数 学 年 刊
2009,30A(6):811–828

完备强对偶原子分配格上的不可约极小并分解及其应用**

屈小兵* 王学平*

提要 在完备强对偶原子分配格上引入了不可约极小并分解的概念，给出了元素存在不可约极小并分解的一些充要条件．证明了当元素恰有一个下邻时，该元素就是完全并既约元；有两个下邻时，元素的不可约极小并分解与不可约完全并既分解是等价的；下邻多于两个时，元素的不可约极小并分解不一定是不可约完全并既分解．最后证明了模糊关系方程有极小解的充要条件是方程左边有大于等于右手项的系数或右手项系数有不可约极小并分解．

关键词 完备格，分配格，强对偶原子格，不可约极小并分解，模糊关系方程，极小解
MR (2000) 主题分类 06B15, 06D05, 03E72
中图法分类 O153.1, O159
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2009)06-0811-18

1 引 言

1940 年， Dilworth [1] 讨论了满足降链条件的格中每一个元素都有惟一不可约完全并既分解的条件；1960 年和 1961 年，Dilworth [2] 和 Crawley [3] 又分别讨论了不满足特殊链条件和非半模格中元素的完全并既分解问题，得到了对偶紧生成格中每一个元素都有完全并既分解，对偶紧生成的强对偶原子格中每一个元素都有不可约完全并既分解，以及对偶紧生成的强对偶原子格是有惟一不可约完全并既分解和有可替换的不可约完全并既分解的一些充要条件等重要结论．在这之后，文 [4–9] 等先后在一定条件下刻画了具有惟一不可约完全并既分解的格．最近， Semyonova [10, 11] 也对有惟一不可约完全并既分解的格进行了讨论．不仅如此，格上元素的分解问题在格代数系统很多其它理论的研究中也占有重要地位，如格上关系方程的求解等 (见 [12])．设 $A=(a_{ij})_{I\times J}$ 为取值于完备 Brouwer 格 (又称为完备 Heyting 代数) L 上的系数矩阵 (其中 I 与 J 均为指标集)．$B=(b_i)_{i\in I}$ 为取值于完备 Brouwer 格 L 上的列向量，则称矩阵方程

$$A\odot X=B \tag{1.1}$$

为定义于完备 Brouwer 格 L 上的模糊关系方程 (见 [13]), 其中 “$\odot$” 表示 “sup-inf” (“$\vee$-$\wedge$”) 合成．满足方程 (1.1) 的 X 称为方程 (1.1) 的解，记 $\mathscr{X}_1=\{X=(x_j)_{j\in J}: A\odot X=B\}$．方程 (1.1) 的一种特殊形式为

$$A\odot X=b \tag{1.2}$$

或

$$\bigvee_{i\in I}(a_i\wedge x_i)=b,$$

本文 2008 年 9 月 16 日收到， 2008 年 12 月 26 日收到修改稿．
*四川师范大学数学与软件科学学院，成都 610066．
E-mail: quxiaobing2002@hotmail.com; xpwang1@hotmail.com
**国家自然科学基金 (No. 10671138) 与四川省青年基金 (No. 05ZQ026-003) 资助的项目．

记 $\mathscr{X}=\left\{X=(x_i)_{i\in I}: b=\bigvee_{i\in I}(a_i\wedge x_i)\right\}$. 完备 Brouwer 格上模糊关系方程的研究始于文 [13], 研究表明：如果 $\mathscr{X}_1\neq\varnothing$, 则 $\mathscr{X}_1$ 是有最大元的并半格 (见 [13]); 当 I 与 J 均为有限指标集，并假定右手项系数 B 的每个分量 b_i 或 b 有不可约有限并既分解时，文 [14, 15] 分别给出了方程的解集，文 [16, 17] 证明了在解集非空时每一个解有极小解，甚至给出了 $\mathscr{X}$ 中极小元的个数公式； 2003 年，文 [12] 证明了方程 (1.2) 在解集非空时每一解有极小解的充要条件就是 b 有某种并分解. 我们要问的是该并分解到底是什么？为此，文 [18, 19] 在完备格上提出了连续并既约元及连续并既分解的概念，并应用它们的性质刻画了方程 (1.2) 的解集. 但不难看出 b 有连续并既约元及连续并既分解仅是我们能刻画方程 (1.2) 解集的一个充分条件，不能回答前面的问题. 本文将在完备强对偶原子分配格上深入讨论元素的并分解问题，首先讨论元素的并分解与不可约并分解的一些性质，然后引入不可约极小并分解的概念，得到了元素具有不可约极小并分解及不可约完全并既分解的一些充要条件. 证明了当元素只有两个下邻时，元素的不可约极小并分解与不可约完全并既分解是等价的；当元素的下邻多于两个时，元素的不可约极小并分解不一定是不可约完全并既分解. 并构造了元素有不可约极小并分解但没有不可约完全并既分解的完备强对偶原子分配格的例子. 最后运用不可约极小并分解的性质，得到了模糊关系方程 (1.2) 有极小解的一个充要条件，刻画了一类模糊关系方程 (1.2) 的解集，回答了前面的问题.

下面是本文一些常用的记号：设 $L=\langle L,\leqslant,\vee,\wedge\rangle$ 是一个完备格，用 0 和 1 分别表示 L 的最小元和最大元，$a,b\in L$, $a\vee b=\sup\{a,b\}$, $a\wedge b=\inf\{a,b\}$. $a\|b$ 表示 $a\ngeqslant b$ 且 $a\nleqslant b$. 记 $\downarrow a=\{x\in L: x\leqslant a\}$, $\updownarrow a=\{x\in L: x<a\}$; 若 $a\leqslant b$, 记 $a\varepsilon b=\inf\{x\in L: a\vee x=b\}$. 设 A, B 是两个集合， $A-B$ 表示由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合. 特别地，当 $B=\{b\}$ 时，则记 $A-B=A-b$. $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数.

定义 1.1 (见 [20]) 设 P 为偏序集， a, $b\in P$, $a>b$, 如果不存在 $x\in P$, 使得 $a>x>b$ 成立，则称 b 是 a 的下邻或者 a 是 b 的上邻. 记作 $b\prec a$ 或者 $a\succ b$. 如果 P 中有最小元，则称最小元的上邻为 P 中的原子. 对偶地，如果 P 中有最大元，则称最大元的下邻为 P 中的对偶原子.

定义 1.2 (见 [21]) 设 L 是一个格, 若 $\forall a,b\in L$, $a>b$, 子格 $a/b=\{x\in L: a\geqslant x\geqslant b\}$ 中存在对偶原子，则称格 L 为强对偶原子格. 如果格 L 还是分配格，则称格 L 为强对偶原子分配格.

显然，如果格 L 是强对偶原子格，则 L 中任何非最小元都存在下邻.

定义 1.3 (见 [20]) 设 L 为格， $a\in L$, 如果 $\forall x,y\in L$, $a=x\vee y$ 蕴含 $x=a$ 或 $y=a$, 则称 a 为格 L 的并既约元. 记 $J(L)=\{a\in L: a$ 是并既约元$\}$.

定义 1.4 (见 [21]) 设 L 为完备格, $a\in L$, 如果 $\forall S\subseteq L$, 由 $a=\vee S$ 可推出 $a\in S$, 则称 a 为格 L 的完全并既约元. 易见, 完全并既约元是并既约元的特例. 记 $W(L)=\{a\in L: a$ 是完全并既约元$\}$.

定义 1.5 (见 [21]) 设 L 为完备格， $a\in L$, 如果存在 $W(L)$ 的子集 Q, 使 $a=\vee Q$, 则称 a 有完全并既分解. 进一步地，若 $\forall p\in Q$, $a\neq\vee(Q-p)$, 则称 a 有不可约完全并既分解.

定义 1.6 (见 [20])　设 L 是完备格，若 $\forall a \in L$, $B \subseteq L$, $B \neq \varnothing$, 有 $a \wedge \left(\bigvee_{b \in B} b\right) = \bigvee_{b \in B}(a \wedge b)$, 则称格 L 是交无限分配格．对偶的可定义并无限分配格.

定义 1.7 (见 [20])　设 L 是格，$\forall a, b \in L$, 如果由 $a \succ a \wedge b$ 可推出 $a \vee b \succ b$, 则称格 L 是上半模格．对偶的可定义下半模格.

引理 1.1 (见 [20])　格 L 为完备 Brouwer 格的充要条件是 L 是交无限分配格.

引理 1.2 (见 [20])　如果 p 为分配格 L 的并既约元，则 $p \leqslant \bigvee_{i \in \underline{k}} x_i$ 蕴含着存在 $i \in \underline{k}$, 使 $p \leqslant x_i$, 其中 $\underline{k} = \{1, 2, \cdots, k\}$.

引理 1.3 (见 [20])　设 L 是模格, 则 L 既是上半模格也是下半模格. 分配格是模格.

引理 1.4 (见 [21])　设 L 是完备格，$a \in J(L)$, 则 $a \in W(L)$ 的充要条件是 a 有惟一下邻.

注 1.1　由引理 1.4 可知, 如果格 L 是强对偶原子格, 则 $\forall p \in J(L)$, $p \neq 0$, $p \in W(L)$.

定义 1.8 (见 [20])　设 S 为一偏序集 P 的非空子集，$a \in S$, 若不存在 $x \in S$, 使 $x < a$, 则称 a 为 S 的一个极小元.

定义 1.9 (见 [22])　称所讨论的模糊关系方程解集中的极小元 (如果存在) 为所讨论的模糊关系方程的一个极小解．记 $\mathscr{X}^0 = \{X \in \mathscr{X} : X$ 是 $\mathscr{X}$ 中的极小元$\}$.

注 1.2　设 $X_* \in \mathscr{X}$, 于是，由定义 1.8 知，X_* 是 $\mathscr{X}$ 的极小元当且仅当 $\forall X \in \mathscr{X}$, 如果 $X \leqslant X_*$, 则 $X = X_*$.

引理 1.5 (见 [16])　$\mathscr{X} \neq \varnothing$ 的充要条件是 $b \leqslant \bigvee_{i \in I} a_i$.

引理 1.6 (见 [12])　如果 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, $X = (x_i)_{i \in I} \in \mathscr{X}^0$, 则 (i) $b = \bigvee_{i \in I} x_i$; (ii) $\forall i \in I$, $x_i \leqslant a_i$.

2　完备强对偶原子分配格上元素的不可约极小并分解

虽然本节的很多讨论可以在更一般的完备强对偶原子格上进行，但为了简便起见，本节把讨论限制在完备强对偶原子分配格上，即本节中的 L 都表示完备强对偶原子分配格．本节主要讨论格 L 中元素的并分解．设 $a \in L$, $a \neq 0$, 记 $N(a) = \{u \in L : u \prec a\}$, $H(a) = \{x \in \downarrow a :$ 存在 $y \in \updownarrow a$, 使得 $x \vee y = a\}$; $\forall x \in L$, 记 $M_a(x) = \{u \in N(a) : x \leqslant u\}$. 显然 $a \in H(a)$, $\forall x \in L$, $M_a(x) \subseteq N(a)$, 并且若 $x \notin \updownarrow a$, 则 $M_a(x) = \varnothing$. 特别地，$M_a(a) = \varnothing$.

引理 2.1　设 $a \in L$, $a \neq 0$, 则 $\forall b \in \updownarrow a$, 存在 $u \in N(a)$, 使得 $b \leqslant u$.

证　由定义 1.2 直接得证.

注 2.1　由引理 2.1 可知，$\forall b \in \updownarrow a$, $M_a(b) \neq \varnothing$.

引理 2.2　设 $a \in L$, $a \neq 0$, 则 $|N(a)| = 1 \Leftrightarrow a \in W(L)$.

证　“$\Rightarrow$” 设 $N(a) = \{u\}$, $x, y \in \downarrow a$, $x \vee y = a$. 若 $x, y \neq a$, 即 $x, y \in \updownarrow a$, 则由引理 2.1 知，$x, y \leqslant u$, 从而 $x \vee y \leqslant u < a$, 矛盾．所以 $x = a$ 与 $y = a$ 至少有一个成立，从而由定

义 1.3 知, $a \in J(L)$, 因此, 由引理 1.4 知, $a \in W(L)$.

"$\Leftarrow$" 由引理 1.4 可直接得证.

引理 2.3 设 $a \in L$, $\forall x, y \in N(a)$, 若 $x \neq y$, 则 $x \vee y = a$, $|N(x) \cap N(y)| = 1$. 进一步地, 若 $x, y, z \in N(a)$, $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$, 则 $N(x) \cap N(y) \neq N(x) \cap N(z)$.

证 若 $x, y \in N(a)$, $x \neq y$, 显然 $x \| y$. 设 $x \vee y = b$, 则 $x \leqslant b \leqslant a$, 因为 $x \| y$, 所以 $x < x \vee y = b$. 又 $x \in N(a)$, 故有 $b = a$, 因此 $x \vee y = a$. 下证 $|N(x) \cap N(y)| = 1$.

(1) 若 $|N(x) \cap N(y)| \geqslant 2$, 设 $u, w \in N(x) \cap N(y)$, $u \neq w$, 即 $u, w \in N(x)$, 并且 $u, w \in N(y)$. 从而由上面的证明, 有 $x = u \vee w = y$, 这与 $x \| y$ 矛盾. 所以 $|N(x) \cap N(y)| \leqslant 1$.

(2) 因为 L 是分配格, 所以 L 是下半模格. 又因为 $a = x \vee y \succ x, y$, 从而由定义 1.7 可知 $x, y \succ x \wedge y$, 即 $|N(x) \cap N(y)| \geqslant 1$. 因此由 (1), (2) 可知, $|N(x) \cap N(y)| = 1$.

设 $x, y, z \in N(a)$, $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$, 则由上面的证明可知, $|N(x) \cap N(y)| = |N(x) \cap N(z)| = 1$. 若 $N(x) \cap N(y) = N(x) \cap N(z)$, 设 $N(x) \cap N(y) = N(x) \cap N(z) = \{p\}$, 则 $x \vee y = x \vee z = a$, $x \wedge y = x \wedge z = p$. 由分配性可知, $y = z$, 这与已知矛盾. 所以 $N(x) \cap N(y) \neq N(x) \cap N(z)$.

推论 2.1 设 $a \in L$, 若 $N(a) \cap J(L) \neq \varnothing$, 则 $|N(a)| \leqslant 2$.

证 设 $u \in N(a) \cap J(L)$, 则 $u \in N(a)$, $u \in J(L)$, 由引理 2.2 知, $|N(u)| = 1$, 设 p 是 u 的惟一下邻. 若 $|N(a)| > 2$, 设 $x, y \in N(a)$, 并且 $x \neq y$, $y \neq u$, $x \neq u$, 由引理 2.3 有 $N(u) \cap N(x) = \{p\}$, $N(u) \cap N(y) = \{p\}$. 从而 $N(u) \cap N(x) = N(u) \cap N(y) = \{p\}$, 这与引理 2.3 矛盾. 所以 $|N(a)| \leqslant 2$.

引理 2.4 设 $a \in L$, $x \in N(a)$, $y \in \updownarrow a$, 若 $y \| x$, 则 $x \vee y = a$.

证 显然 $x \leqslant x \vee y \leqslant a$, 若 $x \vee y \neq a$, 因为 $x \in N(a)$, 则由定义 1.1 可知, $x = x \vee y$, 从而 $y \leqslant x$, 这与 $y \| x$ 矛盾. 所以 $x \vee y = a$.

定义 2.1 设 $a \in L$, $a \neq 0$, $S = \{x_i \in \updownarrow a : i \in I\}$, 若 $a = \vee S$, 则称 $a = \vee S$ 是 a 的一个并分解. 进一步地, 若 $\forall j \in I$, $a \neq \bigvee\limits_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} x_i$, 则称 $a = \vee S$ 是 a 的一个不可约并分解.

注 2.2 若 $a \in J(L)$, 则由定义 1.3 和 2.1 知, a 没有并分解. 进一步地, 若 $a \in L$, a 有并分解, 则 $|N(a)| \geqslant 2$.

定理 2.1 设 $a \in L$, $S = \{x_i \in \updownarrow a : i \in I\}$, 则 $a = \vee S$ 是 a 的并分解的充要条件是 $\bigcap\limits_{i \in I} M_a(x_i) = \varnothing$.

证 "$\Rightarrow$" 设 $a = \vee S$ 是 a 的一个并分解, 即有 $a = \bigvee\limits_{i \in I} x_i$. 若 $\bigcap\limits_{i \in I} M_a(x_i) \neq \varnothing$, 设 $u \in \bigcap\limits_{i \in I} M_a(x_i)$, 即 $\forall i \in I$, $x_i \leqslant u$. 从而 $\bigvee\limits_{i \in I} x_i \leqslant u < a$. 这与 $a = \bigvee\limits_{i \in I} x_i$ 矛盾. 所以 $\bigcap\limits_{i \in I} M_a(x_i) = \varnothing$.

"$\Leftarrow$" 设 $\bigvee\limits_{i \in I} x_i = b$, 则显然 $b \leqslant a$. 若 $b \neq a$, 即 $b < a$, 则由引理 2.1 知, 存在 $u \in N(a)$, 使得 $b \leqslant u$. 从而 $\forall i \in I$, $x_i \leqslant b \leqslant u$. 因此 $\forall i \in I$, $u \in M_a(x_i)$, 从而 $u \in \bigcap\limits_{i \in I} M_a(x_i)$. 故 $\bigcap\limits_{i \in I} M_a(x_i) \neq \varnothing$, 矛盾. 所以 $a = \bigvee\limits_{i \in I} x_i$, 即 $a = \vee S$ 是 a 的一个并分解.

定理 2.2　设 $a\in L$, $S=\{x_i\in\updownarrow a: i\in I\}$. 若 $a=\vee S$ 是 a 的一个并分解，则 $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约并分解的充要条件是 $\forall k\in I$, $\bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq k}} M_a(x_i)\neq\varnothing$.

证　"$\Rightarrow$"　设 $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约并分解，即 $\forall j\in I$, $a\neq\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} x_i$, 若存在 $k\in I$, 使得 $\bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq k}} M_a(x_i)=\varnothing$, 则由定理 2.1 知，$a=\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq k}} x_i$, 这与已知矛盾. 所以 $\forall k\in I$, $\bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq k}} M_a(x_i)\neq\varnothing$.

"$\Leftarrow$"　若存在 $k\in I$, 使得 $a=\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq k}} x_i$, 则由定理 2.1 知，$\bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq k}} M_a(x_i)=\varnothing$, 这与已知矛盾. 所以 $\forall j\in I$, $a\neq\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} x_i$, 即 $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约并分解.

定理 2.3　设 $a\in L$, $x\in\downarrow a$, 则 $x\in H(a)\Leftrightarrow M_a(x)\subsetneq N(a)$.

证　"$\Rightarrow$"　设 $x\in H(a)$, 若 $x=a$, 则 $M_a(x)=\varnothing$, 显然 $M_a(x)\subsetneq N(a)$. 若 $x\in\updownarrow a$, 则 $\varnothing\neq M_a(x)\subseteq N(a)$, 并且存在 $y\in\updownarrow a$, 使得 $x\vee y=a$. 显然 $M_a(y)\neq\varnothing$, 从而由定理 2.1 可知，$\forall u\in M_a(y)$, $u\in N(a)$, $u\notin M_a(x)$. 故 $M_a(x)\subsetneq N(a)$.

"$\Leftarrow$"　设 $M_a(x)\subsetneq N(a)$, 若 $M_a(x)=\varnothing$, 则 $x=a\in H(a)$. 若 $M_a(x)\neq\varnothing$, 则存在 $w\in N(a)$, 使得 $w\notin M_a(x)$. 从而 $w\|x$, 所以由引理 2.4 可知，$w\vee x=a$, 因此 $x\in H(a)$.

由定理 2.3 可知，若 $x\in\downarrow a$, 则 $x\notin H(a)\Leftrightarrow M_a(x)=N(a)$.

引理 2.5　设 $a\in L$, $x,y\in\updownarrow a$, 若 $x\in H(a)$, 并且 $x\leqslant y$, 则 $y\in H(a)$ 且 $x\in H(y)$.

证　因为 $x\in\updownarrow a$, $x\in H(a)$, 所以存在 $z\in\updownarrow a$, 使得 $x\vee z=a$. 又 $x\leqslant y$, 所以 $a=x\vee z\leqslant y\vee z\leqslant a$, 因此 $y\vee z=a$, 从而 $y\in H(a)$. 因为 $y,z\in\updownarrow a$, $y\vee z=a$, 所以 $y\nleqslant z$, 即有 $y\wedge z<y$. 又 $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)=y\wedge a=y$, 所以 $x\in H(y)$.

下面讨论一个元素具有不可约完全并既分解的条件.

定理 2.4　设 $a\in L$, $u\in\updownarrow a$, 则 $u\in H(a)\cap J(L)\Leftrightarrow$ 存在 $w\in N(a)$, 使得 $w\varepsilon a=u$.

证　"$\Rightarrow$" 设 $u\in H(a)\cap J(L)$, 因为 $u\in\updownarrow a$, 所以 $M_a(u)\neq\varnothing$, 并且 $M_a(u)\subsetneq N(a)$, 从而存在 $w\in N(a)$, 使得 $w\notin M_a(u)$, 从而 $w\|u$ 且 $w\vee u=a$. 记 $S(w)=\{x\in H(a): w\vee x=a\}$, 显然 $u\in S(w)$. $\forall z\in S(w)$, 有 $w\vee(z\wedge u)=(w\vee z)\wedge(w\vee u)=a\wedge a=a$, 从而 $u<a=w\vee(z\wedge u)$, 而 $u\in J(L)$ 且 $w\|u$, 所以由引理 1.2 可知，$u\leqslant z\wedge u\leqslant u$. 从而 $z\wedge u=u$, 即 $u\leqslant z$. 由 z 的任意性可知，$w\varepsilon a=u$.

"$\Leftarrow$"　设 $w\in N(a)$, $w\varepsilon a=u$, 则 $w\vee u=a$, 从而 $u\in H(a)$. 下面证 $u\in J(L)$. 若 $|N(u)|\geqslant 2$, 则 $\forall v\in N(u)$, 一定有 $v\|w$. 否则若存在 $v\in N(u)$, 使得 $v\geqslant w$, 则 $u>v\geqslant w$, 这与 $u\|w$ 矛盾. 若存在 $v\in N(u)$, 使得 $v\leqslant w$, 由 $|N(u)|\geqslant 2$ 知，$v\in H(u)$, 从而存在 $t\in\updownarrow u$, 使得 $v\vee t=u$, 从而 $a=w\vee u=w\vee v\vee t=w\vee t$, 但 $t<u$, 这与 $w\varepsilon a=u$ 矛盾. 所以 $\forall v\in N(u)$, 都有 $v\|w$. 从而，由引理 2.4 可知，$w\vee v=a$, 这与 $w\varepsilon a=u$ 矛盾. 所以 $|N(u)|=1$, 从而，由引理 2.2 可知，$u\in J(L)$. 所以 $u\in H(a)\cap J(L)$.

推论 2.2　设 $a\in L$, 若 $u\in H(a)\cap J(L)$, 则有 (i) 存在 $w\in N(a)$, 使得 $M_a(u)=N(a)-w$; (ii) $\forall x\in\updownarrow u$, $x\notin H(a)$.

证 (i) 若 $a \in J(L)$, 则由引理 2.2 知, $|N(a)| = 1$. 设 $N(a) = \{w\}$, 因为 $M_a(a) = \varnothing$, 所以 $M_a(a) = N(a) - w = \varnothing$. 下设 $a \notin J(L)$. 因为 $u \in H(a) \cap J(L)$, 则由定理 2.4 知, 存在 $w \in N(a)$, 使得 $w\varepsilon a = u$, 从而 $w \notin M_a(u)$. 进一步地, 有 $M_a(u) \cup M_a(w) = N(a)$. 首先显然 $M_a(u) \cup M_a(w) \subseteq N(a)$, $M_a(w) = \{w\}$. 若存在 $t \in N(a) - w$, 使得 $t \notin M_a(u)$, 即 $t \| u$, 则 $t \wedge u < u$ 且 $t \vee w = a$. 从而 $w \vee (t \wedge u) = (w \vee t) \wedge (w \vee u) = a \wedge a = a$, 这与 $w\varepsilon a = u$ 矛盾. 所以 $\forall t \in N(a) - w$, $t \in M_a(u)$. 所以 $N(a) \subseteq M_a(u) \cup M_a(w)$. 因此 $M_a(u) \cup M_a(w) = N(a)$. 故 $M_a(u) = N(a) - w$.

(ii) 若存在 $x \in \updownarrow u$, 使得 $x \in H(a)$, 则由引理 2.5 可知, $x \in H(u)$, 即存在 $y \in \updownarrow u$, 使得 $x \vee y = u$, 这与 $u \in J(L)$ 矛盾.

推论 2.3 设 $a \in L$, 若 $u, w \in H(a) \cap J(L)$, $u \neq w$, 则 $u \| w$.

证 因为 $u \in H(a) \cap J(L)$, $u \neq w$, 若 $u > w$, 则由推论 2.2 知, $w \notin H(a)$, 这与 $w \in H(a) \cap J(L)$ 矛盾. 所以 $u \ngtr w$. 同理 $w \ngtr u$, 所以 $u \| w$.

推论 2.4 设 $a \in L$, 若 $\forall u \in N(a)$, 方程 $u \vee x = a$ 有最小解 $u\varepsilon a$, 则 a 有不可约完全并既分解.

证 设 $N(a) = \{u_j \in L : u_j \prec a, j \in J\}$, 因为 $\forall j \in J$, 方程 $u_j \vee x = a$ 有最小解 $u_j\varepsilon a$, 记 $u_j\varepsilon a = p_j$, 则 $\forall j \in J$, $p_j \in H(a) \cap J(L)$, $M_a(p_j) = N(a) - u_j$. 记 $P = \{p_j : j \in J\}$, 则由定理 2.1 和 2.2 易证, $a = \vee P$ 是 a 的不可约完全并既分解.

推论 2.5 设 $a \in L$, a 有不可约完全并既分解 $a = \vee P$, 则 $\forall x \in H(a)$, 存在 $p \in P$, 使得 $p \leqslant x$.

证 设 $x \in H(a)$, 若 $x = a$ 或者 $x \in P$, 结论显然成立. 若 $x \notin P$ 且 $x \neq a$, 则存在 $y \in \updownarrow a$, 使得 $x \vee y = a$. 所以 $\forall p \in P$, $p \leqslant x \vee y$. 从而由引理 1.2 可知, $p \leqslant x$ 或者 $p \leqslant y$. 若 $\forall p \in P$, $p \nleqslant x$, 则 $\forall p \in P$, $p \leqslant y$. 故 $a = \vee P \leqslant y$, 这与 $y \in \updownarrow a$ 矛盾. 所以存在 $p \in P$, 使得 $p \leqslant x$.

设 $a \in L$, 当 $|N(a)| \geqslant 2$ 时, 记 $\mathscr{M}_a = \{S \subseteq L : a = \vee S$ 是 a 的不可约并分解$\}$.

定理 2.5 设 $a \in L$, $|N(a)| \geqslant 2$, 则 a 有不可约完全并既分解的充要条件是存在 $P \in \mathscr{M}_a$, 使得 $\forall T \in \mathscr{M}_a$, $t \in T$ 都存在 $p \in P$, 满足 $t \geqslant p$.

证 “$\Rightarrow$” 若 a 有不可约完全并既分解, 则由推论 2.5 直接得证.

“$\Leftarrow$” 若存在 $P \in \mathscr{M}_a$, 使得 $\forall T \in \mathscr{M}_a$, $t \in T$ 都存在 $p \in P$, 满足 $t \geqslant p$. 设 $p \in P$, 若 $|N(p)| \geqslant 2$, 不妨设 $p_1, p_2 \in N(p)$, $p_1 \neq p_2$, 则 $p_1 \vee p_2 = p$, 从而 $a = \vee P = p \vee \vee(P - p) = p_1 \vee p_2 \vee \vee(P - p)$. 设 $S = (P - p) \cup \{p_1, p_2\}$, 若 $S \in \mathscr{M}_a$, 则 $\forall q \in P$, $p_1 \ngeqslant q$, 这与已知矛盾. 若 $S \notin \mathscr{M}_a$, 则 $S - p_1 \in \mathscr{M}_a$ 与 $S - p_2 \in \mathscr{M}_a$ 有且仅有一个成立, 同前面证明可得矛盾. 因此 $\forall p \in P$, $|N(p)| = 1$, 从而 $p \in W(L)$, 所以 $a = \vee P$ 是 a 的不可约完全并既分解.

引理 2.6 设 $a, x, y \in L$, 若 $y \leqslant x$, 则 $M_a(x) \subseteq M_a(y)$.

证 若 $M_a(x) = \varnothing$, 结论显然成立. 若 $M_a(x) \neq \varnothing$, 设 $u \in M_a(x)$, 则 $u \in N(a)$ 且 $x \leqslant u$. 因为 $y \leqslant x$, 所以 $y \leqslant u$. 从而 $u \in M_a(y)$. 因此 $M_a(x) \subseteq M_a(y)$.

定理 2.6 设 $a \in L$, $x, y \in \updownarrow a$, 则有 (i) $M_a(x \vee y) = M_a(x) \cap M_a(y)$; (ii) $M_a(x \wedge y) = M_a(x) \cup M_a(y)$.

证 (i) 若 $x \vee y = a$, 则 $M_a(x \vee y) = M_a(a) = \varnothing$. 由定理 2.1 知, $M_a(x) \cap M_a(y) = \varnothing$, 即有 $M_a(x \vee y) = M_a(x) \cap M_a(y)$. 下设 $x \vee y \neq a$. 首先, $\forall u \in M_a(x \vee y)$, 即 $u \in N(a)$ 且 $u \geqslant x \vee y$. 从而 $u \geqslant x$, $u \geqslant y$. 所以 $u \in M_a(x)$, $u \in M_a(y)$, 即 $u \in M_a(x) \cap M_a(y)$. 从而 $M_a(x \vee y) \subseteq M_a(x) \cap M_a(y)$. 其次, $\forall w \in M_a(x) \cap M_a(y)$, 即 $w \in N(a)$, $w \in M_a(x)$, $w \in M_a(y)$. 从而 $w \geqslant x$, $w \geqslant y$. 所以 $w \geqslant x \vee y$, 即 $w \in M_a(x \vee y)$. 从而 $M_a(x \vee y) \supseteq M_a(x) \cap M_a(y)$. 因此 $M_a(x \vee y) = M_a(x) \cap M_a(y)$.

(ii) 因为 $x, y \in \updownarrow a$, $x \wedge y \leqslant x$, $x \wedge y \leqslant y$, 所以由引理 2.6 可知, $M_a(x \wedge y) \supseteq M_a(x)$, $M_a(x \wedge y) \supseteq M_a(y)$. 从而 $M_a(x \wedge y) \supseteq M_a(x) \cup M_a(y)$. 下证 $M_a(x \wedge y) \subseteq M_a(x) \cup M_a(y)$. 若 $w \in N(a)$, $w \notin M_a(x) \cup M_a(y)$, 即 $w \notin M_a(x)$, $w \notin M_a(y)$. 从而 $w \| x$, $w \| y$. 所以由引理 2.4, 有 $w \vee x = a$, $w \vee y = a$. 从而 $w \vee (x \wedge y) = (w \vee x) \wedge (w \vee y) = a \wedge a = a$, 因此 $w \notin M_a(x \wedge y)$. 所以 $M_a(x \wedge y) \subseteq M_a(x) \cup M_a(y)$. 从而 $M_a(x \wedge y) = M_a(x) \cup M_a(y)$.

一般地有下面定理成立，证明从略.

定理 2.7 设 $a \in L$, $x_i \in \updownarrow a$, $i \in I$. 则有 (i) $M_a\Big(\bigvee\limits_{i \in I} x_i\Big) = \bigcap\limits_{i \in I} M_a(x_i)$; (ii) $M_a\Big(\bigwedge\limits_{i \in I} x_i\Big) \supseteq \bigcup\limits_{i \in I} M_a(x_i)$.

推论 2.6 设 $a, b \in L$, $b \in H(a)$, $b \notin J(L)$, 则有 (i) 存在 $b_1 \in N(b)$, 使得 $b_1 \in H(a)$; (ii) 若存在 $w \in N(b)$, 使得 $w \notin H(a)$, 则 $\forall s \in N(b) - w$, 有 $s \in H(a)$.

证 (i) 因为 $b \notin J(L)$, 所以由引理 2.2 知, $|N(b)| \geqslant 2$. 设 b_1, $b_2 \in N(b)$, $b_1 \neq b_2$, 则 $b_1 \vee b_2 = b$. 从而，由定理 2.6 知, $M_a(b) = M_a(b_1) \cap M_a(b_2)$. 若 b_1, $b_2 \notin H(a)$, 则由定理 2.3 知, $M_a(b_1) = M_a(b_2) = N(a)$. 因此有 $M_a(b) = M_a(b_1) \cap M_a(b_2) = N(a)$, 这与 $b \in H(a)$ 矛盾，所以 $b_1 \in H(a)$ 与 $b_2 \in H(a)$ 中至少有一个成立，因此命题成立.

(ii) 因为 $b \notin J(L)$, 所以由引理 2.2 知, $|N(b)| \geqslant 2$. 显然 $\forall s \in N(b) - w$ 都有 $s \vee w = b$. 从而 $M_a(b) = M_a(s) \cap M_a(w)$. 因为 $w \notin H(a)$, 所以由定理 2.3 知, $M_a(w) = N(a)$, 又 $M_a(s) \subseteq N(a)$, 因此 $M_a(b) = M_a(s) \cap M_a(w) = M_a(s)$. 因为 $b \in H(a)$, 从而由定理 2.3 知, $M_a(b) \subsetneq N(a)$, 因此 $M_a(s) \subsetneq N(a)$, 故 $s \in H(a)$.

注 2.3 由推论 2.6 知, 若 $a, b \in L$, $b \in H(a)$ 且 $b \notin J(L)$, 则最多存在一个 $w \in N(b)$, 使得 $w \notin H(a)$. 但 $\forall x \in N(b)$, $x \in H(a)$ 不一定成立. 如下例:

例 2.1 设 N 是全体自然数依数的大小关系反序构成的以 0 为最小元的线性序集, B 表示一个二元格 $\{O, I\}$, 设 $L = N \times B$, 则 L 是一个完备强对偶原子分配格 (见图 1). 显然 $\langle 2, I \rangle \notin J(L)$, $\langle 2, I \rangle \in H(\langle 1, I \rangle)$, $\langle 2, O \rangle \in N(\langle 2, I \rangle)$, 但 $\langle 2, O \rangle \notin H(\langle 1, I \rangle)$.

在例 2.1 中，格 L 是交无限分配格，但不是并无限分配格，因为 $\langle 1, O \rangle \vee \bigwedge\limits_{n \in N} \langle n, I \rangle = \langle 1, O \rangle \vee \langle 0, O \rangle = \langle 1, O \rangle$, $\forall n \in N$, $\langle 1, O \rangle \vee \langle n, I \rangle = \langle 1, I \rangle$, 所以 $\langle 1, O \rangle \vee \bigwedge\limits_{n \in N} \langle n, I \rangle \neq \bigwedge\limits_{n \in N} (\langle 1, O \rangle \vee \langle n, I \rangle) = \langle 1, I \rangle$. 从而格 L 不是完全分配格. 因此完备强对偶原子分配格不一定是完全分配格.

设 $a \in L$, 若 $b \in L$, $b \not\leqslant a$, 则 $M_a(b) = \varnothing$. 在 L 中定义一个二元关系 $\sim_a$ 如下:

$$\forall x, y \in L, \quad x \sim_a y \Leftrightarrow M_a(x) = M_a(y).$$

定理 2.8 设 $a \in L$, 则二元关系 $\sim_a$ 是一个等价关系，并且每一个等价类是 L 的一个并半格.

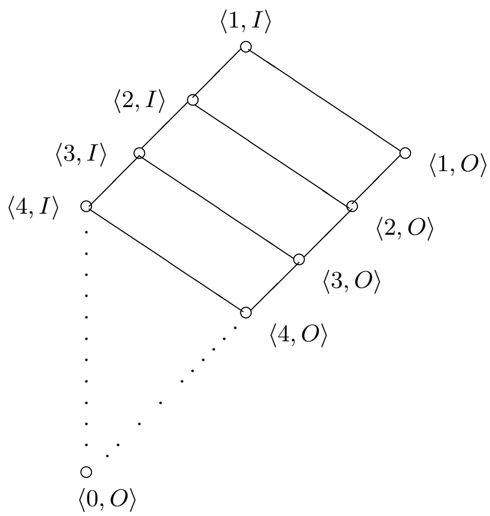

图 1 完备强对偶原子格

证 易证二元关系 $\sim_a$ 是一个等价关系. 设 $b\in L$, 记 $\overline{b}=\{x\in L: x\sim_a b\}\subseteq L$. $\forall x,y\in\overline{b}$, 即 $M_a(x)=M_a(y)=M_a(b)$, 若 $M_a(b)\neq\varnothing$, 则 $\forall u\in M_a(b)$, $x\leqslant u$, $y\leqslant u$, 所以 $x\vee y\leqslant u$. 从而 $u\in M_a(x\vee y)$, 因此 $M_a(b)\subseteq M_a(x\vee y)$. 又因为 $x\leqslant x\vee y$, 所以 $M_a(x\vee y)\subseteq M_a(x)=M_a(b)$. 故有 $M_a(x\vee y)=M_a(b)$. 若 $M_a(b)=\varnothing$, 由引理 2.1 知 x, $y\notin\updownarrow a$, 因此 $x\vee y\notin\updownarrow a$, 故 $M_a(x\vee y)=\varnothing=M_a(b)$. 因此恒有 $M_a(x\vee y)=M_a(b)$. 从而 $x\vee y\in\overline{b}$. 所以 $\overline{b}$ 是一个并半格.

定理 2.9 设 $a\in L$, $b\in\updownarrow a$, 则 $\overline{b}=\{x\in L: x\sim_a b\}$ 是 L 的子格.

证 由定理 2.8 可知, $\overline{b}$ 是一个并半格. $\forall x, y\in\overline{b}$, 即 $M_a(x)=M_a(y)=M_a(b)$, 由定理 2.6 可得 $M_a(x\wedge y)=M_a(x)\cup M_a(y)=M_a(b)$, 所以 $x\wedge y\in\overline{b}$. 从而 $\overline{b}$ 是 L 的子格.

注 2.4 若 $a\in L$, $b\in\updownarrow a$, 则由定理 2.9 知, $\overline{b}$ 是 L 的一个子格. 但 $\overline{b}$ 不一定是 L 的完备子格.

例 2.2 设 $\mathbf{N}$ 为非负整数所构成的集合, $a,b\in\mathbf{N}$, 定义 $a\wedge b=\mathrm{l.c.m}\{a,b\}$, $a\vee b=\mathrm{g.c.d}\{a,b\}$, $a\leqslant b$ 当且仅当 a 是 b 的倍数, 其中 l.c.m 与 g.c.d 分别表示 a 与 b 的最小公倍数与最大公因子, 则 $L=(\mathbf{N},\wedge,\vee,\leqslant)$ 是一完备 Brouwer 格. 易见 0 与 1 分别是完备格 L 的最小元与最大元. 易证格 L 是完备强对偶原子分配格. 在格 L 中, 2 是 1 的一个下邻, $M_1(2)=\{2\}$, $\overline{2}=\{2,4,8,16,\cdots\}$, $\overline{2}$ 是 L 的一个有最大元 2 的子格, 但 $\overline{2}$ 不是 L 的完备子格, 因为 $\bigwedge\limits_{x\in\overline{2}}x=0\notin\overline{2}$.

定理 2.10 设 $a\in L$, $b\in H(a)$, $b\neq a$, $s=\bigwedge\limits_{u\in M_a(b)}u$. 则 $s\in\overline{b}$, 并且 s 是 $\overline{b}$ 中的最大元.

证 因为 $b\in H(a)$, $b\neq a$, 所以由引理 2.1 知, $M_a(b)\neq\varnothing$. $\forall u\in M_a(b)$, $b\leqslant u$, 所以 $b\leqslant\bigwedge\limits_{u\in M_a(b)}u=s$. 从而, 由引理 2.6 有 $M_a(s)\subseteq M_a(b)$. 又 $\forall w\in M_a(b)$, $s=\bigwedge\limits_{u\in M_a(b)}u\leqslant w$, 所以 $w\in M_a(s)$, 从而 $M_a(b)\subseteq M_a(s)$. 因此 $M_a(s)=M_a(b)$, 所以 $s\in\overline{b}$. $\forall x\in\overline{b}$, 即

$M_a(x)=M_a(b)$, 有 $\forall u\in M_a(b)$, $x\leqslant u$, 从而 $x\leqslant \bigwedge\limits_{u\in M_a(b)} u=s$. 因此 s 是 $\overline{b}$ 中的最大元.

注 2.5　由引理 2.5 和定理 2.10 可知，若 $b\in H(a)$, $b\neq a$, 则 $\overline{b}$ 中的最大元 $s=\bigwedge\limits_{u\in M_a(b)} u\in H(a)$.

定理 2.11　设 $a\in L$, $b\in H(a)$, $b\neq a$, $t\in\overline{b}$, 则 t 是 $\overline{b}$ 中的最小元 $\Leftrightarrow$ $\forall w\in N(t)$, $M_a(t)\subsetneq M_a(w)$.

证　"$\Rightarrow$" 设 t 是 $\overline{b}$ 中的最小元，因 $\forall w\in N(t)$, $w<t$, 从而 $M_a(t)\subseteq M_a(w)$. 若存在 $u\in N(t)$, 使得 $M_a(t)=M_a(u)$, 则 $u\in\overline{b}$. 又 $u<t$, 这与 t 是 $\overline{b}$ 中的最小元矛盾．所以 $\forall w\in N(t)$, $M_a(t)\subsetneq M_a(w)$.

"$\Leftarrow$" 设 $\forall w\in N(t)$, $M_a(t)\subsetneq M_a(w)$. 若 t 不是 $\overline{b}$ 中的最小元，即存在 $d\in\overline{b}$, 使得 $d\ngeqslant t$, 则 $d\wedge t<t$, 且 $d\wedge t\in\overline{b}$. 从而由引理 2.1 知，存在 $u\in N(t)$, 使得 $d\wedge t\leqslant u$, 所以 $M_a(u)\subseteq M_a(d\wedge t)$. 因为 $M_a(t)\subsetneq M_a(u)$, 从而 $M_a(t)\subsetneq M_a(d\wedge t)$, 这与 $t, d\wedge t\in\overline{b}$ 矛盾. 所以 t 是 $\overline{b}$ 中的最小元.

定义 2.2　设 $a\in L$, $S=\{x_i\in\updownarrow a: i\in I\}$, $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约并分解，如果 $\forall k\in I$, $y<x_k$, 有 $a\neq\Big(\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq k}} x_i\Big)\vee y$, 则称 $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解.

注 2.6　设 $a\in L$, $|N(a)|\geqslant 2$, 若 a 有不可约完全并既分解 $a=\vee P$, 则由推论 2.2 知，$a=\vee P$ 是 a 的一个不可约极小并分解．但反之，若 a 有不可约极小并分解，a 不一定有不可约完全并既分解.

例 2.3　设格 L_1 是一个四元集合的所有子集按集合包含关系构成的格，L_2 是例 2.1 中的格 L. 设 $L=L_1\cup L_2$, 对 L_2 中的元素重新标记，记 $\langle i,I\rangle$ 为 t_i, $\langle i,O\rangle$ 为 s_i, 其中 $i\in N$, $\langle 0,O\rangle$ 记为 0. 在 L 中定义序关系：t_1 是 L_1 中的一个元素 p_1 的下邻，s_1 是 L_1 中的一个元素 q 的下邻 (见图 2). 则易验证 L 是完备强对偶原子分配格．在 L 中，$1=b_1\vee b_6=b_1\vee p_3\vee p_4$ 都是 1 的不可约极小并分解，但 1 没有不可约完全并既分解.

接下来我们讨论一个元素具有不可约极小并分解的条件及其性质.

定理 2.12　设 $a\in L$, $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约并分解，则 $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解的充要条件是 $\forall x, y\in S$, $x\neq y$, 有 $M_a(x)\cup M_a(y)=N(a)$, 并且 x 是 $\overline{x}$ 中的最小元.

证　"$\Rightarrow$" 设 $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解, 下面首先证明 $\bigcup\limits_{x\in S} M_a(x)=N(a)$. 若 $\bigcup\limits_{x\in S} M_a(x)\neq N(a)$, 即存在 $u\in N(a)$, $u\notin\bigcup\limits_{x\in S} M_a(x)$, 从而 $\forall x\in S$, $u\notin M_a(x)$, 所以 $x\| u$. 因此 $x\vee u=a$, $x\wedge u<x$. 进一步地，设 $y\in S$, $w=\bigvee\limits_{\substack{x\in S\\ x\neq y}} x$, 则有 $w\| u$, 从而 $w\vee(y\wedge u)=\Big(\bigvee\limits_{x\in S} x\Big)\wedge(w\vee u)=a$, 但 $y\wedge u<y$, 这与 $a=\vee S$ 是 a 的不可约极小并分解矛盾．所以 $\bigcup\limits_{x\in S} M_a(x)=N(a)$. 下面证明 $\forall x, y\in S$, $x\neq y$, 有 $M_a(x)\cup M_a(y)=N(a)$. 若 $M_a(x)\cup M_a(y)\neq N(a)$, 则存在 $u\in N(a)$, 使得 $u\notin M_a(x)$, $u\notin M_a(y)$, 从而 $x\vee u=a$, $y\vee u=a$. 又因为 $\bigcup\limits_{x\in S} M_a(x)=N(a)$, 所以存在 $z\in S$, 使得 $u\in M_a(z)$. 因为 $a=\vee S$ 是 a 的

一个不可约极小并分解, 所以 $a=\vee S=x\vee y\vee z\vee(\vee(S-\{x,y,z\}))$, 记 $\vee(S-\{x,y,z\})=b$, 则 $a=x\vee y\vee z\vee b$. 从而 $(x\wedge u)\vee y\vee z\vee b=(x\vee y\vee z\vee b)\wedge(u\vee y\vee z\vee b)=a\wedge(a\vee z\vee b)=a$, 即 $a=(x\wedge u)\vee(\vee(S-x))$, 但 $x\wedge u<x$, 这与 $a=\vee S$ 是 a 的不可约极小并分解矛盾. 所以 $M_a(x)\cup M_a(y)=N(a)$. 最后证明 $\forall x\in S$, x 是 $\overline{x}$ 中的最小元. 若存在 $t\in\overline{x}$, 使得 $t\not\geqslant x$, 则 $M_a(t)=M_a(x)$ 且 $t\wedge x<x$. 设 $\bigvee\limits_{\substack{y\in S\\ y\neq x}} y=c$, 则由定理 2.1 知, $c\vee x=c\vee t=a$, 从而 $\Big(\bigvee\limits_{\substack{y\in S\\ y\neq x}} y\Big)\vee(x\wedge t)=c\vee(x\wedge t)=(c\vee x)\wedge(c\vee t)=a$, 但 $t\wedge x<x$, 这与 $a=\vee S$ 是 a 的不可约极小并分解矛盾. 因此 $\forall x\in S$, x 是 $\overline{x}$ 中的最小元.

"$\Leftarrow$" 若存在 $y\in S$, $t<y$, 使得 $a=\Big(\bigvee\limits_{\substack{x\in S\\ x\neq y}} x\Big)\vee t$, 由引理 2.6 知, $M_a(y)\subseteq M_a(t)$. 若 $M_a(y)\subsetneq M_a(t)$, 即存在 $u\in M_a(t)$, 使得 $u\notin M_a(y)$. 因为 $\forall x\in S$, $x\neq y$, 有 $M_a(x)\cup M_a(y)=N(a)$, 所以 $\forall x\in S$, $x\neq y$, $u\in M_a(x)$. 从而 $\bigvee\limits_{\substack{x\in S\\ x\neq y}} x\leqslant u$, 因此 $\Big(\bigvee\limits_{\substack{x\in S\\ x\neq y}} x\Big)\vee t\leqslant u<a$, 矛盾. 所以 $M_a(y)=M_a(t)$, 从而 $t\in\overline{y}$, 但 $t<y$, 这与 y 是 $\overline{y}$ 中的最小元矛盾. 故由定义 2.2 可知, $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解.

注 2.7 由定理 2.9, 2.10 和 2.12 可知, 若 $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解, 则 $\forall x\in S$, $\overline{x}$ 是 L 的完备强对偶原子分配子格.

定理 2.13 设 $a\in L$, $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解, 若 S_1, S_2 是 S 的一个划分, 设 $\vee S_1=b_1$, $\vee S_2=b_2$, 则 $a=b_1\vee b_2$ 也是 a 的一个不可约极小并分解.

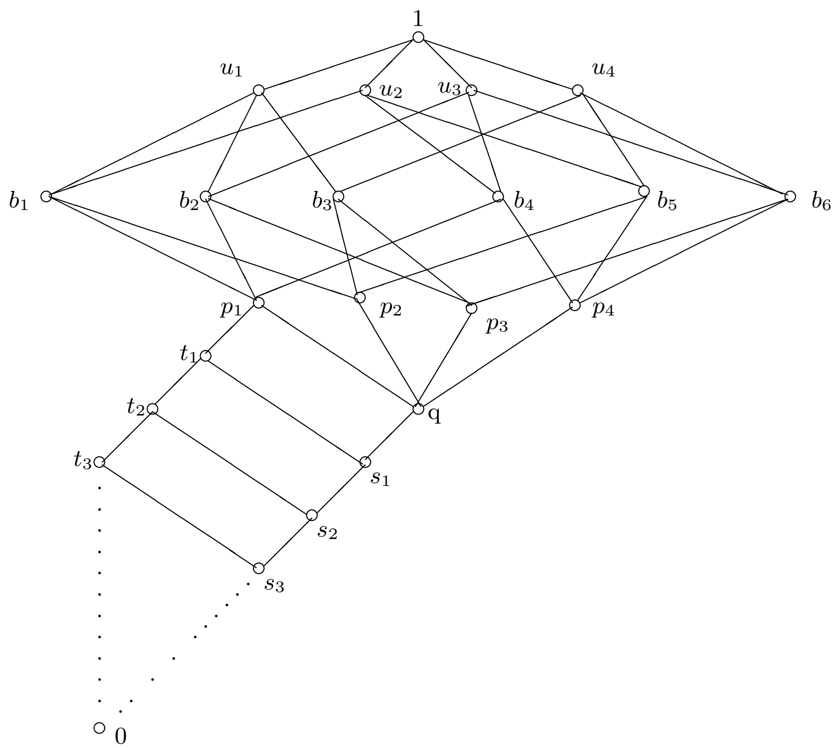

图 2 完备强对偶原子分配格

证　因为 $S_1 \cup S_2 = S$, 所以 $a = \vee S = (\vee S_1) \vee (\vee S_2) = b_1 \vee b_2$. 又 $a = \vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解， $S_1 \neq \varnothing$, $S_2 \neq \varnothing$, 从而 $a \neq b_1$, $a \neq b_2$. 因此 $a = b_1 \vee b_2$ 是 a 的一个不可约并分解. 又由定理 2.7, 有 $M_a(b_1) = M_a(\vee S_1) = \bigcap\limits_{x \in S_1} M_a(x)$, $M_a(b_2) = M_a(\vee S_2) = \bigcap\limits_{y \in S_2} M_a(y)$, 因此 $M_a(b_1) \cup M_a(b_2) = \Big(\bigcap\limits_{x \in S_1} M_a(x)\Big) \cup \Big(\bigcap\limits_{y \in S_2} M_a(y)\Big) = \bigcap\limits_{y \in S_2} \bigcap\limits_{x \in S_1} (M_a(x) \cup M_a(y))$. 由定理 2.12 知， $\forall x \in S_1$, $y \in S_2$ 有 $M_a(x) \cup M_a(y) = N(a)$, 从而 $M_a(b_1) \cup M_a(b_2) = N(a)$. 下面证明 b_1 是 $\overline{b_1}$ 中的最小元. 若存在 $c \in \overline{b_1}$, 使得 $c \ngeqslant b_1$, 则 $M_a(c) = M_a(b_1)$. 因为 $a = b_1 \vee b_2$, 所以由定理 2.1 知， $M_a(b_1) \cap M_a(b_2) = \varnothing$, 从而 $M_a(c) \cap M_a(b_2) = \varnothing$, 因此 $a = c \vee b_2$. 因为 $M_a(b_1) = M_a(\vee S_1) = \bigcap\limits_{x \in S_1} M_a(x)$, 所以 $\bigcap\limits_{x \in S_1} M_a(c \wedge x) = \bigcap\limits_{x \in S_1} (M_a(c) \cup M_a(x)) = M_a(c) \cup \Big(\bigcap\limits_{x \in S_1} M_a(x)\Big) = M_a(c) \cup M_a(b_1)$. 从而 $\Big(\bigcap\limits_{x \in S_1} M_a(c \wedge x)\Big) \cap M_a(b_2) = (M_a(c) \cup M_a(b_1)) \cap M_a(b_2) = (M_a(c) \cap M_a(b_2)) \cup (M_a(b_1) \cap M_a(b_2)) = \varnothing$. 因此由定理 2.1, 有 $\bigvee\limits_{x \in S_1} (c \wedge x) \vee b_2 = a$, 即有 $a = \Big[\bigvee\limits_{x \in S_1} (c \wedge x)\Big] \vee (\vee S_2)$. 因 $a = \vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解，又 $\forall x \in S_1$, $c \wedge x \leqslant x$, 所以 $c \wedge x = x$, 即 $c \geqslant x$. 因此 $c \geqslant \bigvee\limits_{x \in S_1} x = b_1$, 这与 $c \ngeqslant b_1$ 矛盾. 从而 b_1 是 $\overline{b_1}$ 中的最小元. 同理可证 b_2 是 $\overline{b_2}$ 中的最小元. 所以由定理 2.12 知， $a = b_1 \vee b_2$ 也是 a 的一个不可约极小并分解.

易把定理 2.13 推广到一般情形：

定理 2.14　设 $a \in L$, $a = \vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解，若 S_i, $i \in I$ 是 S 的一个划分，设 $\vee S_i = b_i$, 则 $a = \bigvee\limits_{i \in I} b_i$ 也是 a 的一个不可约极小并分解.

定理 2.15　设 $a \in L$, 则 a 有不可约极小并分解的充要条件是存在 $N(a)$ 的一个划分 N_1, N_2, 使得 $\wedge N_1, \wedge N_2 \in H(a)$, $M_a(\wedge N_1) \cap M_a(\wedge N_2) = \varnothing$, 并且 $\overline{\wedge N_1}$, $\overline{\wedge N_2}$ 是 L 的完备子格.

证　“$\Rightarrow$” 设 $a = \vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解, 则由定理 2.13 可知, 存在 S 的一个划分 $S_1, S_2, S_1 \neq \varnothing, S_2 \neq \varnothing$, 使得 $a = (\vee S_1) \vee (\vee S_2)$ 也是 a 的一个不可约极小并分解. 设 $\vee S_1 = b_1$, $\vee S_2 = b_2$, 即 $a = b_1 \vee b_2$ 是 a 的一个不可约极小并分解. 从而由定理 2.1 和 2.12 可得， $M_a(b_1) \cap M_a(b_2) = \varnothing$, $M_a(b_1) \cup M_a(b_2) = N(a)$. 设 $M_a(b_1) = N_1$, $M_a(b_2) = N_2$, 则 N_1, N_2 是 $N(a)$ 的一个划分，并且 $N_1 \neq \varnothing$, $N_2 \neq \varnothing$. 又 b_1, $b_2 \in H(a)$, $b_1 \leqslant \wedge N_1$, $b_2 \leqslant \wedge N_2$, 从而由引理 2.5 与 2.6 可得， $\wedge N_1, \wedge N_2 \in H(a)$, $M_a(\wedge N_1) \cap M_a(\wedge N_2) = \varnothing$. 又由定理 2.10 知， $\wedge N_1 \in \overline{b_1}$, $\wedge N_2 \in \overline{b_2}$, 从而 $\overline{\wedge N_1} = \overline{b_1}$, $\overline{\wedge N_2} = \overline{b_2}$. 又因为 $a = b_1 \vee b_2$ 是 a 的一个不可约极小并分解，因此由注 2.7 知， $\overline{b_1}$ 与 $\overline{b_2}$ 都是 L 的完备子格，所以 $\overline{\wedge N_1}$, $\overline{\wedge N_2}$ 是 L 的完备子格.

“$\Leftarrow$”　设 b_1, b_2 分别是 $\overline{\wedge N_1}$, $\overline{\wedge N_2}$ 中的最小元，则 $M_a(b_1) = M_a(\wedge N_1)$, $M_a(b_2) = M_a(\wedge N_2)$. 易证 $N_1 \subseteq M_a(\wedge N_1)$, $N_2 \subseteq M_a(\wedge N_2)$. 又因为 $N_1 \cup N_2 = N(a)$, $N_1 \cap N_2 = \varnothing$, $M_a(\wedge N_1) \cap M_a(\wedge N_2) = \varnothing$, 所以 $M_a(\wedge N_1) = N_1$, $M_a(\wedge N_2) = N_2$. 从而 $M_a(b_1) = N_1$, $M_a(b_2) = N_2$. 因此 $M_a(b_1) \cap M_a(b_2) = N_1 \cap N_2 = \varnothing$, $M_a(b_1) \cup M_a(b_2) = N_1 \cup N_2 = N(a)$. 又 b_1, b_2 分别是 $\overline{\wedge N_1}$, $\overline{\wedge N_2}$ 中的最小元，所以由定理 2.12 可得， $a = b_1 \vee b_2$ 是 a 的一个不可约极小并分解.

定理 2.16 设 $a=b\vee c$ 是 a 的不可约并分解，则 $a=b\vee c$ 是 a 的不可约极小并分解的充要条件是 $b\wedge c\notin H(b),\ H(c)$.

证 "$\Rightarrow$" 设 $a=b\vee c$ 是 a 的不可约极小并分解，若 $b\wedge c\in H(b)$, 则存在 $d\in\updownarrow b$, 使得 $(b\wedge c)\vee d=b$, 从而 $a=b\vee c=(b\wedge c)\vee d\vee c=d\vee c$, 但 $d<b$, 这与 $a=b\vee c$ 是 a 的不可约极小并分解矛盾. 所以 $b\wedge c\notin H(b)$. 同理有 $b\wedge c\notin H(c)$.

"$\Leftarrow$" 设 $b\wedge c\notin H(b),\ H(c)$. 先证 b 是 $\overline{b}$ 中的最小元. 若存在 $d\in\overline{b}$, 使得 $d\ngeqslant b$, 则 $M_a(d)=M_a(b)$ 且 $b\wedge d<b$. 因为 $a=b\vee c$, 则由定理 2.1 知， $a=c\vee d$, 从而 $(b\wedge d)\vee c=(c\vee b)\wedge(c\vee d)=a$, 因此 $(b\wedge d)\vee(b\wedge c)=((b\wedge d)\vee b)\wedge((b\wedge d)\vee c)=b\wedge a=b$. 因为 $b\wedge d<b$, 所以 $b\wedge c\in H(b)$, 这与已知矛盾，因此 b 是 $\overline{b}$ 中的最小元. 同理可证 c 是 $\overline{c}$ 中的最小元. 下证 $M_a(b)\cup M_a(c)=N(a)$. 若 $M_a(b)\cup M_a(c)\neq N(a)$, 则存在 $u\in N(a)$, 使得 $u\notin M_a(b),\ M_a(c)$, 从而 $u\|b,\ u\|c$, 所以 $c\vee u=a$, $b\wedge u<b$. 从而 $(b\wedge u)\vee c=(b\vee c)\wedge(u\vee c)=a\wedge a=a$, 进一步地，有 $(b\wedge u)\vee(b\wedge c)=b\wedge a=b$. 所以 $b\wedge c\in H(b)$, 这与已知矛盾. 因此 $M_a(b)\cup M_a(c)=N(a)$. 因此由定理 2.12 可知， $a=b\vee c$ 是 a 的不可约极小并分解.

推论 2.7 设 $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解， $x,y\in S$, $x\neq y$, 则 $H(x)\cap H(y)=\varnothing$.

证 设 $x,y\in S$, 若 $x\in J(L)$ 或 $y\in J(L)$, 则 $H(x)=\{x\}$ 或 $H(y)=\{y\}$, 因此 $H(x)\cap H(y)=\varnothing$. 下设 $x,y\notin J(L)$. 若 $H(x)\cap H(y)\neq\varnothing$. 设 $w\in H(x)\cap H(y)$, 即 $w\in H(x),\ H(y)$, 从而存在 $q\in\updownarrow x$, 使得 $q\vee w=x$. 从而 $a=\vee S=x\vee y\vee(\vee(S-\{x,y\}))=(q\vee w)\vee y\vee(\vee(S-\{x,y\}))=q\vee(\vee(S-x))$, 而 $q<x$, 这与 $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解矛盾，所以 $H(x)\cap H(y)=\varnothing$.

推论 2.8 设 $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解， $r\in S$, 则 $\forall x\in H(r)$, $x\in H(a)$.

证 若 $r\in J(L)$, 则 $H(r)=\{r\}$, 显然 $r\in H(a)$. 若 $r\notin J(L)$, 设 $x\in H(r)$, 若 $x=r$, 则显然 $x\in H(a)$. 下设 $x\neq r$, 因 $x\in H(r)$, 则存在 $y\in\updownarrow r$, 使得 $x\vee y=r$, 从而由定理 2.6 知， $M_a(r)=M_a(x)\cap M_a(y)$. 进一步地，有 $M_a(x)\subsetneq N(a)$. 否则，若 $M_a(x)=N(a)$, 则 $M_a(r)=M_a(y)$, 从而 $y\in\overline{r}$, 但 $y<r$, 由定理 2.12 可知，这与 $r\in S$, $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解矛盾. 因此由定理 2.3, 有 $\forall x\in H(r)$, $x\in H(a)$.

由推论 2.8 可知，若 $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约并分解， $r\in S$ 且存在 $x\in H(r)$, 使得 $x\notin H(a)$, 则 $a=\vee S$ 不是 a 的不可约极小并分解.

定理 2.17 设 $a\in L$, $x\vee y=a$ 是 a 的一个不可约极小并分解，若 $x_1\vee x_2=x$ 是 x 的一个不可约极小并分解，则 $x_1\vee x_2\vee y=a$ 也是 a 的一个不可约极小并分解.

证 显然 $x_1\vee x_2\vee y=a$ 是 a 的一个不可约并分解. 由定理 2.6 和 2.12 知， $M_a(x)=M_a(x_1)\cap M_a(x_2)$, $M_a(x)\cup M_a(y)=N(a)$, 从而 $(M_a(x_1)\cap M_a(x_2))\cup M_a(y)=(M_a(x_1)\cup M_a(y))\cap(M_a(x_2)\cup M_a(y))=N(a)$, 又 $M_a(x_1)\cup M_a(y)\subseteq N(a)$, $M_a(x_2))\cup M_a(y)\subseteq N(a)$, 所以 $M_a(x_1)\cup M_a(y)=N(a)$, $M_a(x_2)\cup M_a(y)=N(a)$. 因为 $x_1\vee x_2=x$ 是 x 的一个不可约极小并分解，所以由定理 2.16 知， $x_1\wedge x_2\notin H(x_1)$. 又由引理 2.5 知， $x_1\wedge x_2\notin H(a)$. 因此由定理 2.3 知， $M_a(x_1)\cup M_a(x_2)=M_a(x_1\wedge x_2)=N(a)$. 若存在 $d\in\overline{x_1}$, 使得 $d\ngeqslant x_1$, 则易证 $d\vee x_2\vee y=a$. 进一步地，有 $(d\wedge x_1)\vee x_2\vee y=a$. 因为 $x\vee y=a$ 是 a 的一个不可约极小并分解，所以 $(d\wedge x_1)\vee x_2\geqslant x$. 从而 $x=x_1\vee x_2\geqslant(d\wedge x_1)\vee x_2\geqslant x$, 因此

$x=(d\wedge x_1)\vee x_2$, 但 $d\wedge x_1<x_1$, 这与 $x_1\vee x_2=x$ 是 x 的不可约极小并分解矛盾. 所以 x_1 是 $\overline{x_1}$ 中的最小元. 同理可证 x_2 是 $\overline{x_2}$ 中的最小元. 又 y 是 $\overline{y}$ 中的最小元. 所以由定理 2.12 知, $x_1\vee x_2\vee y=a$ 是 a 的一个不可约极小并分解.

定理 2.18　设 $a\in L$, $|N(a)|=2$, 则 a 有不可约极小并分解的充要条件是 a 有不可约完全并既分解.

证　"⇒" 设 a 有不可约极小并分解 $a=\vee S$, 则易证 $|S|=2$, 不妨设 $S=\{x,y\}$, 即有 $a=x\vee y$, 并且 $M_a(x)\cup M_a(y)=N(a)$, $M_a(x)\neq\varnothing$, $M_a(y)\neq\varnothing$, $M_a(x)\cap M_a(y)=\varnothing$. 因为 $|N(a)|=2$, 所以 $|M_a(x)|=1$, $|M_a(y)|=1$. 因为 $a=\vee S$ 是 a 的不可约极小并分解, 故由定理 2.4 和 2.12 可知, $x,y\in J(L)$, 即 a 有不可约完全并既分解.

"⇐" 由注 2.6 即知.

注 2.8　若 $|N(a)|>2$, 则 a 可以有不可约极小并分解, 但 a 不一定有不可约完全并既分解, 如例 2.3 中元 1 有不可约极小并分解但无不可约完全并既分解, 而 p_1 无不可约极小并分解.

定理 2.19　设 $a\in L$, $|N(a)|\geqslant 2$, 若 $a=\vee P$ 是 a 的不可约完全并既分解, $a=\vee S$ 是 a 的一个不可约极小并分解, 则 $\forall s\in S$, 存在 $P_1\subsetneq P$, 使得 $s=\vee P_1$.

证　设 $s\in S$, 记 $t=\vee(S-s)$, 则由定理 2.13 知, $a=s\vee t$ 也是 a 的一个不可约极小并分解. 由推论 2.5 知, 存在 $p\in P$, 使得 $s\geqslant p$, 存在 $q\in P$ 使得 $t\geqslant q$. 记 $P_1=\{p\in P:s\geqslant p\}$, $P_2=\{p\in P:t\geqslant p\}$, 则 $P_1,P_2\neq\varnothing$ 且 $P_1\cap P_2=\varnothing$, 否则, 若 $P_1\cap P_2\neq\varnothing$, 设 $p_1\in P_1\cap P_2$, 则 $p_1\leqslant s,t$, 因为 $p_1\in H(a)$, 从而由引理 2.5 可知, $p_1\in H(s)$. 因此存在 $q\in\updownarrow s$, 使得 $p_1\vee q=s$. 从而 $a=s\vee t=(p_1\vee q)\vee t=q\vee t$, 但 $q<s$, 这与 $a=s\vee t$ 是 a 的一个不可约极小并分解矛盾. 所以 $P_1\cap P_2=\varnothing$. 又由引理 1.2 可知, $P_1\cup P_2=P$. 从而有 $s=\vee P_1$, 否则设 $\vee P_1=w$, 则 $w<s$, 又 $a=\vee P=(\vee P_1)\vee(\vee P_2)=w\vee(\vee P_2)\leqslant w\vee t\leqslant a$, 因此 $a=w\vee t$, 这与 $a=s\vee t$ 是 a 的一个不可约极小并分解矛盾. 所以 $s=\vee P_1$.

3　模糊关系方程 (1.2) 极小解存在的条件

本节主要讨论完备强对偶原子交无限分配格 L 上模糊关系方程 (1.2) 的解集中极小解存在的条件及解集的刻画问题. 如果 $\mathscr{X}\neq\varnothing$, 则 $\mathscr{X}$ 中有最大解 $X^*=(a_i\alpha b)_{i\in I}$. 若 $b=0$, 显然 $\forall X=(x_i)_{i\in I}\in\mathscr{X}$, 若 $a_i\neq 0$, 则 $x_i\leqslant a_i\alpha 0$; 若 $a_i=0$, 则 $x_i\in L$. 为简便起见, 下面假设 $b\neq 0$. 记 $I_1=\{i\in I$: 存在 $x\in L$, 使得 $a_i\wedge x\in H(b)\}$, $I_2=\{i\in I$: $\forall x\in L$, $a_i\wedge x\notin H(b)\}$. 显然 $I=I_1\cup I_2$, $I_1\cap I_2=\varnothing$. $\forall j\in I$, 记 $S_j=\{x_j\in L$: $X=(x_i)_{i\in I}\in\mathscr{X}\}$.

定理 3.1　设 $i\in I$, 则 $i\in I_1$ 的充要条件是存在 $x\in H(b)$, 使得 $a_i\geqslant x$.

证　"⇒" 若 $i\in I_1$, 则存在 $x\in L$, 使得 $a_i\wedge x\in H(b)$, 显然 $a_i\geqslant a_i\wedge x$.

"⇐" 若存在 $x\in H(b)$, 使得 $a_i\geqslant x$, 则 $x\leqslant a_i\wedge b\leqslant b$, 从而由引理 2.5 知, $a_i\wedge b\in H(b)$, 因此 $i\in I_1$.

推论 3.1　设 $i\in I$, 则 $i\in I_1$ 的充要条件是 $a_i\wedge b\in H(b)$.

证　由定理 3.1 的证明过程直接得证.

推论 3.2　$\mathscr{X}\neq\varnothing$ 的充要条件是 $\bigcap\limits_{i\in I}M_b(a_i\wedge b)=\varnothing$.

证 由引理 1.5 与定理 2.1 直接得证.

定理 3.2 设 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, $j \in I_1$, 若 $b \nleqslant \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} a_i$, 则 $\forall X=(x_i)_{i\in I} \in \mathscr{X}$, $b \neq \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (a_i \wedge x_i)$.

证 若存在 $X=(x_i)_{i\in I} \in \mathscr{X}$, 使得 $b = \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (a_i \wedge x_i)$, 则有 $b \leqslant \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} a_i$, 这与已知矛盾.

定理 3.3 设 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, 若 $j \in I_2$, 则 $b \leqslant \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} a_i$, 并且 $\forall X \in \mathscr{X}$, $b = \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (a_i \wedge x_i)$.

证 因为 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, 所以 $b \leqslant \bigvee\limits_{i\in I} a_i$. 又 $j \in I_2$, 从而 $a_j \wedge b \notin H(b)$. 因此 $b = b \wedge \Big(\bigvee\limits_{i\in I} a_i\Big) = \bigvee\limits_{i\in I} (a_i \wedge b) = \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (a_i \wedge b) \leqslant \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} a_i$. 若存在 $X \in \mathscr{X}$, 使得 $b \neq \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (a_i \wedge x_i)$, 即 $\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (a_i \wedge x_i) < b$. 因为 $b = (a_j \wedge x_j) \vee \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (a_i \wedge x_i)$, 所以 $a_j \wedge x_j \in H(b)$, 从而 $j \in I_1$, 这与 $j \in I_2$ 矛盾. 因此 $\forall X \in \mathscr{X}$, $b = \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (a_i \wedge x_i)$.

定理 3.4 设 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, $X=(x_i)_{i\in I} \leqslant X^*$, 则 $X \in \mathscr{X}$ 的充要条件是 $\bigcap\limits_{i\in I} M_b(a_i \wedge x_i) = \varnothing$.

证 由引理 1.5 和定理 2.1 可直接得证.

由定理 3.4 可得, 若 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, 则

$$\mathscr{X} = \Big\{ X=(x_i)_{i\in I} : X \leqslant X^*, \quad \bigcap_{i\in I} M_b(a_i \wedge x_i) = \varnothing \Big\}.$$

定理 3.5 设 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, $X=(x_i)_{i\in I} \in \mathscr{X}$, 则 $\forall i \in I$, $M_b(a_i \wedge b) \subseteq M_b(a_i \wedge x_i)$.

证 设 $X=(x_i)_{i\in I} \in \mathscr{X}$, 则 $b = \bigvee\limits_{i\in I} (a_i \wedge x_i)$, 从而 $\forall i \in I$, $a_i \wedge x_i \leqslant b$, 所以 $a_i \wedge x_i \leqslant a_i \wedge b$. 从而由引理 2.6 可得, $\forall i \in I$, $M_b(a_i \wedge b) \subseteq M_b(a_i \wedge x_i)$.

定理 3.6 设 $\mathscr{X} \neq \varnothing, \forall i \in I$, 记 $T_i = \{x \in L : x \leqslant a_i \alpha b$, 并且 $M_b(a_i \wedge x) = M_b(a_i \wedge b)\}$. 若 $X=(x_i)_{i\in I}$ 满足 $\forall i \in I$, $x_i \in T_i$, 则 $X \in \mathscr{X}$.

证 因为 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, 所以由推论 3.2 知, $\bigcap\limits_{i\in I} M_b(a_i \wedge b) = \varnothing$. 若 $\forall i \in I$, $x_i \in T_i$, 则 $x_i \leqslant a_i \alpha b$, $M_b(a_i \wedge x_i) = M_b(a_i \wedge b)$, 从而 $\bigcap\limits_{i\in I} M_b(a_i \wedge x_i) = \varnothing$. 所以由定理 3.4 知, $X \in \mathscr{X}$.

由定理 3.6 可知, 若 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, 则 $\forall i \in I$, $T_i \subseteq S_i$.

定理 3.7 设 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, $j \in I_1$, 则

(i) 若 $b \leqslant \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} a_i$, 则 $S_j = [0, a_j \alpha b]$.

(ii) 若 $b \nleqslant \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} a_i$, 记 $\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (a_i \wedge (a_i \alpha b)) = c$, 则 $S_j = \{x \leqslant a_j \alpha b : M_b(a_j \wedge x) \subseteq N(b) - M_b(c)\}$.

证 (i) 因为 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, $b \leqslant \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} a_i$, 所以 $b = b \wedge \Big(\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} a_i\Big) = \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (a_i \wedge b)$. 定义 $Y=(y_i)_{i\in I}$

如下：

$$y_i = \begin{cases} b, & i \neq j, \\ d, & i = j, \end{cases}$$

其中 $d \in [0, a_j\alpha b]$. 显然 $Y \in \mathscr{X}$. 从而 $[0, a_j\alpha b] \subseteq S_j$. 又 $\forall x \in S_j$, $x \leqslant a_j\alpha b$, 即 $x \in [0, a_j\alpha b]$. 因此 $S_j = [0, a_j\alpha b]$.

(ii) 因为 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, $b \nleqslant \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} a_i$, 所以

$$b = \bigvee_{i\in I}(a_i \wedge (a_i\alpha b)), \quad c = \bigvee_{\substack{i\in I\\ i\neq j}}(a_i \wedge (a_i\alpha b)) < b.$$

$\forall x \in S_j$, 存在 $X = (x_i)_{i\in I} \in \mathscr{X}$, 使得 $x = x_j$, 且 $x \leqslant a_j\alpha b$, 从而 $b = \bigvee\limits_{i\in I}(a_i \wedge x_i) = (a_j \wedge x) \vee \Big[\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}}(a_i \wedge x_i)\Big] \leqslant (a_j \wedge x) \vee \Big[\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}}(a_i \wedge (a_i\alpha b))\Big] \leqslant b$, 即有 $b = (a_j \wedge x) \vee \Big[\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}}(a_i \wedge (a_i\alpha b))\Big] = (a_j \wedge x) \vee c$, 从而 $M_b(a_j \wedge x) \cap M_b(c) = \varnothing$, 所以 $M_b(a_j \wedge x) \subseteq N(a) - M_b(c)$, 即有 $S_j \subseteq \{x \leqslant a_j\alpha b : M_b(a_j \wedge x) \subseteq N(b) - M_b(c)\}$. 另一方面, 若 $x \leqslant a_j\alpha b$, 且 $M_b(a_j \wedge x) \subseteq N(b) - M_b(c)$, 则 $M_b(a_j \wedge x) \cap M_b(c) = \varnothing$, 从而 $(a_j \wedge x) \vee c = b$, 即有 $b = (a_j \wedge x) \vee \Big[\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}}(a_i \wedge (a_i\alpha b))\Big]$, 所以 $X = (a_1\alpha b, \cdots, a_{j-1}\alpha b, x, a_{j+1}\alpha b, \cdots) \in \mathscr{X}$. 从而 $x \in S_j$. 因此 $S_j = \{x \leqslant a_j\alpha b : M_b(a_j \wedge x) \subseteq N(b) - M_b(c)\}$.

定理 3.8　设 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, 若 $j \in I_2$, 则 $S_j = [0, a_j\alpha b]$.

证　因为 $j \in I_2$, 所以由定理 3.3 知, $\forall X = (x_i)_{i\in I} \in \mathscr{X}$, $b = \bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}}(a_i \wedge x_i)$. 定义 $Y = (y_i)_{i\in I}$ 如下：

$$y_i = \begin{cases} x_i, & i \neq j, \\ d, & i = j, \end{cases}$$

其中 $d \in [0, a_j\alpha b]$. 显然 $Y \in \mathscr{X}$. 因此 $S_j = [0, a_j\alpha b]$.

由定理 3.4, 3.7 和 3.8 可得, 若 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, 则 $\mathscr{X} = \Big\{X = (x_i)_{i\in I} : \forall j \in I, x_j \in S_j$ (S_j 满足定理 3.7, 3.8 中的条件), 并且 $\bigcap\limits_{i\in I} M_b(a_i \wedge x_i) = \varnothing\Big\}$.

定理 3.9　设 $\mathscr{X} \neq \varnothing$, $G(b) = \{i \in I : a_i \geqslant b\} = \varnothing$, 则方程 $b = \bigvee\limits_{i\in I}(a_i \wedge x_i)$ 有极小解的充要条件是存在 b 的一个不可约极小并分解 $b = \vee S$, 使得 $\forall s \in S$, 存在 $i \in I$, 使得 $a_i \geqslant s$.

证　"$\Rightarrow$" 设 $X_* = (x_{i*})_{i\in I}$ 是方程 $b = \bigvee\limits_{i\in I}(a_i \wedge x_i)$ 的一个极小解, 则由引理 1.6 可得, $b = \bigvee\limits_{i\in I} x_{i*}$, 记 $S = \{x_{i*} : x_{i*} \neq 0, i \in I\}$, 则显然 $b = \bigvee\limits_{x_{i*}\in S} x_{i*}$, 由极小解的定义可知, $b = \bigvee\limits_{x_{i*}\in S} x_{i*}$ 是 b 的一个不可约极小并分解, 并且 $\forall x_{i*} \in S$, $x_{i*} \leqslant a_i$.

"$\Leftarrow$" 设 $b = \vee S$ 是 b 的一个不可约极小并分解, 并满足 $\forall s \in S$, 存在 $i \in I$, 使得 $a_i \geqslant s$. $\forall i \in I$, 定义 $A_i = \{s \in S : a_i \geqslant s\}$, 显然 $A_i \subseteq S$. 再对子集族 A_i, $i \in I$, 进行如下形式的改造： $s \in S$, 让 s 属于且仅属于一个 A_i, $i \in I$, 记改造后的子集族为 $\overline{A_i}$, $i \in I$. 显

然有 $\bigcup\limits_{i\in I}\overline{A_i}=S$, 并且若 $i\neq k$, 则 $\overline{A_i}\cap\overline{A_k}=\varnothing$. 定义 $X=(x_i)_{i\in I}$ 如下： $\forall i\in I$,

$$x_i=\begin{cases}\bigvee\limits_{s\in\overline{A_i}}s, & \overline{A_i}\neq\varnothing,\\ 0, & \overline{A_i}=\varnothing,\end{cases}$$

则 $\bigvee\limits_{i\in I}(a_i\wedge x_i)=\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ \overline{A_i}\neq\varnothing}}(a_i\wedge x_i)=\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ \overline{A_i}\neq\varnothing}}x_i=\vee\Big(\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ \overline{A_i}\neq\varnothing}}\overline{A_i}\Big)=\vee S=b$. 所以 $X\in\mathscr{X}$. 若存在 $Y=(y_i)_{i\in I}\in\mathscr{X}$, 使得 $Y\leqslant X$. 则 $\forall i\in I$, $y_i\leqslant x_i$. 若 $x_i=0$, 则 $y_i=0$; 若 $x_i\neq 0$, 即 $\overline{A_i}\neq\varnothing$, 则 $y_i\leqslant x_i=\bigvee\limits_{s\in\overline{A_i}}s\leqslant a_i$. 从而，有 $b=\bigvee\limits_{i\in I}(a_i\wedge y_i)=\bigvee\limits_{i\in I}y_i=\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ \overline{A_i}\neq\varnothing}}y_i$. 因为 $b=\vee S$ 是 b 的一个不可约极小并分解，所以由定理 2.14 知， $b=\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ \overline{A_i}\neq\varnothing}}(\vee\overline{A_i})$ 也是 b 的一个不可约极小并分解，即有 $b=\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ \overline{A_i}\neq\varnothing}}(\vee\overline{A_i})=\bigvee\limits_{\substack{i\in I\\ \overline{A_i}\neq\varnothing}}y_i$. 因此 $\forall i\in I$, $\overline{A_i}\neq\varnothing$, 有 $y_i=\vee\overline{A_i}=x_i$. 从而有 $X=Y$. 因此由注 1.2 可知， $X=(x_i)_{i\in I}$ 是方程的极小解.

推论 3.3 设 $\mathscr{X}\neq\varnothing$, $G(b)=\{i\in I:a_i\geqslant b\}=\varnothing$, 若 $|N(b)|=2$, 则方程 $b=\bigvee\limits_{i\in I}(a_i\wedge x_i)$ 有极小解的充要条件是 b 有不可约完全并既分解.

证 由定理 2.18 和 3.9 可直接得证.

注 3.1 由文 [12] 的定理 3.1 知，当 (1.2) 的每一个解都有极小解时， b 一定有不可约并分解 $\vee B$, 但 $\vee B$ 不一定是不可约并既分解，并且 b 也不一定有不可约并既分解.

例 3.1 在例 2.3 的格 L 中，易知方程 $1=(b_1\wedge x_1)\vee(b_6\wedge x_2)$ 最大解为 $X^*=(1,1)$, 最小解为 $X_*=(b_1,b_6)$, 从而 $\mathscr{X}=[X_*,X^*]$. $b_1\vee b_6$ 是 1 的不可约极小并分解，但 1 无不可约并既分解.

注 3.2 在 (1.2) 中，即使 b 存在不可约极小并分解， (1.2) 也不一定有极小解.

例 3.2 在例 2.3 的格 L 中，对方程 $1=(p_1\wedge x_1)\vee(u_4\wedge x_2)$, 易知其最大解为 $X^*=(1,1)$, 显然 1 有不可约极小并分解，但该方程没有极小解. $M_1(p_1)=\{u_1,u_2,u_3\}$, $M_1(u_4)=\{u_4\}$, $1,2\in I_1$, $S_1=\{x\leqslant 1:M_1(p_1\wedge x)=N(1)-u_4\}$, $S_2=\{x\leqslant 1:M_1(u_4\wedge x)=N(1)-\{u_1,u_2,u_3\}=u_4\}=\{1,u_4\}$, $\mathscr{X}=\{X=(x_1,x_2):x_1\in S_1,x_2\in S_2\}$.

例 3.3 在例 2.2 的格 L 中，对方程 $6=(12\wedge x_1)\vee(18\wedge x_2)$, 易知其最大解为 $X^*=(1,1)$, 6 没有不可约极小并分解，方程没有极小解. $M_6(12)=\{12\}$, $M_6(18)=\{18\}$, $1,2\in I_1$, $S_1=\{x\leqslant 1:M_6(12\wedge x)=N(6)-18\}$, $S_2=\{x\leqslant 1:M_6(18\wedge x)=N(6)-12\}$, $\mathscr{X}=\{X=(x_1,x_2):x_1\in S_1,x_2\in S_2,M_6(12\wedge x_1)\cap M_6(18\wedge x_2)=\varnothing\}$.

4 结 束 语

本文对完备强对偶原子分配格 L 上元素的并分解问题进行了深入的研究，证明了如果格 L 的元 a 恰有一个下邻，则 a 就是完全并既约元；如果格 L 的元 a 有两个下邻，则 a 有不可约极小并分解与有不可约完全并既分解是一致的；如果格 L 的元 a 的下邻大于两个，则 a 可以有不可约极小并分解，但不一定有不可约完全并既分解，并且没有不可约极小并分解则一定没有不可约完全并既分解. 由于 $G(b)\neq\varnothing$ 时， $\forall j\in G(b)$, 定义

$X=(x_i)_{i\in I}$ 满足当 $i=j$ 时, $x_i=b$, 当 $i\neq j$ 时, $x_i=0$, 则 X 是 $\mathscr{X}$ 的极小元, 因此由定理 3.9 知, $\mathscr{X}$ 有极小解的充要条件就是或 $G(b)\neq\varnothing$ 或 b 有满足定理 3.9 中条件的不可约极小并分解. 由此部分回答了文 [7, p. 46] 关于解集中极小元是否存在的开问题.

参 考 文 献

[1] Dilworth R. P., Lattices with unique irreducible decompositions [J], *Ann. Math., Ser. II*, 1940, 41(4):771–776.

[2] Dilworth R. P. and Crawley P., Decomposition theory for lattices without chain conditions [J], *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1960, 96(1):1–22.

[3] Crawley P., Decomposition theory for nonsemimodular lattices [J], *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1961, 99(2):246–254.

[4] Gorbunov V. A., Canonical decompositions in complete lattices [J], *Algebra and Logic*, 1978, 17(5):495–511.

[5] Richter G., The Kurosh-Ore theorem, finite and infinite decompositions [J], *Studia. Sci. Math. Hungar.*, 1982, 17(3):243–250.

[6] Erne M., On the existence of decompositions in lattices [J], *Alg. Univ.*, 1983, 16(3):338–343.

[7] Walendziak A., Meet decompositions in complete lattices [J], *Per. Math. Hung.*, 1990, 21(3):219–222.

[8] Walendziak A., Join decompositious in lower continuous lattices [J], *Studia. Sci. Math. Hungar.*, 1993, 28(2):131–134.

[9] Walendziak A., Unique irredundant decompositions in upper continuous lattices [J], *Czech. Math. J.*, 1995, 45(2):193–199.

[10] Semyonova M. V., Lattices with unique irreducible decompositions [J], *Algebra and Logic*, 2000, 39(1):93–103.

[11] Semyonova M. V., Decompositions in complete lattices [J], *Algebra and Logic*, 2001, 40(6):384–390.

[12] Wang X. P., Infinite fuzzy relational equations on a complete Brouwerian lattice [J], *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 138(3):657–666.

[13] Sanchez E., Resolution of composite fuzzy relation equations [J], *Inform. and Control*, 1976, 30:38–48.

[14] Zhao C. K., On matrix equations in a class of complete and completely distributive lattice [J], *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, 22(3):303–320.

[15] De Baets B., Analytical solution methods for fuzzy relational equations [M]//Dubois D and Prade H, Eds., Fundamentals of Fuzzy Sets, The Handbooks of Fuzzy Sets Series, Vol. 1, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000:291–340.

[16] Wang X. P., Method of solution to fuzzy relation equations in a complete Brouwerian lattice [J], *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 120(3):409–414.

[17] 王学平，完备 Brouwerian 格上 Fuzzy 关系方程有极小解的条件 [J], 数学进展, 2002, 31(3):220–228.

[18] 王学平，屈小兵，连续并既约元及其在刻画 Fuzzy 关系方程解集中的应用 [J], 数学学报, 2006, 49(5):1171–1180.

[19] Qu X. B. and Wang X. P., Some properties of infinite fuzzy relational equations on complete Brouwerian lattices [J], *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158:1327–1339.

[20] Birkhoff G., Lattice Theory [M], 3th ed., Providence, RI: AMS Colloquium Publications, 1979.

[21] Crawley P. and Dilworth R. P., Algebraic Theory of Lattice [M], Englewood Cliffs, N J: Prentice Hall, 1973.

[22] Di N. A., Sessa S., Pedrycz W. and Sanchez E., Fuzzy Relational Equations and Their Applications to Knowledge Engineering [M], Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1989.

Irredundant Minimal Join-Decompositions in Complete Distributive Lattices Which Are Strongly Coatomic and Their Applications

QU Xiaobing* WANG Xueping*

*College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China.
E-mail: quxiaobing2002@hotmail.com; xpwang1@hotmail.com

Abstract This paper introduces a concept of irredundant minimal join-decomposition in complete distributive lattices which are strongly coatomic, and gives some necessary and sufficient conditions for existence of irredundant minimal join-decomposition for an element. Then the authors show that an element with exact one lower cover is completely join irreducible, that the irredundant minimal join-decomposition of an element and its irredundant completely join-decomposition are equivalent when the number of its lower covers are equal to 2, and that the irredundant minimal join-decomposition of an element need not be its irredundant completely join-decomposition when the number of its lower covers are more than 2. Finally, for a fuzzy relational equation it is proved that a necessary and sufficient condition for existence of its minimal solutions is whether there is a left-hand coefficient which is more than or equal to the right-hand coefficient or the right-hand coefficient has an irredundant minimal join-decomposition.

Keywords Complete lattice, Distributive lattice, Strongly coatomic lattice, Irredundant minimal join-decomposition, Fuzzy relational equation, Minimal solution

2000 MR Subject Classification 06B15, 06D05, 03E72