数 学 年 刊
2009,30A(6):839–844

非交换群上一类代数的不可约表示

吴 美 云*

提要 在一类无限维非交换 Hopf 代数上，借助其 Hopf 理想，构造出商 Hopf 代数，讨论了此商代数上的有限维不可约模，得出此非平凡不可约模的维数一定是 2.

关键词 非交换， Hopf 代数，不可约模
MR (2000) 主题分类 16W30, 16G10
中图法分类 O153.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2009)06-0839-06

1 引 言

由 Drinfeld, Jimbo 和其他一些数学家开创的量子群理论是数学和物理相融合的产物，也是过去三十年中数学物理发展的重大成就之一. 量子群理论起源于量子逆散射方法，特别是量子 Yang-Baxter 方程的研究. 它与众多的其它数学分支有着紧密的联系. 按 Drinfeld 的定义，量子群就是拟三角 Hopf 代数. 量子群理论的发展促进了其它数学分支，如 Hopf 代数和表示论等的飞速发展，使得它们的研究内容相互渗透、相互融合. 1972 年， Taft 从组合论的角度构造了一类 Pointed Hopf 代数.

由于量子群理论的飞速发展，出现了 Hopf 代数的许多构造方法和实例，因此有限量子群或有限维 Hopf 代数的分类逐渐成为该领域的主要研究课题之一. 在文 [1] 中，我们借助于 quiver, 构造了大量的 Pointed Hopf 代数. 这些 Hopf 代数上的表示如何刻画？如果解决了此问题，可为探讨有限维 Hopf 代数的分类提供依据. 这正是本文的意图所在.

2 主要结论

文中恒设 F 为代数闭域，并且 $\mathrm{char}(F)=0$, 代数、余代数、张量积均在此域 F 上讨论，文中所用概念及符号见文 [2, 3]. 设 $q\in F$, n 为奇数且 $n>2$, 定义

$$(n)_q=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1},$$

$$(n)_q!=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)}{(q-1)^n},$$

$$\binom{n}{t}_q=\frac{(n)!_q}{(t)!_q(n-t)!_q},$$

规定 $\binom{n}{0}_q=1=\binom{n}{n}_q$ (见 [4]). 本文恒设 q 为 1 的本原 n 次根. 则当 $0<t<n$ 时, $(n-t)!_q\neq 0$, $(t)!_q\neq 0$, $\binom{n}{t}_q=0$.

由于在文 [1] 以及文 [5] 中，将其讨论范围限制在上述条件下不改变其结论，故对于文 [1] 中的推论 2.1, 如果令 $k=m=1$, 则此推论改述为

本文 2008 年 8 月 6 日收到， 2009 年 3 月 1 日收到修改稿.
*南通大学理学院，江苏 南通 226007. E-mail: ntwmy2005@yahoo.com.cn

引理 2.1 Hopf 路余代数 $FQ^c(\alpha^{\chi_1})$ 的子 Hopf 代数 $FG[FQ_1;\alpha^{\chi_1}]$ 作为代数的生成元是 $a,b,x_1=a_{1,1}^{(1)}$. 生成关系为 $a^3=b^2=1$, $ab=ba^2$, $x_1a=ax_1$, $x_1b=-bx_1$. 余代数结构为 a,b 是群样元,

$$\Delta(x_1)=1\otimes x_1+x_1\otimes 1,\quad \varepsilon(x_1)=0,\quad S(x_1)=-x_1.$$

此为无限维非交换代数. 我们记 $x=x_1$.

引理 2.2 设 T 是由 a^3-1,b^2-1,x^n 生成的 $FG[FQ_1;\alpha^{\chi_1}]$ 的理想, 则 T 是 $FG[FQ_1;\alpha^{\chi_1}]$ 的一个 Hopf 理想, 记 $H=FG[FQ_1;\alpha^{\chi_1}]/T$, 则 H 为 Hopf 代数.

证 由于 $\Delta(x)=1\otimes x+x\otimes 1$, 所以

$$\begin{aligned}\Delta(x^n)&=(\Delta(x))^n=(1\otimes x+x\otimes 1)^n\\&=\sum_{0\leqslant t\leqslant n}\binom{n}{t}_q x^{n-t}\otimes x^t=x^n\otimes 1+1\otimes x^n\\&\in T\otimes FG[FQ_1;\alpha^{\chi_1}]+FG[FQ_1;\alpha^{\chi_1}]\otimes T,\\ \varepsilon(x^n)&=(\varepsilon(x))^n=0,\\ S(x^n)&=(S(x))^n=(-x)^n=(-1)nx^n\in T,\end{aligned}$$

故 T 是 $FG[FQ_1;\alpha^{\chi_1}]$ 的一个 Hopf 理想, H 成为 Hopf 代数.

命题 2.1 设方阵 A,B 可交换, 若 A 可对角化, B 相似于非对角阵的若当标准型, 则存在可逆方阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 并且 $P^{-1}BP$ 为若当标准型.

证 由于 A 可对角化, 故存在可逆方阵 P_1, 使得

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1I_{n_1}&&&\\&\lambda_2I_{n_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_sI_{n_s}\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 互异. 由 $AB=BA$ 可知 $P_1^{-1}AP_1P_1^{-1}BP_1=P_1^{-1}BP_1P_1^{-1}AP_1$, 即 $P_1^{-1}BP_1$ 与对角阵 $P_1^{-1}AP_1$ 可交换, 则 $P_1^{-1}BP_1$ 为准对角阵 (见 [6]). 记 $P_1^{-1}BP_1=C$, 则

$$C=\begin{pmatrix}C_1I_{n_1}&&&\\&C_2I_{n_2}&&\\&&\ddots&\\&&&C_sI_{n_s}\end{pmatrix},$$

其中 C_i 为 n_i 阶方阵. 由 B 相似于非对角阵的若当标准型知, 存在 $Q_i,i=1,2,\cdots,s$, 使得 $Q_i^{-1}C_iQ_i$ 为 n_i 级若当标准型. 记

$$P_2=\begin{pmatrix}Q_1&&&\\&Q_2&&\\&&\ddots&\\&&&Q_s\end{pmatrix},$$

取 $P=P_1P_2$, 则 $P^{-1}AP=P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2$ 为对角阵, $P^{-1}BP=P_2^{-1}P_1^{-1}BP_1P_2$ 为若当标准型.

引理 2.3　设 $\phi: H \to \mathrm{End}\, V$ 是一个有限维表示, 则存在 V 的一组基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_l\}$, 使得每个 v_t 是 $\phi(a)$ 的特征向量, $\phi(a)$ 的特征值为 1 的 3 次方根, $\phi(x)$ 的轨道 $\subset \{v_1, v_2, \cdots, v_l\}$.

证　因为 $(\phi(a))^3 - 1 = \phi(a^3) - \phi(1) = \phi(a^3 - 1) = 0$, 故 $\phi(a)$ 的极小多项式整除 $\lambda^3 - 1$. 又 $\mathrm{char}(F) = 0$, 故 $\phi(a)$ 的极小多项式的根互不相同, 并且是 1 的 3 次根. 由于 F 是代数闭域, 故 F 包含 $\phi(a)$ 的所有特征值, 从而 $\phi(a)$ 是可以对角化的. 由命题 2.1 知, $\phi(x)$ 的轨道 $\subset \{v_1, v_2, \cdots, v_l\}$.

引理 2.4　设 V 是一个 H-模, 基为

$$\{v_1, v_2, \cdots, v_l\}, \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},$$

如果

$$\begin{aligned} &a \cdot v_t = \varepsilon^r v_t, \quad r = 1, 2; \\ &x \cdot v_t = v_{t+2}, \quad 1 \leqslant t < l - 1; \\ &x \cdot v_l = 0, \quad x \cdot v_{l-1} = 0, \end{aligned}$$

则 $a \cdot (b \cdot v_t) = \varepsilon^{2r}(bv_t)$, $x \cdot (b \cdot v_t) = -bv_{t+1}$, $1 \leqslant t \leqslant l-1$; $x \cdot (b \cdot v_l) = 0$.

证　由于 $ab = ba^2$, 所以 $a \cdot (b \cdot v_t) = (ab) \cdot v_t = b(a^2 \cdot v_t) = b(a(\varepsilon^r v_t) = \varepsilon^{2r}(bv_t)$. 对于 $1 \leqslant t < l - 1$, 有 $x \cdot (b \cdot v_t) = (xb) \cdot v_t = -(bx) \cdot v_t = -b(x \cdot v_t) = -bv_{t+1}$, $x \cdot (b \cdot v_{l-1}) = b(x \cdot v_{l-1}) = 0$, $x \cdot (b \cdot v_l) = b(x \cdot v_l) = 0$.

命题 2.2　设 $M_l(F)$ 是 F 上的 $l \times l$ 矩阵代数, $1 \leqslant l < n$, l 为偶数, $A, B, X \in M_l(F)$, 并且 $A = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^2)$,

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & & & \\ & & B_1 & & \\ & & & B_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

其中

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则存在唯一的代数同态 $\phi: H \to M_l(F)$, 使得 $\phi(a) = A$, $\phi(b) = B$, $\phi(x) = X$.

证　由于 $\varepsilon^3 = 1$, 故 $A^3 = E$. 因为

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $B_1^2=E$. 因为

$$B_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

故 $B_2^2=E$. 这样 $B^2=E$. 经过简单验算，可得

$$X^n=0,\quad AB=BA^2,\quad XA=AX,\quad XB=-BX.$$

从而由 H 的定义知，存在唯一的代数同态 $\phi: H\to M_l(F)$, 使得 $\phi(a)=A$, $\phi(b)=B$, $\phi(x)=X$.

设 V 是 l-维向量空间，基为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_l\}$, 由命题 2.2, 存在唯一的表示 $\phi: H\to \operatorname{End}V$, 使得 $\phi(a),\phi(b),\phi(x)$ 在基 $\{v_1,v_2,\cdots,v_l\}$ 下的矩阵为 A,B,X. 也就是说， V 是由下列各式决定的 H-模：

$$\begin{aligned}
&a\cdot v_{2s-1}=\varepsilon v_{2s-1},\quad a\cdot v_{2s}=\varepsilon^2 v_{2s},\quad s=1,2,\cdots,\frac{l}{2};\\
&b\cdot v_{2s-1}=(-1)^{s+1}v_{2s},\quad b\cdot v_{2s}=(-1)^{s+1}v_{2s-1},\quad s=1,2,\cdots,\frac{l}{2};\\
&x\cdot v_t=v_{t+2},\quad t=1,2,\cdots,l-2;\\
&x\cdot v_{l-1}=x\cdot v_l=0.
\end{aligned}$$

记此 H-模为 $V(v_1,v_2,\cdots,v_l)$, l 为偶数.

定理 2.1 H-模 $V(v_1,v_2,\cdots,v_l)$ 的子模 $V(v_{l-1},v_l)$ 是不可约模.

证 设 W 是非零 H-模， $W_x=\{v\in W\mid x\cdot v=0\}$. 任意 $0\neq w\in W$, 由于 $x^n\cdot w=0$, 故存在正整数 $i\leqslant n$, 使得 $x^i\cdot w=0$, 但 $x^{i-1}\cdot w\neq 0$, 故 $x^{i-1}\cdot w\in W_x$ 且 $W_x\neq 0$. 设 $V(v_{l-1},v_l)_x=\{v\in V(v_{l-1},v_l)\mid x\cdot v=0\}$, 则 $V(v_{l-1},v_l)_x=\{v_{l-1},v_l\}$. 如果 W 是 $V(v_{l-1},v_l)$ 的非零 H-子模，则 $0\neq W_x\subseteq V(v_{l-1},v_l)_x$, 从而 $pv_{l-1}+rv_l\in W_x$, $p,r\in F$. 因为 l 是偶数，并且

$$\begin{aligned}
&b\cdot(pv_{l-1}+rv_l)=(-1)^{\frac{l}{2}+1}pv_l+(-1)^{\frac{l}{2}+1}rv_{l-1}=(-1)^{\frac{l}{2}+1}(pv_l+rv_{l-1}),\\
&a\cdot(pv_{l-1}+rv_l)=p\varepsilon v_{l-1}+r\varepsilon^2 v_l,\ x\cdot(pv_l+rv_{l-1})=0,
\end{aligned}$$

则 $p=r$. 同时 $p=p\varepsilon$ 或 $r=r\varepsilon^2$. 故 $p=0$ 或 $r=0$. 从而 $v_{l-1}\in W_x$ 或 $v_l\in W_x$. 如果 $v_{l-1}\in W_x$, 而 l 是偶数， $b\cdot v_{l-1}=(-1)^{\frac{l}{2}+1}v_l\in W$, 则

$$b\cdot v_l=(-1)^{\frac{l}{2}+1}v_{l-1},\quad a\cdot v_{l-1}=\varepsilon v_{l-1},\quad a\cdot v_l=\varepsilon^2 v_l,\quad x\cdot v_{l-1}=x\cdot v_l=0,$$

从而 $W=V(v_{l-1},v_l)$. 如果 $v_l\in W_x$, 同理可证得 $W=V(v_{l-1},v_l)$. 所以 $V(v_{l-1},v_l)$ 是不可约 H-模.

命题 2.3 任意由 v_i 张成的 H-模总包含 H-模 $V(v_{l-1},v_l)$, 其中 $1\leqslant i\leqslant l$.

证 设由 v_i 张成的 H-模为 W.

(1) 当 i 为奇数且 $1\leqslant i<l-1$ 时，由

$$x\cdot v_t=v_{t+2},\quad 1\leqslant t<l-1,$$

得 $v_i,v_{i+2},\cdots,v_{l-1}\in W$. 由

$$b\cdot v_{2s-1}=(-1)^{s+1}v_{2s},\quad s=\frac{i+l}{2},\cdots,\frac{l}{2},$$

得 $v_{i+1}, v_{i+3}, \cdots, v_l \in W$. 故

$$W = V(v_i, v_{i+1}, \cdots, v_{l-1}, v_l) \supseteq V(v_{l-1}, v_l).$$

(2) 当 i 为偶数，并且 $2 \leqslant i < l$ 时，由

$$x \cdot v_t = v_{t+2}, \quad 1 \leqslant t < l-1,$$

得 $v_i, v_{i+2}, \cdots, v_l \in W$. 由

$$b \cdot v_{2s} = (-1)^{s+1} v_{2s-1}, \quad s = i, i+1, \cdots, \frac{l}{2},$$

得 $v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_{l-1} \in W$. 故

$$W = V(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_{l-1}, v_l) \supseteq V(v_{l-1}, v_l).$$

(3) 当 $i = l-1$ 或 $i = l$ 时，由

$$b \cdot v_{l-1} = (-1)^{\frac{l}{2}+1} v_l, \quad b \cdot v_l = (-1)^{\frac{l}{2}+1} v_{l-1},$$

得 $W = V(v_{l-1}, v_l) \supseteq V(v_{l-1}, v_l)$.

故原命题成立.

定理 2.2　设 V 是非平凡的不可约 H-模，则 $\dim V = 2$.

证　设 V 是非平凡的不可约 H-模，$\phi: H \to \mathrm{End}\, V$ 是对应的不可约表示，则 V_x 中包含 $\phi(a)$ 的特征向量 v_l 与 v_{l-1}, 并且 $a \cdot v_{l-1} = \varepsilon^r v_{l-1}$, $a \cdot v_l = \varepsilon^t v_l$, $r, t = 1$ 或 $2, r \neq t$, $x \cdot v_{l-1} = x \cdot v_l = 0$. 由于 $(b^2-1) \cdot v_{l-1} = 0$, $(b^2-1) \cdot v_l = 0$, 则 $b^2 \cdot v_{l-1} = v_{l-1}$, $b^2 \cdot v_l = v_l$.

设 $b \cdot v_{l-1} = v$, 由于 $ab = ba^2$, 则 $ab \cdot v_{l-1} = a \cdot v$, $ba^2 \cdot v_{l-1} = ba(a \cdot v_{l-1}) = ba \cdot \varepsilon^r v_{l-1} = \varepsilon^{2r} b \cdot v_{l-1} = \varepsilon^{2r} v$, 所以 $a \cdot v = \varepsilon^{2r} v$.

设 $b \cdot v_l = u$, 由于 $ab = ba^2$, 则 $ab \cdot v_l = a \cdot u$, $ba^2 \cdot v_l = ba(a \cdot v_l) = ba \cdot \varepsilon^t v_l = \varepsilon^{2t} b \cdot v_l = \varepsilon^{2t} u$, 所以 $a \cdot u = \varepsilon^{2t} u$.

因为 $r, t = 1$ 或 $2, r \neq t$, 所以有 $r = 1$, $t = 2$ 与 $r = 2$, $t = 1$ 两种情况.

(i) 若 $r = 1$, $t = 2$, 则 $a \cdot v_{l-1} = \varepsilon v_{l-1}$, $a \cdot v_l = \varepsilon^2 v_l$ 且 $v = v_l$, $b \cdot v_{l-1} = v_l$, $u = v_{l-1}$, $b \cdot v_l = v_{l-1}$.

(ii) 若 $r = 2$, $t = 1$, 则 $a \cdot v_{l-1} = \varepsilon^2 v_{l-1}$, $a \cdot v_l = \varepsilon v_l$ 且 $v = v_l$, $b \cdot v_{l-1} = v_l$, $u = v_{l-1}$, $b \cdot v_l = v_{l-1}$.

此时 $x \cdot v_l = 0$, $x \cdot v_{l-1} = 0$.

令 $f: H \to H$, $a \mapsto a^2$, $b \mapsto b$, $x \mapsto x$, 则 $f(g) \cdot v_i = g \cdot v_i$, $g \in H, v_i \in V_x$. 设 $W = \mathrm{span}\{v_{l-1}, v_l\}$, 则 $a \cdot W \subseteq W$, $b \cdot W \subseteq W$, $x \cdot W \subseteq W$. 将满足 (i) 的 H-模记为 W', 将满足 (ii) 的 H-模记为 U, 则 W' 为 V 的子模，U 也可看成通过 f 作成的 H-模. 由于 V 是非平凡的不可约 H-模且 v_l, v_{l-1} 线性无关，故 $W' = V$ 且 V 的基为 $\{v_{l-1}, v_l\}$, 或 $V = U$, 故 $\dim V = 2$.

致谢 感谢审稿专家及编辑提出的宝贵意见.

参　考　文　献

[1] 吴美云，唐秋林，二面体群上 Hopf 路余代数的结构分类 [J], 数学年刊, 2007, 28A(5):709–718.

[2] Montgomery S., Hopf algebras and their actions on rings [M]//CBMS Reg. Conf. Series 82, Providence RI: Amer. Math. Soc., 1993.

[3] Sweedler M. E., Hopf Algebras [M], New York: W. A. Benjamin INC., 1969.

[4] Kassel C., Quantum Groups [M], New York: Springer-Verlag, 1995.

[5] Zhang S. C., Zhang Y. Z. and Chen H. X., Classification of PM quiver Hopf algebras [J], *Journal of Algebra and Its Applications*, 2007, 6(6):919–950.

[6] 许甫华，张贤科，高等代数解题方法 [M], 北京：清华大学出版社， 2001.

The Irreducible Representation of a Class of Algebras over a Non-commutative Group

WU Meiyun*

*College of Science, Nantong University, Nantong 226007, Jiangsu, China.
E-mail: ntwmy2005@yahoo.com.cn

Abstract This paper constructs a quotient Hopf algebra through finding out a Hopf ideal in a non-commutative Hopf algebra with an unlimited dimension firstly, and then discusses the irreducible module with a limited dimension over this quotient Hopf algebra. Furthermore, it is concluded that the dimension of this nontrivial irreducible module is 2.

Keywords Non-commutative, Hopf algebra, Irreducible module
2000 MR Subject Classification 16W30, 16G10