

\mathcal{D} 族负象限相依随机变量和的精致大偏差 ***

杨 洋* 王岳宝**

提要 在负象限相依结构下, 得到了支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的 \mathcal{D} 族随机变量非中心化以及中心化部分和的精致大偏差. 同时, 还在较弱的条件下, 得到了相应的中心化随机和的精致大偏差.

关键词 \mathcal{D} 族, 负上(下)象限相依, 精致大偏差

MR (2000) 主题分类 60F10

中图法分类 O211.4

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2009)06-0777-10

1 引言

本文均假设 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是一列支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的同分布随机变量 (r.v.s), 其共同的分布 F 满足对所有的 x , 尾分布函数 $\bar{F}(x) = 1 - F(x) > 0$, 期望 μ 存在. 记其部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n \geq 1$, 约定 $S_0 = 0$. 若无特殊说明, 文中的极限关系均指 $n \rightarrow \infty$ 或者 $t \rightarrow \infty$.

关于精致大偏差的研究最早可以追溯到 20 世纪 30 年代, 一直以来, 这一领域的研究集中在对中心化部分和的尾概率的估计上, 即寻求使得等价式

$$P(S_n - n\mu > x) \sim n\bar{F}(x)$$

关于 x 在某个区域 T_n 中一致成立的条件. 早期一些关于重尾独立 r.v.s 中心化的结果可以参见文 [1-4] 等, 近期见文 [5] 等.

一个重要的重尾分布族即所谓的 \mathcal{D} 族. 称分布 F 带有控制尾, 记作 $F \in \mathcal{D}$, 若对任意的 $0 < y < 1$, 有

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} < \infty.$$

一个略小些的分布族为 \mathcal{C} 族. 称分布 F 带有一致变换尾, 记作 $F \in \mathcal{C}$, 若

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = 1.$$

与这两个分布族密切相关的一个较大的重尾分布族是 \mathcal{L} 族. 称分布 F 是长尾的, 记为 $F \in \mathcal{L}$, 若对任意的 y , 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1.$$

本文 2009 年 2 月 20 日收到.

*南京审计学院数学与统计学院, 南京 210029. E-mail: yyang@nau.edu.cn

**苏州大学数学科学学院, 江苏 苏州 215006. E-mail: ybwang@suda.edu.cn

***国家自然科学基金 (No. 10671139), 江苏省高校自然科学基金 (No. 06KJD110092, No. 09KJD110003) 和江苏省博士后科研资助计划 (No. 0901029C) 资助的项目.

进一步地, 对于分布 F , 定义其 Matuszewska 指数为

$$\gamma_F \equiv \inf \left\{ -\frac{\log \bar{F}_*(y)}{\log y} : y > 1 \right\},$$

其中 $\bar{F}_*(y) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)}$. 类似地, 定义 $\bar{F}^*(y) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)}$, 并记 $L_F = \lim_{y \downarrow 1} \bar{F}_*(y)$. 关于这些量的详细介绍可见文 [6].

下述命题是周知的.

命题 1.1 (i) $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ 是适正的包含关系;

(ii) 下列命题等价: (a) $F \in \mathcal{D}$; (b) 对任意的 $y > 1$, 有 $\bar{F}_*(y) > 0$; (c) 对某个 $y > 1$, 有 $\bar{F}_*(y) > 0$; (d) $L_F > 0$; (e) $\gamma_F < \infty$.

近来, 人们越来越多地关注某些相依结构下的精致大偏差. 文 [7, 8] 分别研究了负相协 (Negatively Associated, NA) 结构下, \mathcal{D} 族和 \mathcal{C} 族非负 r.v.s 和的精致大偏差. 需要指出的是, 文 [7] 的结果包括了非中心化的情形. 文 [9, 10] 考虑了更一般的负象限相依结构, 但是他们的结果考虑的仍然是中心化的场合. 这种相依结构是由文 [11, 12] 引入的. 称 r.v.s $\{X_k : k \geq 1\}$ 是负上象限相依 (Negatively Upper Quadrant Dependent, NUQD) 的, 如果对任意的 $n \geq 1$ 及 $y_k \in (-\infty, \infty)$, $k \geq 1$, 有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_k > y_i\}\right) \leq \prod_{k=1}^n P(X_k > y_i) \quad (1.1)$$

成立. 称 r.v.s $\{X_k : k \geq 1\}$ 是负下象限相依 (Negatively Lower Quadrant Dependent, NLQD) 的, 如果对任意的 $n \geq 1$ 及 $y_k \in (-\infty, \infty)$, $k \geq 1$, 有

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq y_k\}\right) \leq \prod_{k=1}^n P(X_k \leq y_k) \quad (1.2)$$

成立. 称 r.v.s $\{X_k : k \geq 1\}$ 是负象限相依 (Negatively Quadrant Dependent, NQD) 的, 如果对任意的 $n \geq 1$ 及 $y_k \in (-\infty, \infty)$, $k \geq 1$, 有 (1.1) 和 (1.2) 均成立. 注意到, 负象限相依是比周知的负相协更弱的一种相依结构. 并且当 $n = 2$ 时, 3 种相依结构是相互等价的, 即 r.v.s $\{X_k : k \geq 1\}$ 是两两 NUQD 的, 等价于它们是两两 NLQD 的, 也是两两 NQD 的. 在负象限相依的结构下, 文 [9] 得到了 \mathcal{C} 族 r.v.s 中心化部分和的精致大偏差.

定理 1.1 (i) 设 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是一列支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的同分布的 NUQD r.v.s, 其共同的分布 $F \in \mathcal{C}$, 期望 $\mu = 0$, 则对于任意固定的 $\gamma > 0$, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq \gamma n} \frac{P(S_n > x)}{n\bar{F}(x)} \leq 1. \quad (1.3)$$

(ii) 设 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是一列支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的同分布的 NLQD r.v.s, 其共同的分布 $F \in \mathcal{C}$, 期望 $\mu = 0$. 假设存在某个 $r > 1$, 使得 $E(X^-)^r < \infty$, 并且

$$xF(-x) = o(\bar{F}(x)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

则对于任意固定的 $\gamma > 0$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \geq \gamma n} \frac{P(S_n > x)}{n\bar{F}(x)} \geq 1. \quad (1.5)$$

本文的主要目标就是研究负象限相依结构下, 支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的 \mathcal{D} 族 r.v.s 非中心化以及中心化的部分和的精致大偏差, 我们将在第 2 节给出这些结果. 设 $\{N(t) : t \geq 0\}$

是一个独立于 $\{X_k : k \geq 1\}$ 的非负整值过程, $\lambda(t) = EN(t) \rightarrow \infty$. 记 $S_{N(t)} = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ 表示随机和. 在第 3 节中, 我们将给出相应 \mathcal{D} 族 r.v.s 中心化随机和的精致大偏差, 同时我们的结果削弱了大部分随机和结果需要的条件 (3.1), 仅要求一个很弱的条件 (3.2) 成立.

2 负象限相依随机变量部分和的精致大偏差

在给出本节的主要结果之前, 我们首先介绍一些符号和记号. 记 $x^+ = \max(x, 0)$, $\mu_+ = EX_1 I(X_1 > 0)$, $\mu_- = -EX_1 I(X_1 \leq 0)$, 这里 I 表示示性函数. 易见 $\mu = \mu_+ - \mu_-$, $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$. 定义分布 F 的风险函数为 $Q(x) = -\log \bar{F}(x)$, $x \geq 0$, 并且记

$$\underline{\alpha}_F = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x)}{\log x}.$$

注意到 $\underline{\alpha}_F < \infty$ 当且仅当对任意的分布 G 属于轻尾或者轻度重尾分布族, 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} = 0$. 则由文 [5] 的引理 2.2 (即本文引理 2.1(ii)) 和文 [13] 的定理 (2) 知, 若 $F \in \mathcal{D}$, 则 $\underline{\alpha}_F < \infty$. 下面的定理推广了文 [7, 9] 中相应结果.

定理 2.1 设 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是一列支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的同分布的 NUQD r.v.s, 其共同的分布 $F \in \mathcal{D}$, 期望 μ 存在. 若 $\mu \leq 0$, 则对于任意固定的 $\gamma > 0$, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq \gamma n} \frac{P(S_n > x)}{n\bar{F}(x)} \leq L_F^{-1}. \quad (2.1)$$

若 $\mu > 0$, 则对于任意固定的 $\gamma > \mu$, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > \gamma n)}{n\bar{F}(\gamma n)} \leq (\bar{F}_*((1 - \gamma^{-1}\mu)^{-1}))^{-1}. \quad (2.2)$$

定理 2.2 设 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是一列支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的同分布的 NLQD r.v.s, 其共同的分布 $F \in \mathcal{D}$, 期望 μ 存在, 并且满足 (1.4), 则对于任意固定的 $\gamma > 0$, 有

(i) 假设存在某个 $r > 1$, 使得 $E(X^-)^r < \infty$. 若 $\mu \geq 0$, 则有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \geq \gamma n} \frac{P(S_n > x)}{n\bar{F}(x)} \geq L_F. \quad (2.3)$$

若 $\mu < 0$, 则有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > \gamma n)}{n\bar{F}(\gamma n)} \geq \bar{F}_*(1 - \gamma^{-1}\mu). \quad (2.4)$$

(ii) 假设 F 的左尾也属于 \mathcal{D} 族, 即对任意的 $0 < y < 1$, 有 $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{F(-xy)}{F(-x)} < \infty$. 若 $\mu \geq 0$, 则有 (2.3) 成立. 若 $\mu < 0$, 则有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > \gamma n)}{n\bar{F}(\gamma n)} \geq L_F. \quad (2.5)$$

特别地, 若 $\{X_k : k \geq 1\}$ 相互独立, 省略 (1.4), (i), (ii) 中的条件, 仍有 (2.3) 成立.

在证明这两个主要结果之前, 我们需要关于 \mathcal{D} 族 r.v.s 和负象限相依 r.v.s 的一些性质. 下面的引理源自于文 [5].

引理 2.1 若 $F \in \mathcal{D}$, 则

(i) 对任意的 $\rho > \gamma_F$, 存在正常数 x_0 和 B_0 , 使得对所有的 $\theta \in (0, 1]$ 及 $x \geq \theta^{-1}x_0$, 有

$$\frac{\overline{F}(\theta x)}{\overline{F}(x)} \leq B_0 \theta^{-\rho}. \tag{2.6}$$

(ii) 对任意的 $\gamma > \gamma_F$, 有 $x^{-\gamma} = o(\overline{F}(x))$.

由 NUQD 和 NLQD r.v.s 的定义, 文 [12, p. 769] 给出了关于负象限相依 r.v.s 的一些直接结果.

引理 2.2 对 r.v.s $\{X_k : k \geq 1\}$ 以及实值函数 $\{f_k(\cdot) : k \geq 1\}$,

(i) 若 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是 NUQD (NLQD) 的, 并且 $\{f_k(\cdot) : k \geq 1\}$ 均单调递增, 则 $\{f_k(X_k) : k \geq 1\}$ 仍然是 NUQD (NLQD) 的;

(ii) 若 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是 NUQD (NLQD) 的, 并且 $\{f_k(\cdot) : k \geq 1\}$ 均单调递减, 则 $\{f_k(X_k) : k \geq 1\}$ 是 NLQD (NUQD) 的;

(iii) 若 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是 NQD 的, 并且 $\{f_k(\cdot) : k \geq 1\}$ 单调性相同, 则 $\{f_k(X_k) : k \geq 1\}$ 仍然是 NQD 的;

(iv) 若 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是非负 NUQD 的, 则对任意的 $n \geq 1$, 有

$$E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) \leq \prod_{k=1}^n EX_k.$$

定理 2.1 的证明 若 $\mu \leq 0$, 则沿着文 [9] 中定理 3.1 的证明思路, 不难证明 (2.1) 成立.

我们主要证明 (2.2). 应当指出, 我们的证明思路源自文 [7, 9]. 对固定的 $0 < \theta < 1$, 令 $\widetilde{X}_k = \min(X_k, \theta\gamma n)$, 记 $\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \widetilde{X}_k$. 则由引理 2.2 的 (i) 知 $\{\widetilde{X}_k : k \geq 1\}$ 仍然是 NUQD 的, 并且

$$\begin{aligned} P(S_n > \gamma n) &= P\left(S_n > \gamma n, \bigcup_{k=1}^n \{X_k > \theta\gamma n\}\right) + P\left(S_n > \gamma n, \bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq \theta\gamma n\}\right) \\ &\leq n\overline{F}(\theta\gamma n) + P(\widetilde{S}_n > \gamma n). \end{aligned} \tag{2.7}$$

我们主要估计 (2.7) 的第 2 项. 记 $a = \max(-\log(n\overline{F}(\theta\gamma n)), 1)$, 则由 $\mu < \infty$, 知 $a \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. 对某个正函数 $h = h(n)$ (待定), 由 Markov 不等式及引理 2.2 的 (iv), 知

$$P(\widetilde{S}_n > \gamma n) \leq e^{-h\gamma n} Ee^{h\widetilde{S}_n} \leq e^{-h\gamma n} (Ee^{h\widetilde{X}_1})^n. \tag{2.8}$$

注意到

$$Ee^{h\widetilde{X}_1} \leq \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\theta\gamma n}\right) (e^{ht} - 1)F(dt) + (e^{h\theta\gamma n} - 1)\overline{F}(\theta\gamma n) + 1. \tag{2.9}$$

对任意的 $t \leq 0$, 由不等式 $0 \leq \frac{e^{ht} - 1 - ht}{h} \leq t(e^{ht} - 1) \leq -t, \int_{-\infty}^0 (-t)F(dt) = \mu_- < \infty$ 及控制收敛定理, 知

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^0 (e^{ht} - 1)F(dt) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^0 (e^{ht} - 1 - ht)F(dt) - \mu_- = -\mu_-.$$

因此, 存在某个实值函数 $\alpha(h) \rightarrow 0, h \downarrow 0$, 使得

$$\int_{-\infty}^0 (e^{ht} - 1)F(dt) = -(1 + \alpha(h))h\mu_-. \tag{2.10}$$

对任意固定的 $\tau > 1$, 令 $\rho > \max(\gamma_F, \tau^{-1})$. 由不等式 $e^t - 1 \leq te^t$ 及引理 2.1 的 (i), 知

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta\gamma n} (e^{ht} - 1)F(dt) &= \left(\int_0^{\frac{\theta\gamma n}{a^\tau}} + \int_{\frac{\theta\gamma n}{a^\tau}}^{\theta\gamma n} \right) (e^{ht} - 1)F(dt) \\ &\leq e^{\frac{h\theta\gamma n}{a^\tau}} \int_0^{\frac{\theta\gamma n}{a^\tau}} htF(dt) + e^{h\theta\gamma n} \overline{F}\left(\frac{\theta\gamma n}{a^\tau}\right) \\ &\leq h\mu_+ e^{\frac{h\theta\gamma n}{a^\tau}} + e^{h\theta\gamma n} B_0 a^{\rho\tau} \overline{F}(\theta\gamma n). \end{aligned} \quad (2.11)$$

故由 (2.8)-(2.11) 及 $t+1 \leq e^t$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{P(\widetilde{S}_n > \gamma n)}{n\overline{F}(\theta\gamma n)} &\leq e^{-h\gamma n+a} (Ee^{h\widetilde{X}_1})^n \\ &\leq \exp\{-(1+\alpha(h))nh\mu_- + (nh\mu_+ e^{\frac{h\theta\gamma n}{a^\tau}} + B_0 n e^{h\theta\gamma n} a^{\tau\rho} \overline{F}(\theta\gamma n)) \\ &\quad + n(e^{h\theta\gamma n} - 1)\overline{F}(\theta\gamma n) - h\gamma n + a\} \\ &\equiv \exp\{I_1 + I_2 + I_3 - h\gamma n + a\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

选取 $h = \frac{a - \tau\rho \log a}{\theta\gamma n}$. 类似于文 [7], 再由 $e^t - 1 \leq te^t$ 可得, 当 n 充分大时,

$$I_3 \leq n\overline{F}(\theta\gamma n)h\theta\gamma n e^{h\theta\gamma n} = (a - \tau\rho \log a)a^{-\tau\rho} \leq a^{1-\tau\rho} = o(1). \quad (2.13)$$

注意到 $0 < h \sim \frac{a}{\theta\gamma n} \sim \frac{-\log \overline{F}(\theta\gamma n)}{\log(\theta\gamma n)} \cdot \frac{\log(\theta\gamma n)}{\theta\gamma n} = o(1)\underline{\alpha}_F = o(1)$, 故

$$I_1 = -(1+o(1))\frac{a - \tau\rho \log a}{\theta\gamma} \mu_- = -(1+o(1))\frac{\mu_- a}{\theta\gamma}. \quad (2.14)$$

再由 $\tau > 1$ 及 $a \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ 知, 当 n 充分大时,

$$I_2 = \frac{a - \tau\rho \log a}{\theta\gamma} \mu_+ e^{\frac{a - \tau\rho \log a}{a^\tau}} + B_0 = (1+o(1))\frac{\mu_+ a}{\theta\gamma} + B_0. \quad (2.15)$$

综合 (2.12)-(2.15), 可得

$$\frac{P(\widetilde{S}_n > \gamma n)}{n\overline{F}(\theta\gamma n)} = e^{B_0} \exp\left\{o(a) + \left(\frac{\mu}{\theta\gamma} - \frac{1}{\theta} + 1\right)a\right\}.$$

故当 $\frac{\mu}{\theta\gamma} - \frac{1}{\theta} + 1 < 0$, 即 $\theta < 1 - \gamma^{-1}\mu$ 时, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P(\widetilde{S}_n > \gamma n)}{n\overline{F}(\theta\gamma n)} = 0. \quad (2.16)$$

所以, 当 $\mu > 0$ 时, $0 < \theta < 1 - \gamma^{-1}\mu < 1$. 由 (2.7), (2.16) 并令 $\theta \uparrow 1 - \gamma^{-1}\mu$, 立得 (2.2).

定理 2.2 的证明 借鉴文 [9] 的证明思路, 证明 (ii) 时有所不同. 首先证明 (i). 对固定的 $\theta > 1$, 有

$$\begin{aligned} P(S_n > x) &\geq P\left(S_n > x, \bigcup_{k=1}^n \{X_k > \theta x\}\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^n P(S_n > x, X_k > \theta x) - \sum_{1 \leq k < l \leq n} P(S_n > x, X_k > \theta x, X_l > \theta x) \\ &\equiv J_1 - J_2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

由于 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是 NLQD 的, 故是两两 NLQD 的, 也是两两 NUQD 的. 因此, 由 $F \in \mathcal{D}$ 及 $\mu < \infty$ 知, 对 $x \geq \gamma n$ 一致地有

$$J_2 \leq \left(\frac{n}{2}\bar{F}(\theta x)\right)^2 = o(n\bar{F}(x)). \quad (2.18)$$

对于 J_1 , 有

$$\begin{aligned} J_1 &\geq \sum_{k=1}^n P(S_n - X_k > (1-\theta)x, X_k > \theta x) \\ &\geq \sum_{k=1}^n (P(S_n - X_k > (1-\theta)x) + P(X_k > \theta x) - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\bar{F}(\theta x) - P\left(\sum_{l:1 \leq l \neq k \leq n} (-X_l) \geq (\theta-1)x\right) \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

由引理 2.2 的 (ii) 知, $\{-X_k : k \geq 1\}$ 是 NUQD 的. 当 $\mu \geq 0$ 时, 利用下面 (2.20) 的方法, 容易得到 $P\left(\sum_{l:1 \leq l \neq k \leq n} (-X_l) \geq (\theta-1)x\right) = o(\bar{F}(x))$, 对 $x \geq \gamma n$ 一致成立. 我们主要证明 $\mu < 0$ 的情况, 此时 $x = \gamma n$. 因为 $E((-X)^+)^r = E(X^-)^r < \infty$, 则由文 [9] 中引理 2.3 知, 对任意固定的 $p > \gamma_F$, 存在与 n 无关的正常数 θ_0 和 C , 使得当 $\gamma\theta - \gamma + \mu > 0$, 即 $\theta > 1 - \gamma^{-1}\mu$ 时, 有

$$\begin{aligned} &P\left(\sum_{l:1 \leq l \neq k \leq n} (-X_l + \mu) \geq (\theta-1)\gamma n + n\mu\right) \\ &\leq nF\left(-\frac{\theta-1}{\theta_0}(\gamma\theta - \gamma + \mu)n\right) + Cn^{-p} \\ &= o(\bar{F}(\gamma n)), \end{aligned} \quad (2.20)$$

这里最后一个等号利用了条件 (1.4), $F \in \mathcal{D}$ 以及引理 2.1 的 (ii). 由 (2.17)–(2.20) 立得 (2.4) 成立. (2.3) 类似可证.

对于 (ii), 我们只证明当 $\mu \geq 0$ 时的情形. 重复 (i) 中的证明, 有 (2.17)–(2.19). 由 $\{-X_k : k \geq 1\}$ 是 NUQD 的以及 $E(-X) = -\mu \leq 0$, 故由定理 2.1 的 (2.1) 及 (1.4), 知

$$\begin{aligned} &\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq \gamma n} \frac{1}{n\bar{F}(x)} \sum_{k=1}^n P\left(\sum_{l:1 \leq l \neq k \leq n} (-X_l) \geq (\theta-1)x\right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq \gamma n} \frac{P\left(\sum_{l:1 \leq l \neq k \leq n} (-X_l) \geq (\theta-1)x\right)}{(n-1)P(-X > (\theta-1)x)} \cdot \frac{nF(-(\theta-1)x)}{\bar{F}(x)} = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

由此结合 (2.17)–(2.19) 可得 (2.3) 成立.

当 $\{X_k : k \geq 1\}$ 相互独立时, 由 (2.19) 及强大数律, 知

$$J_1 \geq \sum_{k=1}^n \bar{F}(\theta x) P(S_n - X_k > (1-\theta)x) \sim n\bar{F}(\theta x).$$

同以上的分析, 立得 (2.3) 成立.

类似于文 [9] 中定理 3.1 和定理 3.2 的证明, 容易得到 \mathcal{D} 族 r.v.s 中心化的精致大偏差.

定理 2.3 设 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是一列支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的同分布的 NUQD r.v.s, 其共同分布 $F \in \mathcal{D}$, 期望 μ 存在, 则对于任意固定的 $\gamma > 0$, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq \gamma n} \frac{P(S_n - n\mu > x)}{n\overline{F}(x)} \leq L_F^{-1}. \quad (2.22)$$

定理 2.4 设 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是一列支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的同分布的 NLQD r.v.s, 其共同分布 $F \in \mathcal{D}$, 期望 μ 存在, 并且满足 (1.4). 假设存在某个 $r > 1$, 使得 $E(X^-)^r < \infty$, 则对于任意固定的 $\gamma > 0$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \geq \gamma n} \frac{P(S_n - n\mu > x)}{n\overline{F}(x)} \geq L_F. \quad (2.23)$$

3 负象限相依随机变量中心化随机和的精致大偏差

设 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是一个独立于 $\{X_k : k \geq 1\}$ 的非负整值过程, $\lambda(t) = EN(t) \rightarrow \infty$. 记 $S_{N(t)} = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ 表示随机和. 随机和的精致大偏差在金融保险等领域有着重要的应用, 关于非负独立 r.v.s 的成果可以参见文 [14–16] 等. 然而, 这些结果均要求一个基本的假设: 对某个 $p > \gamma_F$ 及任意的 $\delta > 0$, 独立于 $\{X_k : k \geq 1\}$ 非负整值过程 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 满足

$$E(N(t))^p I(N(t) > (1 + \delta)\lambda(t)) = O(\lambda(t)). \quad (3.1)$$

近来, 文 [10] 在一个较弱的条件下, 得到了负均值负象限相依 \mathcal{C} 族 r.v.s 随机和的精致大偏差. 本节我们将利用定理 2.3 和定理 2.4 得到更一般的非正均值 \mathcal{D} 族 r.v.s 的相应结果. 我们均假设 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是一个独立于 $\{X_k : k \geq 1\}$ 非负整值过程, $\lambda(t) = EN(t) \rightarrow \infty$, 并且满足

$$\frac{N(t)}{\lambda(t)} \xrightarrow{P} 1. \quad (3.2)$$

由文 [5] 知, (3.1) 蕴含了 (3.2).

我们首先给出 \mathcal{D} 族 r.v.s 的一个性质.

引理 3.1 若 $F \in \mathcal{D}$, 则有

$$L_F \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x + o(x))}{\overline{F}(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x + o(x))}{\overline{F}(x)} \leq L_F^{-1}. \quad (3.3)$$

进一步地, 对任意的 $\gamma > 0$ 以及趋于 ∞ 的函数 $a(t)$, 有

$$L_F \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{x \geq \gamma a(t)} \frac{\overline{F}(x + o(a(t)))}{\overline{F}(x)} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \geq \gamma a(t)} \frac{\overline{F}(x + o(a(t)))}{\overline{F}(x)} \leq L_F^{-1}. \quad (3.4)$$

证 由 \mathcal{D} 族的定义, 可得

$$\begin{aligned} L_F &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}((1 + \varepsilon)x)}{\overline{F}(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x + o(x))}{\overline{F}(x)} \\ &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x + o(x))}{\overline{F}(x)} \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}((1 - \varepsilon)x)}{\overline{F}(x)} = L_F^{-1}. \end{aligned}$$

这就证明了 (3.3). 由 (3.3) 立得 (3.4) 成立.

下面给出本节的主要结果.

定理 3.1 设 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是一列支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的同分布的 NUQD r.v.s, 其共同的分布 $F \in \mathcal{D}$, 期望 $\mu \leq 0$. 假设存在某个常数 $r > 1$, 使得 $E(X^+)^r < \infty$, 则对于任意固定的 $\gamma > |\mu|$, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \geq \gamma \lambda(t)} \frac{P(S_{N(t)} - \mu \lambda(t) > x)}{\lambda(t) \overline{F}(x)} \leq L_F^{-2}. \quad (3.5)$$

定理 3.2 设 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是一列支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的同分布的 NLQD r.v.s, 其共同的分布 $F \in \mathcal{D}$, 期望 $\mu \leq 0$, 并且满足 (1.4). 假设存在某个常数 $r > 1$, 使得 $E|X|^r < \infty$. 则对于任意固定的 $\gamma > |\mu|$, 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{x \geq \gamma \lambda(t)} \frac{P(S_{N(t)} - \mu \lambda(t) > x)}{\lambda(t) \overline{F}(x)} \geq L_F^2. \quad (3.6)$$

我们只证明定理 3.1, 定理 3.2 的证明类似.

定理 3.1 的证明 设 $\varepsilon(t)$ 是一个非负有界函数, 满足对所有的 $t \geq 0$, $0 \leq \varepsilon(t) \leq 1$, 并且 $\varepsilon(t) \rightarrow 0$. 由经典的讨论, 首先将 $P(S_{N(t)} - \mu \lambda(t) > x)$ 分成如下 3 个部分:

$$\begin{aligned} & P(S_{N(t)} - \mu \lambda(t) > x) \\ &= \left(\sum_{n < (1-\varepsilon(t))\lambda(t)} + \sum_{|n-\lambda(t)| \leq \varepsilon(t)\lambda(t)} + \sum_{n > (1+\varepsilon(t))\lambda(t)} \right) P(S_n - \mu \lambda(t) > x) P(N(t) = n) \\ &\equiv K_1 + K_2 + K_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

我们首先处理 K_2 . 当 $x \geq \gamma \lambda(t)$, $|n - \lambda(t)| \leq \varepsilon(t)\lambda(t)$ 时, 容易得到 $x - (n - \lambda(t))\mu \geq \frac{\gamma + |\mu|\varepsilon(t)}{1 + \varepsilon(t)}n \equiv \gamma_0 n$. 注意到 $\gamma_0 > 0$, 由定理 2.3 知, 对 $x \geq \gamma \lambda(t)$, 一致地有

$$P(S_n - \mu \lambda(t) > x) = P(S_n - n\mu > x - (n - \lambda(t))\mu) \lesssim L_F^{-1} n \overline{F}(x - (n - \lambda(t))\mu).$$

由此, 结合 (3.4) 和 (3.2), 有

$$\begin{aligned} K_2 &\lesssim L_F^{-1} (1 + \varepsilon(t)) \lambda(t) \overline{F}(x) \sum_{|n-\lambda(t)| \leq \varepsilon(t)\lambda(t)} \frac{\overline{F}(x - (n - \lambda(t))\mu)}{\overline{F}(x)} P(N(t) = n) \\ &\lesssim L_F^{-2} \lambda(t) \overline{F}(x) P(|N(t) - \lambda(t)| \leq \varepsilon(t)\lambda(t)) \sim L_F^{-2} \lambda(t) \overline{F}(x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

对 $x \geq \gamma \lambda(t)$ 一致成立.

对于 K_1 , 由 $\gamma > |\mu|$, $E(X^+)^r < \infty$, $r > 1$ 及文 [9] 中引理 2.3 可得, 存在与 n 和 x 无关的常数 θ_0, C , 使得对任意的 $p > \gamma_F$, 每个 $n < (1 - \varepsilon(t))\lambda(t)$, 当 t 充分大时, 对 $x \geq \gamma \lambda(t)$ 一致地有

$$\begin{aligned} P(S_n - \mu \lambda(t) > x) &= P(S_n - n\mu > x - (\lambda(t) - n)|\mu|) \\ &\leq P(S_n - n\mu > (1 - \gamma^{-1}|\mu|)x) \\ &\leq n \overline{F}(\theta_0(1 - \gamma^{-1}|\mu|)x + \mu) + Cx^{-p} \\ &= O(1)n \overline{F}(x), \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中最后一个等号利用了 $F \in \mathcal{D}$ 及引理 2.1 的 (ii). 由 (3.9) 及 (3.4), 有

$$\begin{aligned} K_1 &\leq O(1) \overline{F}(x) \sum_{n < (1-\varepsilon(t))\lambda(t)} n P(N(t) = n) \\ &\leq O(1) \lambda(t) \overline{F}(x) P(N(t) < (1 - \varepsilon(t))\lambda(t)) = o(\lambda(t) \overline{F}(x)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

对 $x \geq \gamma\lambda(t)$ 一致成立.

最后, 估计 K_3 . 注意到对所有的 $t \geq 0$, $0 \leq \varepsilon(t) \leq 1$, 则由控制收敛定理及 (3.2), 知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\left(\frac{N(t)}{\lambda(t)} I(N(t) \leq (1 + \varepsilon(t))\lambda(t))\right) = 1.$$

从而

$$E(N(t)I(N(t) > (1 + \varepsilon(t))\lambda(t))) = o(\lambda(t)). \quad (3.11)$$

由定理 2.3, $F \in \mathcal{D}$ 及 (3.11), 有

$$\begin{aligned} K_3 &\leq \sum_{n > (1 + \varepsilon(t))\lambda(t)} P(S_n - n\mu > (1 - \gamma^{-1}|\mu|x)P(N(t) = n)) \\ &\leq O(1)\bar{F}((1 - \gamma^{-1}|\mu|x) \sum_{n > (1 + \varepsilon(t))\lambda(t)} nP(N(t) = n)) \\ &\leq O(1)\bar{F}(x)E(N(t)I(N(t) > (1 + \varepsilon(t))\lambda(t))) \\ &= o(\lambda(t)\bar{F}(x)). \end{aligned} \quad (3.12)$$

综合 (3.7), (3.8), (3.10) 和 (3.12), 立得 (3.5) 成立.

致谢 感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

参 考 文 献

- [1] Nagaev A. V., Integral limit theorems for large deviations when Cramer's condition is not fulfilled I, II [J], *Theory Probab. Appl.*, 1969, 14(1, 2):51–64, 193–208.
- [2] Heyde C. C., A contribution to the theory of large deviations for sums of independent random variables [J], *Z. Wahrscheinlichkeitsth.*, 1967, 7(5):303–308.
- [3] Heyde C. C., On large deviation problems for sums of random variables which are not attracted to the normal law [J], *Ann. Math. Statist.*, 1967, 38(5):1575–1578.
- [4] Nagaev S. V., Large deviations of sums of independent random variables [J], *Ann. Probab.*, 1979, 7(5):754–789.
- [5] Ng K. W., Tang Q., Yan J. and Yang H., Precise large deviations for sums of random variables with consistently varying tails [J], *J. Appl. Probab.*, 2004, 41(1):93–107.
- [6] Bingham N. H., Goldie C. M. and Teugels J. L., Regular Variation [M], Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [7] Wang Y., Wang K. and Cheng D., Precise large deviations for sums of negatively associated random variables with common dominatedly varying tails [J], *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2006, 22(6):1725–1734.
- [8] Liu Y., Precise large deviations for negatively associated random variables with consistently varying tails [J], *Statist. and Probab. Letters*, 2007, 77(2):181–189.
- [9] Tang Q., Insensitivity to negative dependence of the asymptotic behavior of precise deviations [J], *Electron. J. Probab.*, 2006, 11:107–120.

- [10] Chen Y. and Zhang W., Large deviations for random sums of negatively dependent random variables with consistently varying tails [J], *Statist. and Probab. Letters*, 2007, 77(5):530–538.
- [11] Ebrahimi N. and Ghosh M., Multivariate negative dependence [J], *Comm. Statist. A Theory Methods*, 1981, 10(4):307–337.
- [12] Block H. W., Savits T. H. and Shaked M., Some concepts of negative dependence [J], *Ann. Probab.*, 1982, 10(3):765–772.
- [13] 王岳宝, 成凤扬, 杨洋, 关于重尾分布间的控制关系及其应用 [J], *应用概率统计*, 2005, 21(1):21–30.
- [14] Embrechts P., Klüppelberg C. and Mikosch T., *Modelling Extremal Events* [M], Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [15] Asmussen S. and Klüppelberg C., Large deviations results for subexponential tails with applications to insurance risk [J], *Stochastic Process. Appl.*, 1996, 64(1):103–125.
- [16] Tang Q., Su C., Jiang T. and Zhang J., Large deviations for heavy-tailed random sums in compound renewal model [J], *Statist. and Probab. Letters*, 2001, 52(1):91–100.

Precise Large Deviations for Sums of Negatively Quadrant Dependent Random Variables Belonging to the \mathcal{D} Class

YANG Yang* WANG Yuebao**

*School of Mathematics and Statistics, Nanjing Audit University, Nanjing 210029, China. E-mail: yyang@nau.edu.cn

**Department of Mathematics, Soochow University, Suzhou 215006, Jiangsu, China. E-mail: ybwang@suda.edu.cn

Abstract The authors obtain some results for precise large deviations of dominatedly-tailed non-central and central partial sums with increments on $(-\infty, \infty)$. Some corresponding results for central random sums in some weak conditions are also derived.

Keywords The \mathcal{D} class, Negatively upper (lower) quadrant dependent, Precise large deviations

2000 MR Subject Classification 60F10