

可化约拟线性双曲组带一类非局部边界条件的 精确边界能控性 **

徐 玉 兰* 丰 小 妍* 豆 艳 萍*

摘要 先证明了一类非线性积分方程解的存在唯一性, 利用此结果, 建立了可化约拟线性双曲组带一类非局部边界条件的单侧精确边界能控性.

关键词 非局部边界条件, 精确边界能控性, 拟线性双曲组, 半整体 C^1 解

MR (2000) 主题分类 35L50, 49J20, 93B05

中图法分类 O175.27

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2009)06-0803-08

1 引言及主要结果

本文考虑可化约的拟线性双曲型方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} + \lambda_1(r, s) \frac{\partial r}{\partial x} = f_1(r, s), \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \lambda_2(r, s) \frac{\partial s}{\partial x} = f_2(r, s), \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 1], \quad (1.1)$$

其中 r, s 是关于自变量 t, x 的未知函数, λ_i, f_i ($i = 1, 2$) 均为 r, s 的光滑函数, 并且有 $f_i(0, 0) = 0$ ($i = 1, 2$).

给定初始条件

$$t = 0 : r = r_0(x), \quad s = s_0(x), \quad \forall x \in [0, 1] \quad (1.2)$$

以及非局部边界条件

$$x = 0 : s = G_1\left(t, r, \int_0^t \bar{f}_1(\tau, r, s) d\tau\right) + H_1(t), \quad (1.3)$$

$$x = 1 : r = G_2\left(t, s, \int_0^t \bar{f}_2(\tau, r, s) d\tau\right) + H_2(t), \quad (1.4)$$

其中 r_0, s_0, G_i, \bar{f}_i 以及 H_i ($i = 1, 2$) 均为各自自变量的 C^1 函数, 并且不妨设

$$G_i(t, 0, 0) \equiv 0, \quad \bar{f}_i(t, 0, 0) \equiv 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.5)$$

假设在所考察的区域上满足下列定向性条件 $\lambda_1(r, s) < 0 < \lambda_2(r, s)$, 同时假设在点 $(t, x) = (0, 0)$ 及 $(0, 1)$ 处满足 C^1 相容性条件, 其中在点 $(0, 0)$ 处的 C^1 相容性条件为

$$\begin{aligned} s_0(0) &= G_1(0, r_0(0), 0) + H_1(0), \\ & f_2(r_0(0), s_0(0)) - \lambda_2(r_0(0), s_0(0))s_0'(0) \\ &= G_{11}(0, r_0(0), 0) + G_{12}(0, r_0(0), 0)(f_1(r_0(0), s_0(0)) - \lambda_1(r_0(0), s_0(0)))r_0'(0) \\ &+ G_{13}(0, r_0(0), 0)(\bar{f}_1(0, r_0(0), s_0(0)) + \dot{H}_1(0), \end{aligned}$$

本文 2008 年 10 月 21 日收到, 2009 年 4 月 23 日收到修改稿.

*上海大学数学系, 上海 200444.

E-mail: yulan_xu@163.com; fengxiaoyan1982@126.com; dyp59@163.com

**上海市重点学科建设基金 (No. J50101) 资助的项目.

在 $(0, 1)$ 处的相容性条件也可类似给出, 从略.

对可化约拟线性双曲组 (1.1) 带边界条件 (1.3), (1.4) 的双侧精确边界能控性, 甚至对一般拟线性双曲组带类似非局部条件的双侧边界能控性, 已经在文 [1] 中建立. 在文 [1] 中, 为构造适当的解从而得到双侧的边界控制函数, 将原问题分解为前向, 后向, 左向以及右向问题, 这种方法可以避免非局部边界条件带来的复杂性. 但是, 当考虑建立单边精确能控性时, 非局部边界条件本身的复杂性则无法避免.

本文即考虑单侧的精确边界能控性. 将一侧的边界条件固定, 不妨设固定的一边为 $x = 0$. 假设条件 (1.3) 可等价地改写为

$$x = 0 : r = \overline{G}_1\left(t, s, \int_T^t \overline{f}_1(\tau, r, s) d\tau\right) + \overline{H}_1(t), \quad (1.6)$$

其中 $\overline{G}_1, \overline{H}_1$ 都是相关自变量的 C^1 函数, 并且有

$$\overline{G}_1(t, 0, 0) \equiv 0. \quad (1.7)$$

进一步假设存在常数 $K > 0$, 使得在所考察的区域上, 有

$$\begin{cases} |G_1(t, u_1, v) - G_1(t, u_2, v)| \leq K|u_1 - u_2|, \\ |\overline{G}_1(t, u_1, v) - \overline{G}_1(t, u_2, v)| \leq K|u_1 - u_2|, \\ |\overline{f}_1(t, u_1, v) - \overline{f}_1(t, u_2, v)| \leq K|u_1 - u_2|, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} |G_1(t, u, v_1) - G_1(t, u, v_2)| \leq K|v_1 - v_2|, \\ |\overline{G}_1(t, u, v_1) - \overline{G}_1(t, u, v_2)| \leq K|v_1 - v_2|, \\ |\overline{f}_1(t, u, v_1) - \overline{f}_1(t, u, v_2)| \leq K|v_1 - v_2|, \end{cases} \quad (1.9)$$

则可得到如下的单侧精确边界能控性定理:

定理 1.1 在上述假设下, 令

$$T > \max_{i=1,2} \frac{2}{|\lambda_i(0)|}, \quad (1.10)$$

则对任意给定的初态 $r_0, s_0 \in C^1[0, 1]$ 以及终态 $r_T, s_T \in C^1[0, 1]$, 其 C^1 模 $\|r_0\|_{C^1[0,1]}$, $\|s_0\|_{C^1[0,1]}$, $\|r_T\|_{C^1[0,1]}$ 及 $\|s_T\|_{C^1[0,1]}$ 充分小, 及任意给定的函数 $H_1(t) \in C^1[0, T]$, 其 C^1 模 $\|H_1\|_{C^1[0,T]}$ 充分小, 并且在点 $(t, x) = (0, 0)$ 及 $(T, 0)$ 处满足如下的 C^1 相容性条件:

$$\begin{aligned} s_0(0) &= G_1(0, r_0(0), 0) + H_1(0), \\ f_2(r_0(0), s_0(0)) - \lambda_2(r_0(0), s_0(0))s_0'(0) \\ &= G_{11}(0, r_0(0), 0) + G_{12}(0, r_0(0), 0)(f_1(r_0(0), s_0(0)) - \lambda_1(r_0(0), s_0(0)))r_0'(0) \\ &\quad + G_{13}(0, r_0(0), 0)(\overline{f}_1(0, r_0(0), s_0(0)) + \dot{H}_1(0) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} r_T(0) &= \overline{G}_1(T, s_T(0), 0) + \overline{H}_1(T), \\ f_1(r_T(0), s_T(0)) - \lambda_1(r_T(0), s_T(0))r_T'(0) \\ &= \overline{G}_{11}(T, s_T(0), 0) + \overline{G}_{12}(T, s_T(0), 0)(f_2(r_T(0), s_T(0)) - \lambda_2(r_T(0), s_T(0)))s_T'(0) \\ &\quad + \overline{G}_{13}(T, s_T(0), 0)(\overline{f}_1(T, r_T(0), s_T(0)) + \dot{\overline{H}}_1(T), \end{aligned}$$

必存在边界控制函数 $H_2(t) \in C^1[0, T]$, 并且 C^1 模 $\|H_2\|_{C^1[0,T]}$ 充分小, 使得方程 (1.1) 具初始条件 (1.2) 及带边界条件 (1.3), (1.4) 的混合初-边值问题在区域

$$R(T) = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$$

上存在唯一的 C^1 解 $r = r(t, x)$, $s = s(t, x)$, 其在 $R(T)$ 上的 C^1 模充分小, 并且精确地满足终端条件 $t = T : r = r_T(x)$, $s = s_T(x)$.

本文后面的安排如下: 在第 2 节中引入两个将要用到的结果, 第 3 节用于定理 1.1 的证明, 第 4 节则给出定理 1.1 在物理上的一个应用.

2 两个引理

对带非局部边界条件的混合初-边值问题 (1.1)–(1.4), 由文 [1] 可有如下的半整体 C^1 解的存在唯一性:

引理 2.1 对于任意事先给定的 $T > 0$, 若 C^1 模 $\|r_0\|_{C^1[0,1]}$, $\|s_0\|_{C^1[0,1]}$, $\|H_1\|_{C^1[0,T]}$ 及 $\|H_2\|_{C^1[0,T]}$ 充分小 (小于一个仅依赖于 T 的正常数), 则混合初-边值问题 (1.1)–(1.4) 恒在区域 $R(T) = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$ 上存在唯一的 C^1 解, 并且其在 $R(T)$ 上的 C^1 模充分小.

另外, 如引言所述, 为建立单侧的精确边界能控性, 需要考虑到非局部边界条件的复杂性. 考虑如下的非线性积分方程

$$y(t) = G\left(t, u(t), \int_0^t g(\tau, u(\tau), y(\tau))d\tau\right) + H(t), \quad (2.1)$$

其中 $y(t)$ 是未知函数, u, G 及 g 都是相关自变量的 C^1 函数,

$$G(t, 0, 0) \equiv 0, \quad g(t, 0, 0) \equiv 0, \quad (2.2)$$

并且假设存在常数 $K > 0$, 在所考察的区域上 G, g 满足

$$|G(t, u_1, v) - G(t, u_2, v)| \leq K|u_1 - u_2|, \quad |g(t, u_1, v) - g(t, u_2, v)| \leq K|u_1 - u_2|, \quad (2.3)$$

$$|G(t, u, v_1) - G(t, u, v_2)| \leq K|v_1 - v_2|, \quad |g(t, u, v_1) - g(t, u, v_2)| \leq K|v_1 - v_2|. \quad (2.4)$$

此时可有如下的

引理 2.2 在上述假设下, 对任意 $T > 0$, 非线性积分方程 (2.1) 在 $[0, T]$ 上存在唯一的 C^1 解 $y = y(t)$, 并且当 $\|u\|_{C^1[0,T]}$ 及 $\|H\|_{C^1[0,T]}$ 充分小时, $\|y\|_{C^1[0,T]}$ 也充分小.

证 为方便起见, 在证明过程中简记 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C^0[0,T]}$.

(a) 证明存在性. 用构造法. 对任意 $t \in (0, T]$, 记

$$y_0(t) = H(t), \quad y_n(t) = G\left(t, u(t), \int_0^t g(\tau, u(\tau), y_{n-1}(\tau))d\tau\right) + H(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

由条件 (2.2)–(2.4), 有

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0(t)| &= \left| G\left(t, u, \int_0^t g(\tau, u, y_0)d\tau\right) - H(t) \right| \\ &\leq K \left| \int_0^t g(\tau, u(\tau), y_0(\tau))d\tau \right| + K\|u\| \\ &\leq K^2\|y_0\|t + K^2\|u\|t + K\|u\|, \end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned} |y_2(t) - y_1(t)| &= \left| G\left(t, u, \int_0^t g(\tau, u, y_1)d\tau\right) - G\left(t, u, \int_0^t g(\tau, u, y_0)d\tau\right) \right| \\ &\leq K \left| \int_0^t g(\tau, u(\tau), y_1(\tau))d\tau - \int_0^t g(\tau, u(\tau), y_0(\tau))d\tau \right| \\ &\leq K^2 \int_0^t |y_1(\tau) - y_0(\tau)|d\tau \end{aligned}$$

$$\leq K^4 \|y_0\| \frac{t^2}{2} + K^4 \|u\| \frac{t^2}{2} + K^3 \|u\| t,$$

从而 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq K^{2n} \|y_0\| \frac{t^n}{n!} + K^{2n} \|u\| \frac{t^n}{n!} + K^{2n-1} \|u\| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (2.5)$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1})$ 收敛, 记

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}) + y_0, \quad (2.6)$$

则 y 即为方程 (2.1) 的解.

(b) 下证唯一性. 假设 $z = z(t)$ 是方程 (2.1) 的另一个解, 则 $\forall t \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &= \left| G\left(t, u, \int_0^t g(\tau, u, y) d\tau\right) - G\left(t, u, \int_0^t g(\tau, u, z) d\tau\right) \right| \\ &\leq K \left| \int_0^t (g(\tau, u, y) - g(\tau, u, z)) d\tau \right| \\ &\leq K^2 \int_0^t |y(\tau) - z(\tau)| d\tau \leq K^4 \|y - z\| \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

由此, $\forall n \in \mathbb{N}$, 均可有 $|y(t) - z(t)| \leq K^{2n} \frac{t^n}{n!} \|y - z\|$. 当 n 充分大时, 必有 $K^{2n} \frac{t^n}{n!} \in (0, 1)$, 从而由 $\|y - z\| \leq K^{2n} \frac{t^n}{n!} \|y - z\| < \|y - z\|$, 得 $\|y - z\| = 0$, 即 $y(t) \equiv z(t)$, $\forall t \in [0, T]$.

(c) 另外, 由 (2.5) 及 (2.6) 得

$$\|y\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{2n} t^n}{n!} \|y_0\| + \|y_0\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{2n} t^n}{n!} \|u\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{2n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \|u\|,$$

可知当 $\|y_0\|, \|u\|$ 充分小时, 有 $\|y\|$ 充分小. 进一步对方程 (2.1) 两边关于 t 求导易得, 当 $\|y_0\|_{C^1[0, T]}, \|u\|_{C^1[0, T]}$ 充分小时, 有 $\|y\|_{C^1[0, T]}$ 充分小.

3 定理 1.1 的证明

设 $T > 0$ 由 (1.10) 给出, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使 $T > 2 \max_{\|r\|, \|s\| \leq \varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\lambda_1(r, s)|}, \frac{1}{|\lambda_2(r, s)|} \right\}$. 设 $T_1 \in (0, \frac{T}{2})$.

(a) 考虑前向混合初-边值问题

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} + \lambda_1(r, s) \frac{\partial r}{\partial x} = f_1(r, s), \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \lambda_2(r, s) \frac{\partial s}{\partial x} = f_2(r, s), \\ t = 0 : r = r_0(x), \quad s = s_0(x), \\ x = 0 : s = G_1\left(t, r, \int_0^t \bar{f}_1(\tau, r, s) d\tau\right) + H_1(t), \\ x = 1 : r = \bar{r}(t). \end{cases}$$

由引理 2.1 可知, 对 T_1 , 当 $\|r_0\|_{C^1[0, 1]}, \|s_0\|_{C^1[0, 1]}, \|H_1\|_{C^1[0, T]}$ 及 $\|\bar{r}\|_{C^1[0, T]}$ 充分小时, 问题 (I) 在 $[0, T_1]$ 上存在唯一的 C^1 解 $r = r_1(t, x)$, $s = s_1(t, x)$, 并且其在区域 $R(T_1) = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T_1, 0 \leq x \leq 1\}$ 上的 C^1 模充分小.

(b) 考虑如下的后向混合初-边值问题

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} + \lambda_1(r, s) \frac{\partial r}{\partial x} = f_1(r, s), \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \lambda_2(r, s) \frac{\partial s}{\partial x} = f_2(r, s), \\ t = T : r = r_T(x), \quad s = s_T(x), \\ x = 0 : r = \bar{G}_1\left(t, s, \int_T^t \bar{f}_1(\tau, r, s) d\tau\right) + \bar{H}_1(t), \\ x = 1 : s = \bar{s}(t). \end{cases}$$

由引理 2.1 可知, 当 $\|r_T\|_{C^1[0,1]}$, $\|s_T\|_{C^1[0,1]}$, $\|\bar{H}_1\|_{C^1[0,T]}$ 及 $\|\bar{s}\|_{C^1[0,T]}$ 充分小时, 问题 (II) 在 $[T - T_1, T]$ 上存在唯一的 C^1 解 $r = r_2(t, x)$, $s = s_2(t, x)$, 并且其在区域 $R(T_1, T) = \{(t, x) \mid T - T_1 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$ 上的 C^1 模充分小. 注意到边界条件 (1.3) 可以等价地写为条件 (1.6), $\|\bar{H}_1\|_{C^1[0,T]}$ 充分小可由 $\|H_1\|_{C^1[0,T]}$ 充分小保证.

(c) 令

$$a(t) = \begin{cases} r_1(t, 0), & 0 \leq t \leq T_1, \\ r_2(t, 0), & T - T_1 \leq t \leq T, \end{cases}$$

且使 $a(t) \in C^1[0, T]$ 及 $\|a\|_{C^1[0,T]} \leq \max\{\|r_1\|_{C^1R(T_1)}, \|r_2\|_{C^1R(T_1, T)}\}$. 由引理 2.2, 以 $b = b(t)$ 为未知函数的非线性积分方程 $b(t) = G_1(t, a(t), \int_0^t \bar{f}_1(\tau, a(\tau), b(\tau)) d\tau) + H_1(t)$ 在 $[0, T]$ 上存在唯一的 C^1 解 $b = b(t)$, 其在 $[0, T]$ 上的 C^1 模可充分小.

由唯一性得 $b(t) = \begin{cases} s_1(t, 0), & 0 \leq t \leq T_1, \\ s_2(t, 0), & T - T_1 \leq t \leq T. \end{cases}$

现考虑右向混合问题

$$(III) \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_1(r, s)} \frac{\partial r}{\partial t} = f_1(r, s), \\ \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_2(r, s)} \frac{\partial s}{\partial t} = f_2(r, s), \\ x = 0 : r = a(t), \quad s = b(t), \quad \forall t \in [0, T] \\ t = 0 : s = s_0(x), \\ t = T : r = r_T(x). \end{cases}$$

由引理 2.1, 在 $R(T)$ 上存在唯一的 C^1 解 $r = r(t, x)$, $s = s(t, x)$, 并且其在 $R(T)$ 上的 C^1 模可充分小, 特别地, 可选取 $\|r_0\|_{C^1[0,1]}$, $\|s_0\|_{C^1[0,1]}$, $\|r_1\|_{C^1[0,1]}$, $\|s_1\|_{C^1[0,1]}$ 及 $H_1(t) \in C^1[0, T]$ 充分小, 使 $\|r\|_{C^1R(T)}$, $\|s\|_{C^1R(T)} \leq \varepsilon_0$.

(d) 取 $H_2(t) = r(t, 1) - G_2(t, s(t, 1), \int_0^t \bar{f}_2(\tau, r(\tau, 1), s(\tau, 1)) d\tau)$, 即为所求的边界控制函数.

4 应 用

定理 1.1 可直接用于建立一类拟线性弦振动方程带第三类边界条件的单侧精确边界能控性.

对弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) = F \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (4.1)$$

其中 $K = K(v)$ 是 v 的给定 C^2 函数且 $K'(v) > 0$, $F = F(v, w)$ 是 v 及 w 的 C^1 函数且 $F(0, 0) = 0$.

若在弦的一个端点 $x = 0$ 处给定下述第三类边界条件

$$u_x - \beta u = h(t), \quad (4.2)$$

其中 β 为一正常数, $h(t)$ 为给定的 C^1 函数, 而在弦的另一端点 $x = 1$ 处, 给定下述任一类型的边界条件:

$$u = \bar{h}(t), \quad (4.3)$$

$$u_x = \bar{h}(t), \quad (4.4)$$

$$u_x + \alpha u = \bar{h}(t), \quad (4.5)$$

$$u_x + \alpha u_t = \bar{h}(t), \quad (4.6)$$

其中 α 是一正常数, 而 $\bar{h}(t)$ 作为控制函数在条件 (4.3) 时为 C^1 函数, 在条件 (4.4)–(4.6) 时为 C^2 函数.

相应的单侧精确边界能控性问题即为: 是否存在某个 $T > 0$, 对任意给定的初态 $\phi \in C^2[0, 1]$, $\psi \in C^1[0, 1]$ 及终态 $\Phi \in C^2[0, 1]$, $\Psi \in C^1[0, 1]$, 模 $\|\phi'\|_{C^1[0,1]}$, $\|\psi\|_{C^1[0,1]}$, $\|\Phi'\|_{C^1[0,1]}$ 及 $\|\Psi\|_{C^1[0,1]}$ 充分小, 在点 $(0, 0)$ 及 $(T, 0)$ 处分别满足 C^2 相容性条件

$$\begin{cases} \phi'(0) - \beta\phi(0) = h(0), \\ \psi'(0) - \beta\psi(0) = h'(0) \end{cases} \quad (4.7)$$

及

$$\begin{cases} \Phi'(0) - \beta\Phi(0) = h(T), \\ \Psi'(0) - \beta\Psi(0) = h'(T) \end{cases} \quad (4.8)$$

及任意给定的 $h(t) \in C^1[0, T]$, 其 C^1 模充分小, 能够存在 $x = 1$ 处的边界控制函数 $\bar{h}(t)$, 在情形 (4.3) 时, $\bar{h}(t) \in C^2[0, T]$, $\|\bar{h}'\|_{C^1[0,T]}$ 充分小, 在情形 (4.4)–(4.6) 时, $\bar{h}(t) \in C^1[0, T]$, $\|\bar{h}\|_{C^1[0,T]}$ 充分小, 使得方程 (4.1) 具初始条件

$$t = 0: u = \phi(x), \quad u_t = \psi(x), \quad (4.9)$$

并且带边界条件 (4.2) 及 (4.3)–(4.6) 中任一边界条件的混合初-边值问题, 在 $[0, T]$ 上存在唯一的 C^2 解 $u = u(t, x)$, u_x, u_t 的 C^1 模充分小, 并且精确地满足终端条件

$$t = T: u = \Phi(x), \quad u_t = \Psi(x). \quad (4.10)$$

下面通过一些关于未知函数的变换, 将上述问题转化为可以应用定理 1.1 的形式.

令 $v = \frac{\partial u}{\partial x}$, $w = \frac{\partial u}{\partial t}$, 方程 (4.1) 化为如下的一阶拟线性方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial K(v)}{\partial x} = F(v, w), \end{cases} \quad (4.11)$$

继而引入上述方程的 Riemann 不变量 r, s ,

$$2r = G(v) + w, \quad 2s = -G(v) + w, \quad (4.12)$$

其中

$$G(v) = \int_0^v \sqrt{K'(v)} dv. \quad (4.13)$$

设 H 为 G 的反函数, 由 (4.12) 可得

$$w = r + s, \quad v = H(r - s). \quad (4.14)$$

以 Riemann 不变量 r, s 为新的未知函数, (4.11) 可化为如下的对角型方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} - \lambda(r, s) \frac{\partial r}{\partial x} = f(r, s), \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \lambda(r, s) \frac{\partial s}{\partial x} = f(r, s), \end{cases} \quad (4.15)$$

其中

$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{K'(v)}, \\ f(r, s) = \frac{1}{2}F(H(r-s), r+s), \end{cases} \quad (4.16)$$

易见 $f(0, 0) = 0$.

相应地, 初始条件及终端条件 (4.9) 及 (4.10) 分别化为

$$t = 0: \begin{cases} r = r_0(x) := \frac{1}{2}(G(\phi'(x)) + \psi(x)), \\ s = s_0(x) := \frac{1}{2}(-G(\phi'(x)) + \psi(x)) \end{cases} \quad (4.17)$$

及

$$t = T: \begin{cases} r = r_T(x) := \frac{1}{2}(G(\Phi'(x)) + \Psi(x)), \\ s = s_T(x) := \frac{1}{2}(-G(\Phi'(x)) + \Psi(x)), \end{cases} \quad (4.18)$$

边界条件 (4.2) 则可化为

$$x = 0: H(r-s) = \beta \left(\int_0^t (r+s) d\tau + \phi(0) \right) + h(t) \quad (4.19)$$

或者

$$x = 0: s = r - G \left(\beta \left(\int_0^t (r+s) d\tau + \phi(0) \right) + h(t) \right). \quad (4.20)$$

进一步地, 取

$$G_1(t, r, z) = r - G(\beta(z + \phi(0)) + h(t)) + G(h(t) + \phi(0)), \quad (4.21)$$

$$H_1(t) = -G(h(t) + \phi(0)), \quad (4.22)$$

则 $x = 0$ 处的边界条件 (4.20) 可改写为

$$x = 0: s = G_1 \left(t, r, \int_0^t (r+s) d\tau \right) + H_1(t). \quad (4.23)$$

另一方面, 注意到 (4.8) 的第 1 式, 由 (4.19), $x = 0: \beta \int_0^T (r+s) d\tau = \Phi'(0) - h(T) - \beta\phi(0) = \beta(\Phi(0) - \psi(0))$, 即

$$x = 0: \int_0^T (r+s) d\tau = \Phi(0) - \psi(0), \quad (4.24)$$

从而有

$$x = 0: \int_0^t (r+s) d\tau + \psi(0) = \int_T^t (r+s) d\tau + \Phi(0). \quad (4.25)$$

这样, (4.20) 可改写为

$$x = 0: r = s + G \left(\beta \left(\int_T^t (r+s) d\tau + \Phi(0) \right) + h(t) \right). \quad (4.26)$$

从而 $x = 0$ 处的边界条件可改写为

$$x = 0 : s = \overline{G}_1\left(t, r, \int_T^t (r + s) d\tau\right) + \overline{H}_1(t), \quad (4.27)$$

其中

$$\overline{G}_1(t, s, z) = s + G(\beta(z + \Phi(0)) + h(t)) - G(h(t) + \beta\Phi(0)), \quad (4.28)$$

$$\overline{H}_1(t) = G(h(t) + \beta\Phi(0)). \quad (4.29)$$

至此, 原问题化为了定理 1.1 中方程组带非局部边界条件的相应问题. 假设在所考察的区域上, 有

$$|k'(v)| \leq K_0, \quad (4.30)$$

其中 K_0 为一正常数. 注意到 (4.13), (4.21) 及 (4.28), 此时有 G_1, \overline{G}_1 可满足条件 (1.9), 并且容易验证, 定理 1.1 中的其它假设都均可满足, 由 (4.16) 及 (1.10), 取 $T > \frac{2}{\sqrt{K'(0)}}$, 即得到方程 (4.1) 带第三类边界条件的单侧精确边界能控性.

另外, 对此类拟线性弦振动方程带第三类边界条件的单侧精确边界能控性, 条件 (4.30) 不是必需的, 在文 [2] 中有一个专门的证明, 另可见文 [3, 4].

参 考 文 献

- [1] 徐玉兰, 拟线性双曲组一类非局部混合初边值问题的半整体 C^1 解 [J], 高等应用数学学报 A 辑, 2006, 21(1):49–60.
- [2] Li Tatsien and Xu Yulan, Local exact boundary controllability for nonlinear vibrating string equations [J], *International Journal of Modern Physics B*, 2003, 17:4062–4071.
- [3] Li Tatsien, Exact boundary controllability for quasilinear wave equations [J], *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, 190:127–135.
- [4] Li Tatsien and Yu Lixin, Exact boundary controllability for 1-D quasilinear wave equations [J], *SIAM J. Control. Optim.*, 2006, 45(3):1074–1083.

Exact Boundary Controllability for Reducible Quasi-linear Hyperbolic System with a Class of Nonlocal Boundary Conditions

XU Yulan* FENG Xiaoyan* DOU Yanping*

*Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China.
E-mail: yulan_xu@163.com; fengxiaoyan1982@126.com; dyp59@163.com

Abstract By the existence and uniqueness theorem of the solution to a class of nonlinear integral equations, the exact boundary controllability for reducible quasi-linear hyperbolic systems with a class of nonlocal boundary conditions is established.

Keywords Nonlocal boundary conditions, Exact boundary controllability, Quasi-linear hyperbolic system, Semi-global C^1 solution

2000 MR Subject Classification 35L50, 49J20, 93B05