

静态 AdS 时空中的常平均曲率类空超曲面 **

张 远 征*

提要 在 $n+1$ 维静态 AdS 时空 \overline{M} 中, 利用双扭结构建立了一些积分公式, 并利用这些积分公式证得: 如果 \overline{M} 的 Ricci 曲率具有非负离差, 那么以 $n-1$ 维圆球面为边界的常平均曲率类空超曲面必为测地圆盘 ($h=0$) 或全脐盖 ($h \neq 0$). 作为推论, 对于离差为零的 Einstein 静态 AdS 时空, 结论也真.

关键词 Einstein 度量, 离差函数, 积分公式, 扭积

MR (2000) 主题分类 53C42

中图法分类 O186.86

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2009)06-0829-10

1 引 言

本文考虑的外围空间属于一类静态时空. Lorentz 流形称为静态时空, 如果它容有一个类时的静态向量场 (无旋的 Killing 向量场见 [1, 2]), 而标准的静态时空是指乘积空间 $B \times I$ 赋予了 Lorentz 度量 $\langle, \rangle = g_B(x) - \mu^2(x)du^2$, 其中 $g_B(x)$ 是底空间 B 上的 Riemann 度量, I 是 \mathbb{R} 或圆. 局部地, 任何静态时空都可化成标准的形式, 而 ∂_u 就是一静态向量场. 现设底空间 B 是 n 维圆盘 $B^n(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ ($a > 0$ 或 $a = +\infty$) 且有旋转不变度量, 即在极坐标系 $x = tp$ ($p \in \mathbb{S}^{n-1}$) 下, $g_B(x)$ 在 $B^n(a) \setminus \{0\} = (0, a) \times \mathbb{S}^{n-1}$ 上可以表示成 (见 [3])

$$g = \pi_t^*(dt^2) + \lambda^2(\pi_t)\pi_{\mathbb{S}}^*(d\Omega^2),$$

其中 π_t 和 $\pi_{\mathbb{S}}$ 分别是到 $(0, a)$ 和 \mathbb{S}^{n-1} 上的投影, $d\Omega^2$ 是 $n-1$ 维单位球面 \mathbb{S}^{n-1} 的标准度量, 并且扭积函数 λ 满足

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda'(0) = 1, \quad \lambda(t) > 0, \quad \forall t \in (0, a). \quad (1.1)$$

我们还假设 μ 是 $B^n(a)$ 上的径向函数, 那么除了测地线 $\Gamma = \{o\} \times I$ 外, 静态时空 $\overline{M}^{n+1} \doteq B^n(a) \times I$ 具有如下双扭 Lorentz 度量

$$\langle, \rangle = \pi_t^*(dt^2) + \lambda^2(\pi_t)\pi_{\mathbb{S}}^*(d\Omega^2) - \mu^2(\pi_t)\pi_I^*(du^2), \quad (1.2)$$

其中 π_I 是到 I 上的投影.

许多重要的物理空间具有这种双扭结构, 例如 Lorentz 空间 $L^{n+1}(\lambda = t, \mu = 1)$, Anti-de-Sitter 空间 $\text{AdS}^{n+1}(-1)$ ($\lambda = \sinh t, \mu = \cosh t$), 经典的 Schwarzschild 时空以及广义 Schwarzschild-Tangherlini 时空等等 (见 [4, 5]). 特别地, 当 $\mu(t) = \lambda'(t)$ 时, (1.2) 就是所谓的静态 AdS 时空. 从几何角度来看, 这类 Lorentz 乘积空间具有如下简单结构:

(1) 沿测地线 Γ 平行移动, 叶片 ($u = u_0$) 形成了 \overline{M} 上的全测地叶层, 这些叶片都与 $B^n(a)$ 微分同胚;

本文 2008 年 9 月 8 日收到, 2008 年 12 月 31 日收到修改稿.

*上海财经大学应用数学系, 上海 200433. E-mail: yzzh@mail.shufe.edu.cn

**上海财经大学 211 工程三期重点学科建设基金资助的项目.

(2) 在每个叶片上, $t = t_0, u = u_0$ 是 $n - 1$ 维圆球面, 记为 $S^{n-1}(t_0, u_0)$, 它是叶片上的全脐超曲面;

(3) 通过圆球面 $S^{n-1}(t_0, u_0)$, 存在一族平均曲率非零的全脐类空超曲面 (详见第 3 节). 特别地, 对于静态 AdS 时空, 这些全脐超曲面具有常数的平均曲率.

这个结构图形表明: 在静态 AdS 时空中, 测地圆盘 ($u = u_0, 0 \leq t \leq t_0$) 和全脐盖是以圆球面 $S^{n-1}(t_0, u_0)$ 为边界的常平均曲率类空超曲面. 自然我们会问: 以圆球面 $S^{n-1}(t_0, u_0)$ 为边界的紧致常平均曲率的类空超曲面是否只有测地圆盘和全脐盖? 对于 $\lambda = t, \mu = 1$ 的情况, 即外围空间是 Lorentz 空间 L^{n+1} 时, 这族全脐超曲面就是伪球面. Aldeo 等 [6] 证明了 L^3 中以圆为边界的常平均曲率类空超曲面一定是闭圆盘或伪球面盖. 对于静态 AdS 时空我们引入离差函数 τ , 这个函数反映了度量 (1.2) 偏离 Einstein 度量的程度 (见定义 2.1). 在具有非负离差 ($\tau \geq 0$) 的静态 AdS 时空中, 本文利用双扭结构 (1.2) 来建立积分公式, 并利用这些积分公式证明了: 测地圆盘和全脐盖是唯一以圆球面 $S^{n-1}(t_0, u_0)$ 为边界的紧致常平均曲率类空超曲面 (见定理 4.1). 作为推论, 对于离差为零的 Einstein 静态 AdS 时空, 结论也真.

2 基本公式

设 $\overline{M}' = \overline{M} \setminus \Gamma = (0, a) \times S^{n-1} \times I$ 是具有双扭度量 (1.2) 的静态时空. 为方便起见, 将 (1.2) 简写为

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dt^2 + \lambda^2(t)d\Omega^2 - \mu^2(t)du^2. \quad (2.1)$$

由于扭函数 λ 适合条件 (1.1), 所以 $B^n(a)$ 上的向量场 $V \doteq \lambda(t)\partial_t$ 仅有一个零点 o , 它是 $B^n(a)$ 上整体有定义的闭共形向量场 (见 [3]). 因此向量场 (仍记为 V):

$$V(x, u) = \lambda(\pi_t)\partial_t, \quad x \in B^n(a), u \in I,$$

也是 \overline{M} 上整体有定义的光滑向量场, 它的零点是测地线 $\Gamma = \{o\} \times I$. 需要注意的是 ∂_t 仅在 \overline{M}' 上有定义. 在 \overline{M}' 中, 用 S^\perp 表示由 ∂_t, ∂_u 张成的 2 维分布, 则有正交分解 $T\overline{M}' = S^\perp \oplus TS^{n-1}$. 我们在 \overline{M}' 上引入取值于 S^\perp 的 (1,1)-型张量

$$\begin{aligned} J : T\overline{M}' &\rightarrow S^\perp, \\ JX &= \langle X, \partial_u \rangle \partial_t - \langle X, \partial_t \rangle \partial_u. \end{aligned} \quad (2.2)$$

显然 J 为反对称, 即 $\langle JX, Y \rangle = -\langle JY, X \rangle$, $\ker J = TS^{n-1}$, 并且 $\tilde{J} = \mu^{-1}J$ 限制在 S^\perp 上成为一个复结构, 即 $\tilde{J}^2|_{S^\perp} = 1$.

设 E_1, \dots, E_{n-1} 为 S^{n-1} 的局部切标架, 它们与 ∂_t, ∂_u 一起组成 \overline{M}' 的切标架. 用 $\overline{\nabla}$ 表示关于度量 (1.2) 的 Levi-Civita 联络, 则有 (见 [7])

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t &= 0, \\ \overline{\nabla}_{\partial_u} \partial_t &= \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_u = (\log \mu)' \cdot \partial_u, \\ \overline{\nabla}_{E_i} \partial_t &= (\log \lambda)' \cdot E_i, \\ \overline{\nabla}_{\partial_u} \partial_u &= \mu \mu' \cdot \partial_t, \\ \overline{\nabla}_{E_i} \partial_u &= \overline{\nabla}_{\partial_u} E_i = 0, \\ \overline{\nabla}_{E_i} E_j &= \nabla_{E_i}^S E_j - (\log \lambda)' \langle E_i, E_j \rangle \partial_t, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 ∇^S 表示 S^{n-1} 上的 Levi-Civita 联络. 因此, 对任意向量场 X , 有

$$\bar{\nabla}_X \partial_t = -(\log \lambda)' \langle X, \partial_t \rangle \partial_t + \frac{1}{\mu^2} \left(\log \frac{\lambda}{\mu} \right)' \langle X, \partial_u \rangle \partial_u + (\log \lambda)' X, \quad (2.4)$$

$$\bar{\nabla}_X \partial_u = -(\log \mu)' JX, \quad (2.5)$$

如果用 V 替换 ∂_t , (2.4) 成为

$$\bar{\nabla}_X V = \frac{\lambda}{\mu^2} \left(\log \frac{\lambda}{\mu} \right)' \langle X, \partial_u \rangle \partial_u + \lambda' X, \quad (2.6)$$

利用 (2.3)–(2.5), 直接验证得到

$$\bar{R}(X, Y) \partial_t = -\frac{\lambda''}{\lambda} K_0(X, Y) \partial_t - \frac{1}{\mu^2} \phi(t) \langle JX, Y \rangle \partial_u, \quad (2.7)$$

$$\bar{R}(X, Y) \partial_u = -(\log \lambda)' (\log \mu)' K_0(X, Y) \partial_u - \psi(t) \langle JX, Y \rangle \partial_t, \quad (2.8)$$

$$\bar{R}(E_i, E_j) E_k = R_S(E_i, E_j) E_k - \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 K_0(E_i, E_j) E_k, \quad (2.9)$$

其中

$$\begin{aligned} K_0(X, Y) Z &= \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y, \\ \phi(t) &= \frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{\mu''}{\mu}, \quad \psi(t) = \frac{\lambda' \mu' - \lambda \mu''}{\lambda \mu}, \end{aligned}$$

而 R_S 表示单位球面 $(S^{n-1}, d\Omega^2)$ 曲率张量, 即

$$R_S(E_i, E_j) E_k = \frac{1}{\lambda^2} K_0(E_i, E_j) E_k.$$

特别地, 当 $\mu = \lambda'$ 时, 有 $\phi(t) = \psi(t)$. 注意到 $J\partial_t = -\partial_u$, $J\partial_u = -\mu^2 \partial_t$ 以及 $JE_i = 0$, 以上曲率公式可以一致地表示成

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y) W &= -\frac{\lambda''}{\lambda} K_0(X, Y) W + \phi(t) \langle \tilde{J}X, Y \rangle \tilde{J}W \\ &\quad + \left(\frac{\lambda''}{\lambda} + \frac{1 - (\lambda')^2}{\lambda^2} \right) K_0(\pi_S(X), \pi_S(Y)) \pi_S(W). \end{aligned} \quad (2.10)$$

因此, 利用 $\langle X, Y \rangle = -\langle \tilde{J}X, \tilde{J}Y \rangle + \langle \pi_S(X), \pi_S(Y) \rangle$, Ricci 曲率张量为

$$\bar{\text{Ric}}(X, Y) = -\left[\frac{2\lambda''}{\lambda} + (n-2) \frac{(\lambda')^2 - 1}{\lambda^2} \right] \langle X, Y \rangle + \tau(t) \langle \tilde{J}X, \tilde{J}Y \rangle, \quad (2.11)$$

其中 $\tilde{J} = \mu^{-1} J = \mu^{-1} K_0(\partial_t, \partial_u)$, 而

$$\tau(t) = \frac{\lambda'''}{\lambda'} + \frac{(n-3)\lambda''}{\lambda} - (n-2) \frac{(\lambda')^2 - 1}{\lambda^2}.$$

注 2.1 当 $\mu = \lambda'$ 时, $\phi = 0$ 等同于 $\frac{\lambda''}{\lambda} = -c$, 即

$$\lambda(t) = \begin{cases} t, & c = 0, \\ \sinh \sqrt{-ct}, & c < 0, \\ \sin \sqrt{ct}, & c > 0. \end{cases}$$

此时 (1.2) 是曲率 c 的常曲率度量.

注 2.2 当 $\mu = \lambda'$ 时, 容易验证

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{2\lambda''}{\lambda} + (n-2) \frac{(\lambda')^2 - 1}{\lambda^2} \right] = \frac{2\lambda'}{\lambda} \tau(t),$$

由此可知 (1.2) 是 Einstein 度量 $\Leftrightarrow \frac{2\lambda''}{\lambda} + (n-2)\frac{(\lambda')^2-1}{\lambda^2} = -nc \Leftrightarrow \tau(t) = 0$, 因此, 从 (2.11) 看到, $\tau(t)$ 的大小真实地反映了度量 (1.2) 偏离 Einstein 度量的程度, 称之为离差函数.

定义 2.1 设 $\mu = \lambda'$, 如果 $\tau(t) \geq 0$ (或 $\tau(t) \leq 0$), 则称度量 (1.2) 具有非负 (或非正) 离差. 离差为零的度量就是 Einstein 度量.

3 全脐类空超曲面

在 \bar{M} 上除了的全测地叶片 ($u = u_0$) 外, 还可构造一族关于 Γ 轴旋转对称的全脐类空超曲面. 设 $\mathbb{O}(n)$ 是保持度量 (1.2) 和 Γ 轴不变的正交群, 那么关于 Γ 轴旋转对称的超曲面 Σ 由曲线 $\gamma = \Sigma/\mathbb{O}(n)$ 生成, 这里 γ 就是投影曲线 $\gamma = (\pi_t(q), \pi_I(q))$, 其中 $q \in \Sigma$. 将 γ 弧长参数化: $\gamma(s) = (t(s), u(s))$, 满足

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \mu^2(t)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 1, \quad (3.1)$$

对应的旋转超曲面 Σ 为浸入

$$F : (a_1, a_2) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \bar{M}, \quad (s, p) \mapsto (t(s), p, u(s)). \quad (3.2)$$

F 的单位法向量为

$$N = \mu \frac{du}{ds} \partial_t + \mu^{-1} \frac{dt}{ds} \partial_u. \quad (3.3)$$

利用 (2.4) 和 (2.5), 直接计算可得

$$A(E) = -\bar{\nabla}_E N = -\mu \frac{du}{ds} \frac{d \log \lambda}{dt} E, \quad (3.4)$$

$$A(F_*(\partial_s)) = -\bar{\nabla}_{F_*(\partial_s)} N = -\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1} \left(\mu \frac{d^2 u}{ds^2} + 2 \frac{d\mu}{ds} \frac{du}{ds}\right) F_*(\partial_s), \quad (3.5)$$

其中 $F_*(\partial_s) = \frac{dt}{ds} \partial_t + \frac{du}{ds} \partial_u$, E 切于 \mathbb{S}^{n-1} . 因此 F 全脐当且仅当 $\gamma(s)$ 满足

$$\begin{cases} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \mu^2(t)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 1, \\ \mu \frac{d^2 u}{ds^2} + 2 \frac{d\mu}{ds} \frac{du}{ds} = \mu \frac{du}{ds} \cdot \frac{d \log \lambda}{ds}, \end{cases}$$

降次后, 这组方程组等价于一阶方程组

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = \frac{c\lambda}{\mu^2}, \\ \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1 + \frac{c^2 \lambda^2}{\mu^2}, \end{cases} \quad (3.6)$$

其中 c 是任意常数. 因 $\frac{dt}{ds} \neq 0$, 故有

$$\frac{du}{dt} = \frac{c\lambda}{\mu \sqrt{\mu^2 + c^2 \lambda^2}}, \quad (3.7)$$

两边积分导出

$$u(t) = \int_{t_0}^t \frac{c\lambda}{\mu \sqrt{\mu^2 + c^2 \lambda^2}} dt + u_0, \quad (3.8)$$

它决定了一族全脐类空超曲面, 并且每一超曲面都通过圆球面 $S^{n-1}(t_0, u_0)$. 特别地, $c = 0$ 对应的全脐超曲面就是全测地叶片 $u = u_0$. 利用 (3.7), 由 F 诱导的度量为

$$g_F = \frac{\mu^2}{\mu^2 + c^2 \lambda^2} dt^2 + \lambda^2 d\Omega^2, \quad (3.9)$$

或 $g_F = ds^2 + \lambda^2(t(s))d\Omega^2$, 它是类空的.

从 (3.4) 和 (3.6) 看出, 由 (3.8) 决定的旋转全脐超曲面的主曲率为 $-\frac{c\lambda'}{\mu}$. 因此对于静态的 AdS 时空来说, 这些全脐超曲面具有常数的平均曲率 $-c$.

例 3.1 Lorentz 空间 L^{n+1} : Lorentz 空间可以看成类空超平面 \mathbb{R}^n 平行移动而成, 在 \mathbb{R}^n 上取极坐标系, 那么 Lorentz 度量可表示成 $dt^2 + t^2 d\Omega^2 - du^2$, 这里 $\lambda = t$, $\mu = 1$. 此时 (3.8) 成为 $u = \sqrt{c^2 t^2 + 1} - \sqrt{c^2 t_0^2 + 1} + u_0$, 对应的旋转超曲面就是曲率为 $-c^2$ 的伪球面.

例 3.2 常曲率 Anti-de-Sitter 空间 $\text{AdS}^{n+1}(-1)$: 设 \mathbb{R}_2^{n+2} 具有 $(n, 2)$ -型的平坦度量 $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2$. 其上定义 Anti-de-Sitter 空间为

$$\text{AdS}^{n+1}(-1) = \{x = (x_1, \cdots, x_{n+2}) : |x|^2 = -1\}.$$

令 $x_{n+1} = \cosh t \cos u$, $x_{n+2} = \cosh t \sin u$, $u \in [0, 2\pi)$, 则有 $(x_1, \cdots, x_n) = \sinh t \cdot p$, 其中 $p \in S^{n-1}$. 因此, 除一圆 $\Gamma = \{x_1 = \cdots = x_n = 0, x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 = 1\}$ 外, $\text{AdS}^{n+1}(-1)$ 具有双扭结构 $R^+ \times_\lambda S^{n-1} \times_\mu S^1$, 其中 $\lambda = \sinh t$, $\mu = \cosh t$. 此时 (3.8) 成为

$$u = \arcsin \frac{c}{\cosh t_0 \sqrt{1+c^2}} - \arcsin \frac{c}{\cosh t \sqrt{1+c^2}} + u_0,$$

对应的旋转超曲面是曲率为 $-(1+c^2)$ 的伪球面.

例 3.3 镜面对称时空: Black-hole 问题往往涉及如下形式的镜面对称 Lorentz 度量

$$\langle, \rangle = \frac{1}{f^2(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 - f^2(r) du^2,$$

其中 $f(r)$ 称为镜面函数. 事实上, 它就是静态 AdS 时空 (1.2). 这是因为: 作参数变换 $\frac{dr}{dt} = f(r)$, 以上度量就化成 (1.2) 的形式, 其中 $\lambda = r(t)$, $\mu = f(r(t))$ 且满足 $\mu(t) = \lambda'(t)$; 反过来, 当 $\mu(t) = \lambda'(t)$ 时, 令 $r = \lambda(t)$, Lorentz 度量 (1.2) 就化为如上镜面对称的 Lorentz 度量, 其中 $f(r) = \lambda'(\lambda^{-1}(r))$, 这里的 λ^{-1} 是 $r = \lambda(t)$ 的反函数. 利用

$$\begin{aligned} \lambda &= r(t), & \lambda' &= f(r), \\ \lambda'' &= f \frac{dN}{dr}, & \lambda''' &= f^2 \frac{d^2 N}{dr^2} + f \frac{dN^2}{dr}, \end{aligned}$$

离差函数 $\tau = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 f^2}{dr^2} + \frac{n-3}{r} \frac{df^2}{dr} - 2(n-2) \frac{f^2-1}{r^2} \right]$.

例如 $f^2(r) = 1 - (\frac{2m}{r})^{n-2}$ 对应的时空是 $n+1$ 维广义 Schwarzschild-Tangherlini 时空 (Ricci 平坦). 特别地, 当 $n=3$ 时就是经典的 Schwarzschild 时空 (见 [4, 5]).

4 常平均曲率的类空超曲面

本节我们仅限考虑静态 AdS 时空, 即赋予 \overline{M} 以 Lorentz 度量

$$\langle, \rangle = dt^2 + \lambda^2(t) d\Omega^2 - (\lambda')^2(t) du^2,$$

其中奇函数 λ 适合条件 (1.1).

设 M 为 \bar{M} 中紧致带边的类空超曲面. 用 ∇ 和 $A : TM \rightarrow TM$ 分别表示 M 的 Levi-Civita 联络和 Weingarten 变换, 那么 Gauss 和 Weingarten 方程分别是

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N, \quad (4.1)$$

$$A(X) = -\bar{\nabla}_X N, \quad (4.2)$$

$\forall X, Y \in TM$. Codazzi 方程为

$$-\bar{R}(X, Y)N]^T = (\nabla_X A)(Y) - (\nabla_Y A)(X), \quad (4.3)$$

其中 N 是单位类时法向量, 上标 “ T ” 表示切投影. 令平均曲率 $h = \frac{1}{n}\text{tr}(A)$, 平均曲率向量 $H = \frac{1}{n}\text{tr}(\sigma)$, 则有 $H = hN$.

以下通过计算切向量场的散度来得到一些积分公式. 首先由 J 的反对称性, $J(N) = K_0(\partial_t, \partial_u)N$ 是切向量场 (除 $M \cap \Gamma$ 外, $J(N)$ 有定义). 利用 (2.4) 和 (2.5) 并注意 $\bar{\nabla}K_0 = 0$, 求共变导数得

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X J(N) &= K_0(\bar{\nabla}_X \partial_t, \partial_u)N + K_0(\partial_t, \bar{\nabla}_X \partial_u)N - K_0(\partial_t, \partial_u)AX \\ &= -(\log \lambda)' \langle X, \partial_t \rangle K_0(\partial_t, \partial_u)N + (\log \lambda)' K_0(X, \partial_u)N \\ &\quad - (\log \mu)' K_0(\partial_t, JX)N - K_0(\partial_t, \partial_u)AX \\ &= -(\log \lambda)' \langle X, \partial_t \rangle JN + (\log \lambda)' \langle N, \partial_u \rangle X \\ &\quad - (\log \mu)' [\langle JX, N \rangle \partial_t - \langle N, \partial_t \rangle JX] - J \circ A(X), \end{aligned}$$

其中 X 切于 M . 注意到 J 的反对称性, 有 $\text{tr}(J \circ A) = 0$, 故有

$$\begin{aligned} \text{div } JN &= -(\log \lambda)' \langle JN, \partial_t^T \rangle + n(\log \lambda)' \langle N, \partial_u \rangle - (\log \mu)' \langle J(\partial_t^T), N \rangle \\ &= (\log \lambda)' \langle N, J(\partial_t) \rangle + n(\log \lambda)' \langle N, \partial_u \rangle - (\log \mu)' \langle J(\partial_t), N \rangle \\ &= (\log \lambda^{n-1} \mu)' \langle N, \partial_u \rangle. \end{aligned}$$

由此, 对任意径向函数 $f \circ \pi_t$, 有

$$\begin{aligned} \text{div}[fJN] &= f'(t) \langle JN, \partial_t^T \rangle + f(t) \text{div } JN \\ &= [f'(t) + f(t)(\log \lambda^{n-1} \mu)'] \langle N, \partial_u \rangle. \end{aligned}$$

选取适当的 $f(t) \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, 使得

$$\text{div}[fJN] = \langle N, \partial_u \rangle, \quad (4.4)$$

即 $f'(t) + f(t)(\log \lambda^{n-1} \mu)' = 1$. 积分得到

$$f(t) = \frac{1}{\lambda^{n-1} \mu} \int_0^t \lambda^{n-1} \mu dt,$$

不难验证

$$f(0) \doteq \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \frac{1}{n},$$

由此得到 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{\lambda(t)} = \frac{1}{n}$, 这表明 $fJN = \frac{f(t)}{\lambda(t)} K_0(V, \partial_u)N$ 可以连续地延拓到 $M \cap \Gamma$ 上. 特别地, 当 $\mu = \lambda'$ 时, 有 $f = \frac{\lambda}{n\lambda'}$, 此时 $fJN = \frac{1}{n\lambda'(t)} K_0(V, \partial_u)N$ 是 M 上整体有定义的光滑切向量场. 对 (4.4) 两边积分, 利用散度定理得到

命题 4.1 设 M 为静态 AdS 时空 \bar{M} 上紧致带边的类空超曲面, ν 是 $\partial M \subset M$ 的余法向量且指向内部, 则

$$n \int_M \langle N, \partial_u \rangle dM = - \int_{\partial M} \lambda \langle \tilde{J}N, \nu \rangle dS. \quad (4.5)$$

其次考虑切向量场 $\partial_u^T = \partial_u + \langle N, \partial_u \rangle N$. 利用 (2.5),

$$\bar{\nabla}_X \partial_u^T = -(\log \mu)' JX + X \langle N, \partial_u \rangle N - \langle N, \partial_u \rangle AX,$$

其中切部分为

$$\nabla_X \partial_u^T = -(\log \mu)' (JX)^T - \langle N, \partial_u \rangle AX. \quad (4.6)$$

因此

$$\operatorname{div} \partial_u^T = -nh \langle N, \partial_u \rangle, \quad (4.7)$$

对此积分得到

$$n \int_M h \langle N, \partial_u \rangle dM = \int_{\partial M} \langle \partial_u, \nu \rangle dS,$$

联合 (4.5) 导出:

命题 4.2 设 M 为静态 AdS 时空 \bar{M} 上紧致带边的类空超曲面, 如果 M 具有常平均曲率, 则

$$\int_{\partial M} \langle \partial_u, \nu \rangle dS = -h \int_{\partial M} \lambda \langle \tilde{J}N, \nu \rangle dS. \quad (4.8)$$

最后计算 $A\partial_u^T$ 的散度. 利用 Codazzi 方程 (4.3), 有

$$\begin{aligned} \nabla_X A\partial_u^T &= (\nabla_X A)(\partial_u^T) + A(\nabla_X \partial_u^T) \\ &= (\nabla_{\partial_u^T} A)(X) - [\bar{R}(X, \partial_u^T)N]^T + A(\nabla_X \partial_u^T). \end{aligned}$$

利用 (4.6),

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A\partial_u^T &= n \langle \nabla h, \partial_u^T \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, \partial_u^T)N, e_i \rangle - (\log \mu)' \operatorname{tr}(A \circ J) - \langle N, \partial_u \rangle \operatorname{tr} A^2 \\ &= n \langle \nabla h, \partial_u^T \rangle - \operatorname{Ric}(\partial_u^T, N) - \langle N, \partial_u \rangle \operatorname{tr} A^2. \end{aligned}$$

由此结合 (4.7) 一起导出

$$\operatorname{div}(A\partial_u^T - h\partial_u^T) = (n-1) \langle \nabla h, \partial_u^T \rangle - (\operatorname{tr} A^2 - nh^2) \langle N, \partial_u \rangle - \operatorname{Ric}(\partial_u^T, N),$$

因此, 当平均曲率是常数时, 积分得到

命题 4.3 在命题 4.2 的条件下有

$$\int_{\partial M} \langle A\partial_u^T - h\partial_u^T, \nu \rangle dS = \int_M (\operatorname{tr} A^2 - nh^2) \langle N, \partial_u \rangle dM + \int_M \operatorname{Ric}(\partial_u^T, N) dM. \quad (4.9)$$

下面利用积分公式 (4.5), (4.8) 和 (4.9) 来证明本文的主要结果.

定理 4.1 设 \bar{M} 为静态 AdS 时空, 如果 \bar{M} 具有非负离差的度量 (即 $\tau \geq 0$), 则以圆球面 $S^{n-1}(t_0, u_0)$ 为边界的紧致的常平均曲率类空超曲面必为测地圆盘 ($h = 0$) 或全脐盖 ($h \neq 0$).

证 设 M 为 \bar{M} 中以 $n-1$ 维圆球面 $S^{n-1}(t_0, u_0)$ 为边界的紧致常平均曲率类空超曲面. 当 $h=0$ 时, 考虑高度函数 $u(p) = \pi_I(p)$, $p \in M$, 利用 (2.5) 易得 $\Delta u = 0$. 根据极大原理, $u = u_0$, 此时 M 是测地圆盘.

当 $h \neq 0$ 时, 选取单位类时法向量场 N , 使得

$$\left\langle N, \frac{1}{\lambda} \partial_u \right\rangle \leq -1,$$

因此

$$\int_M (\text{tr} A^2 - nh^2) \langle N, \partial_u \rangle dM \leq 0,$$

其中等式成立当且仅当 M 是全脐超曲面. 又由 (2.11),

$$\overline{\text{Ric}}(\partial_u^T, N) = \tau(t) \langle \tilde{J} \partial_u^T, \tilde{J} N \rangle = -\tau(t) \langle \partial_u^T, \tilde{J}^2 N \rangle.$$

注意到 $\tilde{J}^2|_{S^\perp} = 1$ 及 $\ker \tilde{J} = TS^{n-1}$, 法向量 N 在 $S^\perp \oplus TS^{n-1}$ 上可正交分解为

$$N = \tilde{J}^2 N + \pi_S(N),$$

由此得

$$\langle \partial_u^T, \tilde{J}^2 N \rangle = \langle \partial_u^T, N - \pi_S(N) \rangle = -\langle \partial_u^T, \pi_S(N) \rangle.$$

而 $\partial_u^T = \partial_u + \langle N, \partial_u \rangle N$, 故有

$$\begin{aligned} \langle \partial_u^T, \tilde{J}^2 N \rangle &= -\langle \partial_u + \langle N, \partial_u \rangle N, \pi_S(N) \rangle \\ &= -\langle N, \partial_u \rangle \langle N, \pi_S(N) \rangle \\ &= -\langle N, \partial_u \rangle \langle \tilde{J}^2 N + \pi_S(N), \pi_S(N) \rangle \\ &= -\langle N, \partial_u \rangle |\pi_S(N)|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

在非负离差的假设下, 就有

$$\int_M \text{Ric}(\partial_u^T, N) dM \leq 0.$$

于是积分 (4.9) 表明

$$\int_{\partial M} \langle A \partial_u^T, \nu \rangle dS \leq h \int_{\partial M} \langle \partial_u^T, \nu \rangle dS, \quad (4.10)$$

并且等号成立当且仅当 M 全脐且 $\pi_S(N) = 0$.

下面我们限于球面边界 $\partial M = S^{n-1}(t_0, u_0)$ 上计算. 因 ∂_u 垂直于球面边界, 有

$$\partial_u|_{\partial M} = \langle \partial_u, \nu \rangle \nu - \langle \partial_u, N \rangle N,$$

从而

$$\langle A \partial_u^T, \nu \rangle = \langle \partial_u, A \nu \rangle = \langle \partial_u, \nu \rangle \langle A \nu, \nu \rangle, \quad (4.11)$$

其中

$$\langle A \nu, \nu \rangle = nh - \sum_{i=1}^{n-1} \langle A E_i, E_i \rangle = nh - \sum_{i=1}^{n-1} \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} E_i \rangle, \quad (4.12)$$

这里的 E_i ($i = 1, \dots, n-1$) 是切于边界的单位正交基. 为了计算 $\bar{\nabla}_{E_i} E_i$, 我们利用如下几何结构: 边界 $S^{n-1}(t_0, u_0)$ 是叶片 $u = u_0$ 的全脐超曲面; 叶片 $u = u_0$ 是外围空间的

全测地超曲面. 首先由叶片的全测地性得到 $\bar{\nabla}_{E_i} E_i = \nabla_{E_i}^0 E_i$, 这里 ∇^0 表示叶片 $u = u_0$ 上的联络. 其次, $S^{n-1}(t_0, u_0)$ 作为叶片 $u = u_0$ 的全脐超曲面, 其单位法向量为 ∂_t 且有 $\nabla_{E_i}^0 \partial_t = \frac{\lambda'(t_0)}{\lambda(t_0)} E_i$, 因此

$$\bar{\nabla}_{E_i} E_i = \nabla_{E_i}^S E_i - \langle E_i, \nabla_{E_i}^0 \partial_t \rangle \partial_t = \nabla_{E_i}^S E_i - \frac{\lambda'(t_0)}{\lambda(t_0)} \partial_t,$$

其中 ∇^S 是边界上的联络. 于是

$$\langle N, \bar{\nabla}_{E_i} E_i \rangle_{\partial M} = -\frac{\lambda'(t_0)}{\lambda(t_0)} \langle N, \partial_t \rangle_{\partial M}. \quad (4.13)$$

进一步地, 在边界上将 N 在正交标架 $\{\partial_t, \frac{\partial_u}{\lambda'(t_0)}, E_1, \dots, E_{n-1}\}$ 下分解为

$$N = \langle N, \partial_t \rangle \partial_t - \left\langle N, \frac{\partial_u}{\lambda'(t_0)} \right\rangle \frac{\partial_u}{\lambda'(t_0)},$$

那么

$$\tilde{J}N = \left\langle N, \frac{\partial_u}{\lambda'(t_0)} \right\rangle \partial_t - \langle N, \partial_t \rangle \frac{\partial_u}{\lambda'(t_0)},$$

而在边界上, ν 与 $\tilde{J}N$ 一样, 都是垂直于 N, E_i 的单位向量, 故有 $\nu = \epsilon \tilde{J}N$, 其中 $\epsilon = \pm 1$. 注意到 $\langle N, \partial_u \rangle < 0$, 将 $\nu = \epsilon \tilde{J}N$ 代入 (4.5) 即刻得到 $\epsilon = 1$. 于是

$$\nu = \tilde{J}N = \langle N, \partial_u \rangle \frac{\partial_t}{\lambda'(t_0)} - \langle N, \partial_t \rangle \frac{\partial_u}{\lambda'(t_0)},$$

与 ∂_u 作内积得 $\langle \partial_u, \nu \rangle = \lambda'(t_0) \langle N, \partial_t \rangle_{\partial M}$. 依次代回 (4.13), (4.12) 和 (4.11), 导出

$$\langle A \partial_u^T, \nu \rangle = \langle \partial_u, \nu \rangle \left[nh + (n-1) \frac{\langle \partial_u, \nu \rangle}{\lambda(t_0)} \right], \quad (4.14)$$

因此 (4.10) 成为

$$\int_{\partial M} \langle \partial_u, \nu \rangle^2 dS \leq -h\lambda(t_0) \int_{\partial M} \langle \partial_u, \nu \rangle dS. \quad (4.15)$$

再次利用 $\tilde{J}N = \nu$, 积分 (4.8) 得

$$\int_{\partial M} \langle \partial_u, \nu \rangle dS = -h\lambda(t_0) \text{vol}(\partial M),$$

代入 (4.15),

$$\int_{\partial M} \langle \partial_u, \nu \rangle^2 dS \leq h^2 \lambda(t_0)^2 \text{vol}(\partial M), \quad (4.16)$$

其中等号成立当且仅当 M 全脐且 $\pi_S(N) = 0$.

另一方面, 利用 Schwartz 不等式,

$$\left(\int_{\partial M} \langle \partial_u, \nu \rangle^2 dS \right) \left(\int_{\partial M} dS \right) \geq \left(\int_{\partial M} \langle \partial_u, \nu \rangle dS \right)^2,$$

因此

$$\int_{\partial M} \langle \partial_u, \nu \rangle^2 dS \geq h^2 \lambda^2(t_0) \text{vol}(\partial M),$$

于是 (4.16) 中的等号成立, 因而 M 是全脐的且 $\pi_S(N) = 0$, 这表明 M 关于 Γ 旋转对称.

推论 4.1 如果静态 AdS 时空 \bar{M} 具有 Einstein 度量, 则 \bar{M} 中以圆球面 $S^{n-1}(t_0, u_0)$ 为边界的紧致的常平均曲率类空超曲面必为测地圆盘 ($h = 0$) 或全脐盖 ($h \neq 0$).

设 $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{l^2-1}) = \{x \in \text{AdS}^{n+1} : x_{n+1} = l \cos \theta_0, x_{n+2} = l \sin \theta_0 (|l| > 1)\}$ 是 $\text{AdS}^{n+1}(-1)$ 中半径为 $\sqrt{l^2-1}$ 的 $n-1$ 维圆球面, 则有

推论 4.2 $\text{AdS}^{n+1}(-1)$ 中以 $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{l^2-1})$ 为边界的紧致的常平均曲率类空超曲面必为伪球面盖 (曲率 ≤ -1).

参 考 文 献

- [1] Beem J. K. and Ehrlich P. E., *Global Lorentzian Geometry* [M], 2nd ed., New York: Marcel Dekker, 1996.
- [2] Sanchez M., On the geometry of static spacetimes [J], *Nonlinear Analysis*, 2005, 63:455–463.
- [3] Montiel S., Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds [J], *Indiana Univ. Math. J.*, 1999, 48:711–748.
- [4] Besse A., *Einstein Manifolds, Modern Survey in Mathematics* [M], Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [5] Gibbons G. W., Hartnoll A. and Pope C. N., Bohm and Einstein-Sasaki metrics, black holes and cosmological event horizons [J], *Phys. Rev. D*, 2003, 67:84–107.
- [6] Alde J. A., Lopez R. and Pastor J. A., Compact spacelike surfaces with constant mean curvature in the Lorentz-Minkowski 3-space [J], *Tohoku Math.*, 1998, 50:491–501.
- [7] Unal B., Multiply warped products [J], *Journal of Geometry and Physics*, 2000, 34:287–301.

Space-Like Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Static AdS Space-Times

ZHANG Yuanzheng*

*Department of Applied Mathematics, Shanghai University of Economics and Finances, Shanghai 200433, China. E-mail: yzzh@mail.shufe.edu.cn

Abstract The author constructs some integral formulas for space-like hypersurfaces in the static AdS space-times, and uses them to show that only the geodesic n -disc and the umbilical caps in the static AdS space-times, with non-negative deviation, are the space-like hypersurfaces with constant mean curvatures which are bounded by an $(n-1)$ -round sphere. As a corollary, it holds for static AdS space-times with Einstein metric.

Keywords Einstein metric, Deviation function, Integral formulas, Warped product

2000 MR Subject Classification 53C42