{\sigma}_1(\mu)$, 所以由引理 2.2 知此结论成立.

(ii) $(0, \theta)$ 不稳定. 由于 $a > \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, 因此根据引理 2.2 可知此结论成立.

(iii) (1.2) 没有正平衡态解. 证明见引理 3.4.

由于 (1.2) 为单调系统，所以结论 (i)–(iii) 表明 $((1-k)\vartheta, 0)$ 为 (1.2) 的全局吸引子 (见文 [17]).

显然，对固定的 $b > \sigma_1$, 如果 μ 充分大，则 $b < \widehat{\sigma}_1(\mu)$. 因此，根据定理 1.1 可断言，当 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-k}, \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$, $b > \sigma_1$ 且 μ 充分大时， (1.3) 至少存在一个正解. 另一方面，由引理 3.3, (1.3) 的任意正解 (u, v) 满足：当 μ 充分大时， $(\mu u, v)$ 趋于 (1.5) 的正解. 下面证明 (1.3) 的所有正解均由极限问题 (1.5) 决定.

设 $X = C([0,1]) \times C([0,1])$, $W = \{(u,v) \in X \mid u(x) \geqslant 0, v(x) \geqslant 0, x \in [0,1]\}$, 则 W 为 X 的锥. 对于 $K > 0$ 充分大，定义算子 $B: X \to X$ 为

$$B(\omega, v) = \Big(-d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + K\Big)^{-1}(a(1-k)\omega f(z-v, 0) + K\omega, bvg(z-v, v)\mathrm{e}^{-c\omega} + Kv),$$

其中 $\big(-d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + K\big)^{-1}$ 为算子 $-d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + K$ 在边界条件 $u'(0) = u'(1) + \gamma u(1) = 0$ 下的逆算子.

引理 3.5 设 $a_0 \in (\frac{\lambda_1}{1-k}, \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$, (ω_0, v_0) 为 (1.5) 在 $a = a_0$ 时的孤立正解, 并且 (ω_0, v_0) 具有非零的不动点指标，即 $\mathrm{index}_W(B, (\omega_0, v_0)) \neq 0$, 则对任意 $\delta > 0$ 充分小，存在 $\epsilon > 0$, 使得对任意 a, μ, 满足 $|a - a_0| < \epsilon$, $\mu > \frac{1}{\epsilon}$, (1.3) 至少存在正解 (u, v), 使得 $\|\mu u - \omega_0\|_{C^1} + \|v - v_0\|_{C^1} < \delta$. 而且如果 (ω_0, v_0) 非退化, 则 (1.3) 存在唯一正解, 并且它非退化不稳定.

证 考虑如下同伦：

$$\begin{cases} d\widehat{u}'' + a(1-k)\widehat{u}f(z - t(1+c)\mu^{-1}\widehat{u} - v, \mu^{-1}\widehat{u}) = 0, \\ dv'' + bvg(z - t(1+c)\mu^{-1}\widehat{u} - v, v)\mathrm{e}^{-c\widehat{u}} = 0, \\ \widehat{u}'(0) = \widehat{u}'(1) + \gamma\widehat{u}(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) + \gamma v(1) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $t \in [0,1]$. 由于 (ω_0, v_0) 为 (1.5) 的孤立正解，所以存在 $\delta_0 > 0$ 充分小，使得 (1.5) 的满足 $\|\omega - \omega_0\|_{C^1} + \|v - v_0\|_{C^1} < \delta_0$ 的任意正解 (ω, v) 必为 (ω_0, v_0). 下面证明对任意 $\delta \in (0, \delta_0)$, 存在 $\epsilon > 0$, 使得如果 $|a - a_0| < \epsilon$ 且 $\mu > \frac{1}{\epsilon}$, 则对任意 $t \in [0,1]$, (3.2) 在 $\partial U_\delta(\omega_0, v_0)$ 上无解，其中 $U_\delta(\omega_0, v_0)$ 为 (ω_0, v_0) 在 X 内的 δ 邻域.

假设存在 $\delta \in (0, \delta_0)$, $a_i \to a_0$, $\mu_i \to \infty$, $t_i \in [0,1]$ 及 (3.2) 在 $a = a_i$, $\mu = \mu_i$, $t = t_i$ 时的解 $(\widehat{u}_i, v_i)$, 使得 $(\widehat{u}_i, v_i) \in \partial U_\delta(\omega_0, v_0)$, 即 $\|\widehat{u}_i - \omega_0\|_{C^1} + \|v_i - v_0\|_{C^1} = \delta$, 则可假设 $t_i \to t \in [0,1]$, δ_0 充分小，使得 $(\widehat{u}_i, v_i)$ 为正解. 由于 $\{\widehat{u}_i\}$ 和 $\{v_i\}$ 在 $L^\infty([0,1])$ 中有界，利用 (3.2) 及椭圆正则化理论，可假设 $\|\widehat{u}_i - \widehat{u}\|_{C^1} \to 0$, $\|v_i - v\|_{C^1} \to 0$. 易见， $(\widehat{u}, v)$ 为 (1.5) 在 $a = a_0$ 时的解. 而且 $\|\widehat{u} - \omega_0\|_{C^1} + \|v - v_0\|_{C^1} = \delta < \delta_0$, 这与 δ_0 的选取矛盾. 从而对任意 $t \in [0,1]$, (3.2) 在 $\partial U_\delta(\omega_0, v_0)$ 上无解.

定义 $\mathcal{A}_t: X \times [0,1] \to X$ 为

$$\mathcal{A}_t(\widehat{u}, v) = \Big(-d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + K\Big)^{-1}\begin{pmatrix} a(1-k)\widehat{u}f(z - t(1+c)\mu^{-1}\widehat{u} - v, \mu^{-1}\widehat{u}) + K\widehat{u} \\ bvg(z - t(1+c)\mu^{-1}\widehat{u} - v, v)\mathrm{e}^{-c\widehat{u}} + Kv \end{pmatrix},$$

其中$(-d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + K)^{-1}$为$-d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + K$在边界条件$u'(0) = u'(1) + \gamma u(1) = 0$下的逆算子, K 充分大, 使得对任意 $(\widehat{u}, v) \in U_\delta(\omega_0, v_0)$, $t \in [0,1]$ 均有 $a(1-k)f(z - t(1+c)\mu^{-1}\widehat{u} - v, \mu^{-1}\widehat{u}) + K > 0$, $bg(z - t(1+c)\mu^{-1}\widehat{u} - v, v)\mathrm{e}^{-c\widehat{u}} + K > 0$. 由拓扑度的同伦不变性可得，如果 $|a - a_0| < \epsilon$,

$\mu > \frac{1}{\epsilon}$, 则 $\deg_X(I-\mathcal{A}_1, U_\delta(\omega_0,v_0),0) = \deg_X(I-\mathcal{A}_0, U_\delta(\omega_0,v_0),0)$. 又 $\mathcal{A}_0 = B$, 因此，如果选取 ϵ 适当小，使得 $|a-a_0|<\epsilon$ 且 $\mu > \frac{1}{\epsilon}$, 则

$$\deg_X(I-\mathcal{A}_1, U_\delta(\omega_0,v_0),0) = \deg_X(I-B, U_\delta(\omega_0,v_0),0) = \mathrm{index}_W(B,(\omega_0,v_0)) \neq 0.$$

这表明 $\mathcal{A}_1$ 在 $U_\delta(\omega_0,v_0)$ 内至少存在一个不动点 $(\widehat{u},v)$, 即 (1.3) 在 (ω_0,v_0) 附近至少存在一个正解 $(\mu^{-1}\widehat{u},v)$.

进一步地，如果 (ω_0,v_0) 非退化，则易验证 (ω_0,v_0) 为

$$\begin{cases} d\widehat{u}'' + a(1-k)\widehat{u}f(z-(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}-v, \mu^{-1}\widehat{u}) = 0, \\ dv'' + bvg(z-(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}-v, v)\mathrm{e}^{-c\widehat{u}} = 0, \\ \widehat{u}'(0) = \widehat{u}'(1)+\gamma\widehat{u}(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1)+\gamma v(1) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

在 $(a,\mu^{-1}) = (a_0,0)$ 时的非退化正解. 由隐函数定理，存在 $\epsilon > 0$ 充分小，使得如果 $|a-a_0|<\epsilon$ 且 $\mu > \frac{1}{\epsilon}$, 则 (3.3) 存在唯一解 $(\widehat{u},v)$, 并且它满足 $\|\widehat{u}-\omega_0\|_{C^1} + \|v-v_0\|_{C^1} < \epsilon$, 即唯一性成立.

下面采用线性算子扰动理论证明 (1.3) 的这个局部唯一的正解 $(\mu^{-1}\widehat{u},v)$ 是非退化不稳定的. 设 $\mathcal{A}_1'(\widehat{u},v)$, $B'(\omega_0,v_0)$ 分别为 $\mathcal{A}_1$, B 在 $(a,\mu^{-1},\widehat{u},v)$ 和 (a_0,ω_0,v_0) 的线性化算子，则

$$\mathcal{A}_1'(\widehat{u},v)(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} d\varphi'' + a(1-k)(f(z-(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}-v,\mu^{-1}\widehat{u}) \\ -(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}f_1'(z-(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}-v,\mu^{-1}\widehat{u}) \\ +\mu^{-1}\widehat{u}f_2'(z-(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}-v,\mu^{-1}\widehat{u}))\varphi \\ -a(1-k)\widehat{u}f_1'(z-(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}-v,\mu^{-1}\widehat{u})\psi, \\ d\psi'' + b(g(z-(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}-v,v) \\ -vg_1'(z-(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}-v,v) + vg_2'(z-(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}-v,v))\mathrm{e}^{-c\widehat{u}}\psi \\ -bv((1+c)\mu^{-1}g_1'(z-(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}-v,v) \\ +cg(z-(1+c)\mu^{-1}\widehat{u}-v,v))\mathrm{e}^{-c\widehat{u}}\varphi \end{pmatrix},$$

$$B'(\omega_0,v_0)(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} d\varphi'' + a_0(1-k)f(z-v_0,0)\varphi - a_0(1-k)\omega_0 f_1'(z-v_0,0)\psi, \\ d\psi'' + b(g(z-v_0,v_0) - v_0 g_1'(z-v_0,v_0) + v_0 g_2'(z-v_0,v_0))\mathrm{e}^{-c\omega_0}\psi \\ -bcv_0 g(z-v_0,v_0)\mathrm{e}^{-c\omega_0}\varphi \end{pmatrix}.$$

易见，当 $(a,\mu^{-1},\widehat{u},v)$ 靠近 $(a_0,0,\omega_0,v_0)$ 时，算子 $\mathcal{A}_1'(\widehat{u},v)$ 为算子 $B'(\omega_0,v_0)$ 的小扰动. 由于 (ω_0,v_0) 是非退化的，所以 0 属于 $B'(\omega_0,v_0)$ 的预解集. 因此 0 也属于 $\mathcal{A}_1'(\widehat{u},v)$ 的预解集，即 $(\mu^{-1}\widehat{u},v)$ 是非退化的.

为证明 $(\mu^{-1}\widehat{u},v)$ 的不稳定性，考虑特征值问题

$$\begin{aligned} &B'(\omega_0,v_0)(\varphi,\psi) + \eta(\varphi,\psi) = 0, \\ &\varphi'(0) = \varphi'(1)+\gamma\varphi(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1)+\gamma\psi(1) = 0. \end{aligned}$$

显然，上述特征值问题的第一特征值 η_0 是简单的，实的且 $\eta_0 < 0$ (见引理 3.1). 因此，由扰动理论，特征值问题

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_1'(\widehat{u},v)(\varphi,\psi) + \eta(\varphi,\psi) = 0, \\ &\varphi'(0) = \varphi'(1)+\gamma\varphi(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1)+\gamma\psi(1) = 0 \end{aligned}$$

也存在一个简单的特征值 η, 它满足： η 趋于 η_0, 且 $\mathrm{Re}\,\eta < 0$. 这表明 $(\mu^{-1}\widehat{u},v)$ 不稳定.

定理 3.2　设 $b > \sigma_1$, 则存在 $\epsilon_1 > 0$ 充分小， $M_1 > 0$ 充分大， ϵ_1, M_1 都不依赖于 a, 使得如果 $\mu \geqslant M_1$, 则对于 $a \in [\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_1, \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$, (1.3) 存在唯一正解，且它不稳定. 对任意 $\epsilon > 0$ 充分小， $a \in [\frac{\lambda_1}{1-k}+\epsilon, \frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_1)$, 如果 (1.5) 恰好存在 m 个非退化正解，则当 μ 充分大时， (1.3) 也恰好存在 m 个非退化不稳定的正解.

证 首先，由引理 3.3 和引理 3.5 易知，当 $a\in[\frac{\lambda_1}{1-k}+\epsilon,\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_1)$ 时，如果 (1.5) 恰好存在 m 个非退化正解，则当 μ 充分大时， (1.3) 也恰好存在 m 个非退化不稳定的正解．下面证明，如果 $\mu\geqslant M_1$, 则对于 $a\in[\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_1,\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$, (1.3) 存在唯一正解，并且它不稳定.

由引理 3.3 知，当 μ 充分大时， (1.3) 的任意正解 (u,v) 满足： $(\mu u,v)$ 趋于 (1.5) 的正解．另一方面，局部分歧理论 (见引理 3.2) 表明 $(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},0,\theta)$ 为 (1.5) 的简单分歧点．因而存在 $\epsilon_0>0$ 充分小，使得对于 $a\in(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_0,\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$, (1.5) 存在唯一正解 (ω,v). 因此为证明唯一性，只须证明存在 $\epsilon_1>0$ 充分小， $M_1>0$ 充分大，使得对 $a\in[\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_1,\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$, $\mu\geqslant M_1$, 存在唯一的 $(\mu u,v)$ 趋于 (1.5) 的唯一正解 (ω,v). 设 $\widehat{u}=\mu u$, $\xi=\frac{1}{\mu}$, 考虑问题

$$\begin{aligned}&d\widehat{u}''+a(1-k)\widehat{u}f(z-(1+c)\xi\widehat{u}-v,\xi\widehat{u})=0,\quad x\in(0,1),\\&dv''+bvg(z-(1+c)\xi\widehat{u}-v,v)\mathrm{e}^{-c\widehat{u}}=0,\quad x\in(0,1),\\&\widehat{u}'(0)=\widehat{u}'(1)+\gamma\widehat{u}(1)=0,\quad v'(0)=v'(1)+\gamma v(1)=0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

显然 (u,v) 为 (1.3) 的解当且仅当 $(\mu u,v)$ 为 (3.4) 在 $\xi=\frac{1}{\mu}$ 时的解．因此只须证明 (3.4) 存在唯一正解．对固定的 $\xi\geqslant0$, 易验证 $(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},0,\theta)$ 为 (3.4) 的简单分歧点．类似于文 [18] 的定理 1 可得，存在 $\delta>0$ 及 C^1 曲线

$$\Gamma_\xi=\{(a(\xi,s),\widehat{u}(\xi,s),v(\xi,s)):0<s<\delta\},\quad 0\leqslant\xi\leqslant\delta$$

满足 $(a(0,0),\widehat{u}(0,0),v(0,0))=(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},0,\theta)$, 使得如果 $0\leqslant\xi\leqslant\delta$, 则 (3.4) 在点 $(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},0,\theta)$ 附近的所有正解均在 Γ_ξ 上．因此只须证明这些曲线一致地覆盖区间 $[\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_1,\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$, 而且对给定的 ξ, Γ_ξ 覆盖这个区间仅一次．由于 $\chi_1=L_b^{-1}(bc\theta g(z-\theta,\theta)\widehat{\varphi}_1)<0$, 根据基本的分歧理论，可得

$$\frac{\partial a}{\partial s}(0,0)=\frac{\widehat{\lambda}_1\int_0^1\widehat{\varphi}_1^2f_1'(z-\theta,0)\chi_1}{(1-k)\int_0^1\widehat{\varphi}_1^2f(z-\theta,0)}<0,$$

其中 L_b 由注 1.1 给出．由连续性，存在 $\delta_1\in(0,\delta)$, 使得对 $0\leqslant\xi$, $s\leqslant\delta_1$, $\frac{\partial a}{\partial s}(\xi,s)<0$. 因此 $\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-a(0,\delta_1)=a(0,0)-a(0,\delta_1)>0$. 再根据连续性，可以找到 $\delta_2\in(0,\delta_1)$, 使得

$$\epsilon_1=\inf\Big\{\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-a(\xi,\delta_1):0\leqslant\xi\leqslant\delta_2\Big\}>0.$$

从而，如果 $a\geqslant\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_1$, 则对任意 $\xi\in[0,\delta_2]$, $a(\xi,\delta_1)\leqslant a$. 这表明对任意 $\xi\in[0,\delta_2]$, Γ_ξ 覆盖了区间 $[\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_1,\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$. 而且由于对 $0\leqslant\xi$, $s\leqslant\delta_2$, $\frac{\partial a}{\partial s}(\xi,s)<0$, 所以每条曲线覆盖这个区间仅一次．选取 $M_1=\frac{1}{\delta_2}$, 则对于 $\mu\geqslant M_1$, $\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\epsilon_1\leqslant a\leqslant\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}$, (1.3) 恰好存在一个正解.

下面证明 (1.3) 的这个唯一正解是不稳定的．通过简单的计算可知， η 为 (1.3) 在 (u,v) 处的线性化算子的特征值 (相应的特征函数记为 (φ,ψ)) 当且仅当它是 (3.4) $(\xi=\frac{1}{\mu})$ 在 $(\mu u,v)$ 处的线性化算子的特征值 (相应的特征函数为 $(\mu\varphi,\psi)$). 因此，只须证明 (3.4) 的线性化算子在分歧曲线 Γ_ξ 上的每点都存在小于零的特征值．由文 [18] 的引理 1.3 可得，存在 $\tau>0$ 及 C^1 函数 $\gamma:(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}-\tau,\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k}+\tau)\times(-\tau,\tau)\to R^1$; $\beta:(-\tau,\tau)\times(-\tau,\tau)\to R^1$, 使得 $\gamma(a,\xi)$ 为 (3.4) 在 $(a,0,\theta)$ 处的线性化问题的简单特征值， $\beta(s,\xi)$ 为 (3.4) 在 $(a,u,v)=(a(\xi,s),\widehat{u}(\xi,s),v(\xi,s))$ 处的线性化问题的简单特征值，其中 $0\leqslant\xi,s\leqslant\tau$. 而且 $\gamma(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},\xi)=\beta(0,\xi)=0$. 实际上，易验证 $\gamma(a,\xi)$ 为

$$d\phi''+a(1-k)\phi f(z-\theta,0)=-\gamma(a,\xi)\phi,\quad \phi'(0)=\phi'(1)+\gamma\phi(1)=0$$

的简单特征值. 根据 $\gamma(a,\xi)$ 的单调性和连续可微性可知，$\frac{\partial\gamma}{\partial a}(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},\epsilon)<0$. 由文 [18] 的定理 1.16 知，对于 $0\leqslant s\ll 1$, $\beta(s,0)$ 和 $-s\frac{\partial a}{\partial s}(0,s)\frac{\partial\gamma}{\partial a}(\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k},0)$ 有相同的符号．于是 $\beta(s,0)<0$. 由函数 β 的连续性，可选取 δ_2 充分小，使得对所有 $0\leqslant s,\xi\leqslant\delta_2$, $\beta(s,\xi)<0$, 从而 (1.3) 的唯一正解是不稳定的.

注 3.1　由引理 3.4, 定理 3.1, 引理 3.5 和定理 3.2 知，定理 1.2 成立.

注 3.2　由引理 3.1, 引理 3.5 和定理 3.2 可知，对于 $a\in[\frac{\lambda_1}{1-k}+\epsilon,\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$, μ 充分大，(1.3) 的所有正解可能都是不稳定的．此时，根据引理 2.2, 半平凡非负解 $((1-k)\vartheta,0)$ 和 $(0,\theta)$ 均渐近稳定．因此当 $a\in[\frac{\lambda_1}{1-k}+\epsilon,\frac{\widehat{\lambda}_1}{1-k})$ 且 μ 充分大时，(1.3) 至少存在一个不稳定的正解．而且关于边界上的双稳定吸引子的生物解释是竞争排斥理论成立，获胜者由它们的初始条件决定.

参　考　文　献

[1] Smith H. L. and Waltman P., The Theory of the Chemostat [M], Cambridge (UK): Cambridge University Press, 1995.

[2] Chao L. and Levin B. R., Structured habitats and the evolution of anti-competitor toxins in bacteria [J], *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1981, 75:6324–6328.

[3] Levin B. R., Frequency-dependent selection in bacterial populations [J], *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1988, 319:459–472.

[4] Hsu S. B. and Waltman P., A survey of mathematical models of competition with an inhibitor [J], *Math. Biosci.*, 2004, 187:53–97.

[5] Nie H. and Wu J. H., Asymptotic behavior of an unstirred chemostat model with internal inhibitor [J], *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, 334:889–908.

[6] Wu J. H., Nie H. and Wolkowicz G. S. K., The effect of inhibitor on the plasmid-bearing and plasmid-free chemostat model [J], *SIAM J. Math. Anal.*, 2007, 38:1860–1885.

[7] Beddington J. R., Mutual interference between parasites and its effect on searching efficiency [J], *J. Animal. Ecol.*, 1975, 44:331–340.

[8] DeAngelis D. L., Goldstein R. A. and O'Neill R. V., A model for trophic interaction [J], *Ecology*, 1975, 56:661–892.

[9] Harrision G. W., Comparing predator-prey models to Luckinbill's experiment with didinium and paramecium [J], *Ecology*, 1995, 76:357–369.

[10] Qui Z., Yu J. and Zou Y., The asymptotic behavior of a chemostat model with the Beddington-DeAngelis functional response [J], *Mathematical Biosciences*, 2004, 187:175–187.

[11] Zhang S., Tan D. and Chen L., Chaotic behavior of a chemostat model with Beddington-DeAngelis functional response and periodically impulsive invasion [J], *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 29:474–482.

[12] Nie H. and Wu J. H., A system of reaction-diffusion equations in the unstirred chemostat with an inhibitor [J], *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, 16(4):989–1009.

[13] Lenski R. E. and Hattingh S., Coexistence of two competitors on one resource and one inhibitor: a chemostat model based on bacteria and antibiotics [J], *J. Theoret. Biol.*, 1986, 122:83–93.

[14] Wu J. H., Global bifurcation of coexistence state for the competition model in the chemostat [J], *Nonlinear Analysis TMA*, 2000, 39:817–835.

[15] Figueiredo D. G. and Gossez J. P., Strict monotonicity of eigenvalues and unique continuation [J], *Comm. Partial Differential Equations*, 1992, 17:339–346.

[16] Wu J. H., Nie H. and Wolkowicz G. S. K., A mathematical model of competition for two essential resources in the unstirred chemostat [J], *SIAM J. Appl. Math.*, 2004, 65:209–229.

[17] Hess P., Periodic Parabolic Boundary Value Problems and Positivity [M], Harlow (UK): Longman Scientific and Technical, 1991.

[18] Crandall M. G. and Rabinowitz P. H., Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability [J], *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1973, 52:161–180.

Coexistence of an Unstirred Chemostat Model with an Inhibitor

NIE Hua* WU Jianhua* XIE Wenhao**

*College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China. E-mail: niehua@snnu.edu.cn; wjhua@snnu.edu.cn
**School of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China. E-mail: muxiangshu@yahoo.com.cn

Abstract An unstirred chemostat model with inhibitor and Beddington-DeAngelis functional response is discussed. The existence of positive steady-state solutions is given by monotone system theory. The effects of the inhibitor are considered by making use of the degree theory, bifurcation theory and perturbation technique. It turns out that if the parameter μ, which measures the effect of the inhibitor, is sufficiently large, either this model has no coexistence solution and a semitrivial global attractor, or all positive solutions of this model are governed by a limit problem.

Keywords Chemostat, Beddington-DeAngelis functional response, Coexistence solution, Stability, Perturbation theory
2000 MR Subject Classification 35K57