数 学 年 刊
2009,30A(6):771–776

条件 g-期望的矩不等式 **

范 胜 君*

提要 找到了几个使条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立的关于 g 和 g-期望的充分条件.

关键词 倒向随机微分方程， g-期望，条件 g-期望，矩不等式
MR (2000) 主题分类 60H10
中图法分类 O211.63, O211.6
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2009)06-0771-06

1 引 言

众所周知，如果 g 关于 y 和 z 是李普希兹的， ξ 和 $(g(t,0,0))_{t\in[0,T]}$ 是平方可积的，那么下面的倒向随机微分方程 (后面简写为 BSDE) 存在唯一的平方可积的适应解

$$y_s=\xi+\int_s^T g(u,y_u,z_u)\mathrm{d}u-\int_s^T z_u\mathrm{d}B_u,\quad s\in[0,T],\tag{1.1}$$

这里 g 称为 BSDE (1.1) 的生成元. 我们记这个唯一的解为 $(y_s^{T,g,\xi},z_s^{T,g,\xi})_{s\in[0,T]}$. 特别地，如果对任意的 $y\in\mathbf{R}$, $g(t,y,0)\equiv 0$, 那么 $y_0^{T,g,\xi}$ 称为 ξ 的 g-期望，常记为 $\mathcal{E}_g[\xi]$, $y_t^{T,g,\xi}$ 称为 ξ 关于 $\mathcal{F}_t$ 的条件 g-期望，常记为 $\mathcal{E}_g[\xi|\mathcal{F}_t]$ (具体细节见文 [1, 2]).

g-期望的概念可以看作是著名的 Girsanov 变换的一种非线性推广. 研究 g-期望的原始动机来自于现代数理经济基石的期望效用理论. 文 [3] 把 g-期望理论应用到了递归效用的研究上，文 [4–7] 又把它们应用到了金融资产的静态和动态定价机制以及风险度量的研究上面.

自从 g-期望的概念提出以来，文 [2, 4, 6–12] 研究了关于它的很多性质，文 [8–11] 分别研究了 g-期望的 Jensen 不等式，矩不等式和 Hölder 不等式，进一步地，文 [12] 研究了 BSDE 的矩不等式和 Hölder 不等式.

遗憾的是，文 [10] 中，作者在证明他们的主要结果 — 定理 3 的过程中，当使用 BSDE 的比较定理去比较 BSDE (4) 和 (5) 的解时，不小心犯了一个错误，根据本文的结果可知，文 [10] 中的定理 3 是不正确的. 同时，文 [12] 又没有针对条件 g-期望的特殊情况做深入地讨论. 于是，本文在这些结果的基础上，进一步地研究能够使条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立的关于 g 和 g-期望的一些充分条件.

2 预 备

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ 是一个概率空间，$(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是此空间上的一个 d-维 Brown 运动，$(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是该 Brown 运动产生的自然 σ 域流，我们总是假定 $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是右连续的且是完备的.

假定 $T>0$ 是一个给定的正数，本文限定在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbf{P})$ 上研究问题，并且仅考虑参数 t 取值于 $[0,T]$ 的过程. 我们用 1_A 表示事件 A 的矢性函数，用 $\mathbf{R}^+$ 表示非负实数的全体. 为了方便，对每一个 $t\in[0,T]$, 使用记号： $L^2(\mathcal{F}_T)=L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbf{P})$,

本文 2009 年 4 月 13 日收到.
*中国矿业大学理学院数学系，江苏　徐州 221116. E-mail: f_s_j@126.com
**国家自然科学基金 (No. 10671205) 和中国矿业大学青年基金 (No. 2006A041, No. 2007A029) 资助的项目.

$L^2(\mathcal{F}_t) = L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$. 对任意的正整数 n, 用 $|z|$ 表示 $z \in \mathbf{R}^n$ 的 Euclidean 范数，并且定义如下的过程空间：

$$\mathcal{S}_2 = \Big\{\phi \in \mathbf{R} : \phi \text{ 关于 } \mathcal{F}_t\text{-循序可测且 } \mathbf{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\phi(t)|^2\Big] < +\infty\Big\},$$

$$\mathcal{H}_2^n = \Big\{\phi \in \mathbf{R}^n : \phi \text{ 关于 } \mathcal{F}_t\text{-循序可测且 } \|\phi(t)\|_2^2 = \mathbf{E}\int_0^T |\phi(t)|^2 \mathrm{d}t < +\infty\Big\}.$$

倒向随机微分方程的生成元 g 是下面的函数： $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, 这里对任意的 $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$, 过程 $(g(t, y, z))_{t\in[0,T]}$ 关于 $\mathcal{F}_t$-循序可测，并且 g 还满足下面假设中的几个：

(A1) 存在常数 $\mu \geqslant 0$, 使得 $\mathrm{d}\mathbf{P} \times \mathrm{d}t$-a.s., 对每一组 $(y_i, z_i) \in \mathbf{R}^{1+d}$ $(i = 1, 2)$, 有

$$|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)| \leqslant \mu(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|).$$

(A2) 过程 $(g(t, 0, 0))_{t\in[0,T]} \in \mathcal{H}_2^1$.

(A3) $\mathrm{d}\mathbf{P} \times \mathrm{d}t$-a.s., 对任意的 $y \in \mathbf{R}$, 有 $g(t, y, 0) = 0$.

(A4) $\mathbf{P}$-a.s., 对任意的 $(y, z) \in \mathbf{R}^{1+d}$, $g(t, y, z)$ 关于 t 是连续的.

(A5) $g(t, y, z)$ 是确定性的，即 g 为定义在空间 $[0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ 上的函数.

(A6) $g(t, y, z)$ 独立于 y, 即 g 为定义在空间 $\Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^d$ 上的函数.

由文 [1] 可知，如果生成元 g 满足假设 (A1) 和 (A2), 那么对任意的随机变量 $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$, BSDE (1.1) 在空间 $\mathcal{H}_2^1 \times \mathcal{H}_2^d$ 中存在唯一的一对解，记为 $(y_s^{T,g,\xi}, z_s^{T,g,\xi})_{s\in[0,T]}$, 常称为 BSDE (1.1) 的平方可积的适应解. 实际上, 根据该领域的经典结果, 过程 $(y_t^{T,g,\xi})_{t\in[0,T]}$ 还一定在空间 $\mathcal{S}_2$ 中. 特别地，如果 g 也满足 (A3), 那么 $y_0^{T,g,\xi}$ 称为 ξ 的 g-期望，常记为 $\mathcal{E}_g[\xi]$, $y_t^{T,g,\xi}$ 称为 ξ 关于 $\mathcal{F}_t$ 的条件 g-期望，常记为 $\mathcal{E}_g[\xi|\mathcal{F}_t]$ (具体细节见文 [2]).

自从彭实戈引入非线性的 BSDEs 以来，人们已经研究了 BSDEs 和 g-期望的很多性质. 下面的几个命题将在本文的后面被频繁地使用. 命题 2.1 是 BSDEs 理论中著名的比较定理，它的证明能在文 [2] 中找到.

命题 2.1 (比较定理)　假定 g 和 g' 都满足假设 (A1) 和 (A2). 让 $\xi, \xi' \in L^2(\mathcal{F}_T)$, 并且 $(y_u, z_u)_{u\in[0,T]}$ 和 $(y'_u, z'_u)_{u\in[0,T]}$ 分别是 BSDE (1.1) 和下面的 BSDE 的平方可积的适应解：

$$y'_u = \xi' + \int_u^T g'(s, y'_s, z'_s)\mathrm{d}s - \int_u^T z'_s \mathrm{d}B_s, \quad u \in [0, T].$$

若 $\mathbf{P}$-a.s., $\xi \geqslant \xi'$ 且 $\mathrm{d}\mathbf{P} \times \mathrm{d}t$-a.s., $g(s, y'_s, z'_s) \geqslant g'(s, y'_s, z'_s)$, 那么对任意的 $t \in [0, T]$, 有 $\mathbf{P}$-a.s., $y_t \geqslant y'_t$. 进一步地，如果 $\mathbf{P}(\xi > \xi') > 0$, 那么对任意的 $t \in [0, T]$, 有 $\mathbf{P}(y_t > y'_t) > 0$.

注 2.1　由比较定理可知，如果 g 满足假设 (A1) 和 (A3), 那么对每一个 $t \in [0, T]$ 和非负随机变量 $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$, 有 $\mathcal{E}_g[\xi|\mathcal{F}_t] \geqslant \mathcal{E}_g[0|\mathcal{F}_t] = 0$, $\mathbf{P}$-a.s.. 这样，本文第 3 节中的 (3.1) 就被很好的定义.

根据文 [13] 中的定理 1, 容易得到下面的关于条件 g-期望的连续依赖性质.

命题 2.2 (连续依赖性质)　假定 g 满足假设 (A1) 和 (A3), 并且对每一个 $n \in \mathbf{N}$, $\xi^n \in L^2(\mathcal{F}_T)$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi^n = \xi$, $\mathbf{P}$-a.s., $|\xi^n| \leqslant \eta$, $\mathbf{P}$-a.s. 且 $\mathbf{E}\eta^2 < +\infty$, 那么对每一个 $t \in [0, T]$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{E}_g[\xi^n|\mathcal{F}_t] = \mathcal{E}_g\big[\lim\limits_{n\to\infty} \xi^n|\mathcal{F}_t\big] = \mathcal{E}_g[\xi|\mathcal{F}_t]$, $\mathbf{P}$-a.s..

下面的命题 2.3 来自文 [7] 中的定理 3.4.

命题 2.3 (g-期望的正齐次性)　假定 g 满足假设 (A1) 和 (A3), 那么下面的两个陈述等价：

(i) $\forall(y,z,\lambda)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^+,\ g(t,\lambda y,\lambda z)=\lambda g(t,y,z),\ \mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t$-a.s..
(ii) $\forall(\xi,\lambda)\in L^2(\mathcal{F}_T)\times\mathbf{R}^+,\ \mathcal{E}_g[\lambda\xi]=\lambda\mathcal{E}_g[\xi]$.

下面的命题 2.4 实际上是文 [14] 中的定理 5.1 和文 [15] 中的定理 2.1 的组合.

命题 2.4 (逆比较定理)　假定 g_1 和 g_2 都满足假设 (A1) 和 (A3). 如果 g_1 和 g_2 还满足 (A4) 或 (A5), 那么下面的两个陈述等价：
(i) $\forall(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d,\ g_1(t,y,z)\geqslant g_2(t,y,z),\ \mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t$-a.s..
(ii) $\forall\xi\in L^2(\mathcal{F}_T),\ \mathcal{E}_{g_1}[\xi]\geqslant\mathcal{E}_{g_2}[\xi]$.

3 主要结果

本节将提出和证明我们的主要结果. 首先介绍下面的定义.

定义 3.1　假定生成元 g 满足 (A1) 和 (A3). 如果对于每一个 $1\leqslant p\leqslant q$, $t\in[0,T]$ 和 $|\xi|^q\in L^2(\mathcal{F}_T)$, 都有

$$(\mathcal{E}_g[|\xi|^p|\mathcal{F}_t])^{\frac{1}{p}}\leqslant(\mathcal{E}_g[|\xi|^q|\mathcal{F}_t])^{\frac{1}{q}},\quad \mathbf{P}\text{-a.s.},\tag{3.1}$$

那么，我们称条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立.

下面的定理 3.1 是本文的第一个主要结果，它给出了使条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立的一个关于 g 的充分条件.

定理 3.1　假定生成元 g 满足 (A1) 和 (A3). 如果 g 还满足下面的两个假设：
(H1) $\forall(y,z,c)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^+,\ g(t,y+c,z)\leqslant g(t,y,z),\quad \mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t$-a.s.,
(H2) $\forall(y,z,\lambda)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^+,\ g(t,\lambda y,\lambda z)=\lambda g(t,y,z),\quad \mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t$-a.s.,
那么条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立.

注 3.1　在文 [12] 中，为了使得条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立，需要假设 (H1) 和 (H2) 对每一个 $y\in\mathbf{R}$ 都成立. 因此，本定理成立所需的条件比文 [12] 中的对应的那个定理成立所需要的条件要弱.

为了证明定理 3.1, 我们首先介绍下面的引理.

引理 3.1　假定生成元 g 满足 (A1) 和 (A3). 如果 g 还满足假设 (H1), 那么对每一个 $t\in[0,T]$ 和每一对取值于 $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$ 的随机变量 $(\xi,\eta)\in L^2(\mathcal{F}_T)\times L^2(\mathcal{F}_t)$, 有

$$\mathcal{E}_g[\xi+\eta|\mathcal{F}_t]\leqslant\mathcal{E}_g[\xi|\mathcal{F}_t]+\eta,\quad \mathbf{P}\text{-a.s.}.\tag{3.2}$$

证　给定 $t\in[0,T]$ 和取值于 $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$ 的一对随机变量 $(\xi,\eta)\in L^2(\mathcal{F}_T)\times L^2(\mathcal{F}_t)$. 让 $(y_u,z_u)_{u\in[t,T]}$ 和 $(y'_u,z'_u)_{u\in[t,T]}$ 分别是下面 BSDEs 的那个唯一的平方可积的适应解：

$$\begin{aligned}y_u&=\xi+\int_u^T g(r,y_r,z_r)\mathrm{d}r-\int_u^T z_r\mathrm{d}B_r,\quad u\in[t,T],\\ y'_u&=\xi+\eta+\int_u^T g(r,y'_r,z'_r)\mathrm{d}r-\int_u^T z'_r\mathrm{d}B_r,\quad u\in[t,T].\end{aligned}\tag{3.3}$$

那么

$$\begin{aligned}y_u+\eta&=\xi+\eta+\int_u^T g(r,y_r,z_r)\mathrm{d}r-\int_u^T z_r\mathrm{d}B_r\\ &=\xi+\eta+\int_u^T\widetilde{g}(r,y_r+\eta,z_r)\mathrm{d}r-\int_u^T z_r\mathrm{d}B_r,\quad u\in[t,T],\end{aligned}\tag{3.4}$$

这里 $\forall(r,y,z)\in[t,T]\times\mathbf{R}^{1+d}$, $\widetilde{g}(r,y,z):=g(r,y-\eta,z)$, $\mathbf{P}$-a.s.. 显然 $\widetilde{g}$ 满足假设 (A1) 和 (A2), 这样, 因为 $\eta\in L^2(\mathcal{F}_t)$ 和 (3.4), 根据下面 BSDE (3.5) 解的存在唯一性可知, $(y_u+\eta,z_u)_{u\in[t,T]}$ 正是 BSDE (3.5) 的那个唯一的平方可积的适应解 $(\widetilde{y}_u,\widetilde{z}_u)_{u\in[t,T]}$:

$$\widetilde{y}_u=\xi+\eta+\int_u^T\widetilde{g}(r,\widetilde{y}_r,\widetilde{z}_r)\mathrm{d}r-\int_u^T\widetilde{z}_r\mathrm{d}B_r,\quad u\in[t,T]. \tag{3.5}$$

因为 $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 中取值, 那么由注 2.1 可知, 对每一个 $r\in[0,T]$, 有 $y_r\geqslant 0$. 这样, 再考虑到假设 (H1) 和 $\eta\geqslant 0$, 从 $\widetilde{g}$ 的定义可以得到

$$g(r,\widetilde{y}_r,\widetilde{z}_r)=g(r,y_r+\eta,z_r)\leqslant g(r,y_r,z_r)=\widetilde{g}(r,\widetilde{y}_r,\widetilde{z}_r),\quad \mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t\text{-a.s.}\quad 在\ [t,T]\times\Omega\ 中.$$

这样, 使用比较定理 (命题 2.1) 比较 BSDE (3.3) 和 (3.5) 的解, 我们得到 $\mathcal{E}_g[\xi+\eta|\mathcal{F}_t]=y'_s\leqslant\widetilde{y}_s=y_s+\eta=\mathcal{E}_g[\xi|\mathcal{F}_t]+\eta$, $\mathbf{P}$-a.s.. 于是我们得到 (3.2).

借助于假设 (H2) 和 BSDEs 解的存在唯一性, 下面的引理 3.2 是明显的, 这里忽略它的证明.

引理 3.2 假定生成元 g 满足 (A1) 和 (A3). 如果 g 还满足假设 (H2), 那么对每一个 $t\in[0,T]$ 和每一对取值于 $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$ 的随机变量 $(\xi,\eta)\in L^2(\mathcal{F}_T)\times L^2(\mathcal{F}_t)$, 只要 η 有界, 就有 $\mathcal{E}_g[\eta\xi|\mathcal{F}_t]=\eta\mathcal{E}_g[\xi|\mathcal{F}_t]$, $\mathbf{P}$-a.s..

现在, 我们可以证明定理 3.1 了.

定理 3.1 的证明 对 $k\geqslant 1$, 应用泰勒公式到函数 $\varphi(x)=x^k$ 上, 得 $\forall x,y\geqslant 0$, $x^k\geqslant y^k+ky^{k-1}(x-y)=ky^{k-1}x+(1-k)y^k$. 于是

$$\forall x,y\geqslant 0,\quad x^k+(k-1)y^k\geqslant ky^{k-1}x. \tag{3.6}$$

对每一个 $t\in[0,T]$ 和 $\eta\in L^2(\mathcal{F}_T)$, 若 $|\eta|^k\in L^2(\mathcal{F}_T)$, 那么从注 2.1 可知, $\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t]\geqslant\mathcal{E}_g[0|\mathcal{F}_t]=0$. 这样, 在 (3.6) 中, 取 $x=|\eta|$, $y=\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t]$, 得

$$|\eta|^k+(k-1)(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^k\geqslant k(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^{k-1}\cdot|\eta|,\quad \mathbf{P}\text{-a.s..}$$

对每一个 $n\in\mathbf{N}$, 定义 $\Omega_n=\{\omega:\ \mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t]\leqslant n\}$, 并且用 1_{Ω_n} 定义 Ω_n 矢性函数. 从比较定理 (性质 2.1) 可知, $\mathcal{E}_g[\cdot|\mathcal{F}_t]$ 是非减的, 因而有

$$\mathcal{E}_g[1_{\Omega_n}|\eta|^k+1_{\Omega_n}(k-1)(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^k|\mathcal{F}_t]\geqslant\mathcal{E}_g[1_{\Omega_n}k(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^{k-1}\cdot|\eta||\mathcal{F}_t],\quad \mathbf{P}\text{-a.s..} \tag{3.7}$$

因为假设 (H1), 考虑到 $1_{\Omega_n}(k-1)(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^k\in L^2(\mathcal{F}_t)$ 非负且 $1_{\Omega_n}|\eta|^k\geqslant 0$, 根据引理 3.1 得 $\mathbf{P}$-a.s.,

$$\mathcal{E}_g[1_{\Omega_n}|\eta|^k|\mathcal{F}_t]+1_{\Omega_n}(k-1)(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^k\geqslant\mathcal{E}_g[1_{\Omega_n}|\eta|^k+1_{\Omega_n}(k-1)(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^k|\mathcal{F}_t]. \tag{3.8}$$

进一步地, 因为假设 (H2), 考虑到 $1_{\Omega_n}k(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^{k-1}\in L^2(\mathcal{F}_t)$ 非负有界, 根据引理 3.2 得 $\mathbf{P}$-a.s.,

$$\mathcal{E}_g[1_{\Omega_n}k(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^{k-1}\cdot|\eta||\mathcal{F}_t]=1_{\Omega_n}k(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^{k-1}\cdot\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t]=1_{\Omega_n}k(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^k. \tag{3.9}$$

这样, 组合 (3.7)–(3.9), 我们得到

$$\mathcal{E}_g[1_{\Omega_n}|\eta|^k|\mathcal{F}_t]\geqslant 1_{\Omega_n}(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^k,\quad \mathbf{P}\text{-a.s..} \tag{3.10}$$

那么利用条件 g-期望的连续依赖性质 (命题 2.2), 考虑到 1_{Ω_n} 和 $|\eta|^k\in L^2(\mathcal{F}_t)$ 的定义, 在 (3.10) 中让 $n\to\infty$, 我们得到对每一个 $t\in[0,T]$ 和 $\eta\in L^2(\mathcal{F}_T)$ 且 $|\eta|^k\in L^2(\mathcal{F}_T)$, 有

$$\mathcal{E}_g[|\eta|^k|\mathcal{F}_t]\geqslant(\mathcal{E}_g[|\eta||\mathcal{F}_t])^k,\quad \mathbf{P}\text{-a.s..} \tag{3.11}$$

最后, 对每一对 $1\leqslant p\leqslant q$, 在 (3.11) 中取 $k=\frac{q}{p}$ 和 $\eta=|\xi|^p$, 有 $\mathcal{E}_g[|\xi|^q|\mathcal{F}_t]\geqslant(\mathcal{E}_g[|\xi|^p|\mathcal{F}_t])^{\frac{q}{p}}$, $\mathbf{P}$-a.s.. 由上面这个不等式, 我们知道: 这时条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立. 定理 3.1 的证明完成.

利用定理 3.1, 我们能够容易地得到下面的推论.

推论 3.1 假定生成元 g 满足假设 (A1), (A3) 和 (A6). 如果 g 还满足 $\forall(z,\lambda)\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^+$, $g(t,\lambda z)=\lambda g(t,z)$, $\mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t$-a.s., 那么条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立.

例 3.1 假定生成元 $g(t,y,z)=k(t)\cdot|z|$, 这里 $k(t)$ 为一个有界适应过程，或者 $g(t,y,z)=\sqrt{y^2+|z|^2}-|y|$, 或者对 $d=1$, 设

$$g(t,y,z)=\begin{cases}z+y, & -z<y<0,\\ z-y, & 0<y<z,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

不难验证，这些生成元都满足假设 (A1), (A3), (H1) 和 (H2). 因此，根据定理 3.1, 对应的条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立.

下面，我们介绍本文的第 2 个主要结果，它给出了使条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立的一个关于 g-期望的充分条件.

定理 3.2 假定生成元 g 满足假设 (A1) 和 (A3), 并且还满足 (A4) 或 (A5). 如果 g-期望满足下面的条件

(H3) $\forall(\xi,\lambda,c)\in L^2(\mathcal{F}_T)\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$, $\mathcal{E}_g[\lambda\xi+c]\leqslant\lambda\mathcal{E}_g[\xi]+c$,

那么，条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立.

证 根据定理 3.1, 为了证明定理 3.2, 我们仅仅需要证明在本定理的条件下，假设 (H1) 和 (H2) 对生成元 g 成立即可. 证明的主要思路源自文 [7]. 事实上，一方面，在 (H3) 中取 $c=0$, 有 $\forall(\xi,\lambda)\in L^2(\mathcal{F}_T)\times\mathbf{R}^+$, $\mathcal{E}_g[\lambda\xi]\leqslant\lambda\mathcal{E}_g[\xi]$. 该不等式能够推出，对每一个 $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$ 和 $\lambda>0$, 有 $\mathcal{E}_g[\lambda\xi]\leqslant\lambda\mathcal{E}_g[\xi]\leqslant\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}\mathcal{E}_g[\lambda\xi]=\mathcal{E}_g[\lambda\xi]$. 因此 $\forall(\xi,\lambda)\in L^2(\mathcal{F}_T)\times\mathbf{R}^+$, $\mathcal{E}_g[\lambda\xi]=\lambda\mathcal{E}_g[\xi]$. 那么命题 2.3 说明假设 (H2) 的确成立.

另一方面，在 (H3) 中取 $\lambda=1$, 有

$$\forall(\xi,c)\in L^2(\mathcal{F}_T)\times\mathbf{R}^+,\quad \mathcal{E}_g[\xi+c]\leqslant\mathcal{E}_g[\xi]+c. \tag{3.12}$$

对每一个 $c\in\mathbf{R}^+$, 我们定义一个新的生成元 $\forall(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, $g^c(t,y,z):=g(t,y-c,z)$, $\mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t$-a.s.. 那么显然 g^c 满足假设 (A1) 和 (A3). 对每一个 $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$, 由 BSDEs 解的唯一性，我们可以容易地验证，对每一个 $t\in[0,T]$, 有 $\mathcal{E}_{g^c}[\xi+c|\mathcal{F}_t]=\mathcal{E}_g[\xi|\mathcal{F}_t]+c$. 于是, 组合 (3.12) 和上面的等式, 有 $\forall\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$, $\mathcal{E}_{g^c}[\xi+c]=\mathcal{E}_g[\xi]+c\geqslant\mathcal{E}_g[\xi+c]$. 因此, 对任意给定的 $c\in\mathbf{R}^+$, 都有 $\forall\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$, $\mathcal{E}_{g^c}[\xi]\geqslant\mathcal{E}_g[\xi]$. 这样, 因为 g 满足 (A4) 或 (A5), 命题 2.4 说明: 对任意给定的 $c\in\mathbf{R}^+$, 有 $\forall(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, $g^c(t,y,z)=g(t,y-c,z)\geqslant g(t,y,z)$, $\mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t$-a.s.. 也就是说， $\forall(y,z,c)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^+$, $g(t,y+c,z)\leqslant g(t,y,z)$, $\mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t$-a.s.. 因此, 假设 (H1) 也成立. 这样，我们完成了定理 3.2 的证明.

考虑到推论 3.1, 从定理 3.2 的证明容易证明下面的推论 3.2.

推论 3.2 假定生成元 g 满足假设 (A1), (A3) 和 (A6). 如果 g-期望满足下面的条件: $\forall(\xi,\lambda)\in L^2(\mathcal{F}_T)\times\mathbf{R}^+$, $\mathcal{E}_g[\lambda\xi]=\lambda\mathcal{E}_g[\xi]$, 那么条件 g-期望的矩不等式在一般意义下成立.

致谢 感谢审稿人的仔细阅读和提出的宝贵意见与建议.

参　考　文　献

[1] Pardoux E. and Peng S., Adapted solution of a backward stochastic differential equation [J], *Systems Control Letters*, 1990, 14:55–61.

[2] Peng S., Backward stochastic differential equations and related g-expectations [M]// Backward Stochastic Differential Equations, Karoui N. E. and Mazliak L., eds., Pitman Research Notes in Math., Series 364, London: Longman Harlow, 1997:141–159.

[3] Chen Z. and Epstein L., Ambiguity, risk and asset returns in continuous time [J], *Econometrica*, 2002, 70:1403–1443.

[4] Peng S., Nonlinear expectations, nonlinear evaluations and risk measures [R], Preprint and Lecture Notes Presented in CIME-EMS Summer School, Bressanone, Italy, 2003.

[5] Rossazza G., Risk measures via g-expectations [J], *Insurance Math. Econom.*, 2006, 39(1):19–34.

[6] Jiang L., Nonlinear expectation, g-expectation theory and its applications in finance [D], Shandong University, 2005.

[7] Jiang L., Convexity, translation invariance and subadditivity for g-expectations and related risk measures [J], *The Annals of Applied Probability*, 2008, 18(1):245–258.

[8] Jiang L. and Chen Z., On Jensen's inequality for g-expectation [J], *Chin. Ann. Math.*, 2004, 25B(3):401–412.

[9] 范胜君，g-期望关于凸 (凹) 函数的 Jensen 不等式 [J], 数学年刊, 2006, 27A(5):635–644.

[10] 王增武，孙信秀，肖晓庆， g-期望的矩不等式 [J], 徐州师范大学学报：自然科学版, 2003, 21(4):13–15.

[11] 释永信， g-期望的 Hölder 不等式 [J], 山东大学学报, 2006, 41(4):28–31.

[12] Fan S., Moment inequality and Hölder inequality for BSDEs [J], *Acta Mathematica Applicatae Sinica, English Series*, 2009, 25(1):11–20.

[13] 范胜君，几乎处处意义下倒向随机微分方程解对终值的连续性 [J], 徐州师范大学学报：自然科学版, 2005, 23(1):27–30.

[14] Jiang L., Representation theorems for generators of backward stochastic differential equations and their applications [J], *Stochastic Processes and Their Applications*, 2005, 115:1883–1903.

[15] Coquet F., Hu Y., Mémin and Peng S., A general converse comparison theorem for backward stochastic differential equation [J], *C. R. Acad. Sci. Paris, Series I*, 2001, 333:577–581.

Moment Inequality for Conditional g-Expectation

FAN Shengjun*

*Department of Mathematics, College of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, Jiangsu, China. E-mail: f_s_j@126.com

Abstract This paper finds some sufficient conditions on g and g-expectation under which moment inequality for the conditional g-expectation holds in general.

Keywords Backward stochastic differential equation, g-Expectation, Conditional g-expectation, Moment inequality

2000 MR Subject Classification 60H10