

一类一般输入输出函数的离散 神经元模型的分支

陈 薇 娜* 阮 炯*

提要 利用经典分支理论研究了一类一般输入输出函数的离散神经元模型的分支问题,得到了该类模型产生倍周期分支和鞍-结点分支的充分条件,推广了目前特殊的正弦输入输出函数的该类模型的结果. 所得的结果为这一类神经网络的应用提供了重要的理论基础.

关键词 离散神经元模型, 倍周期分支, 鞍-结点分支

MR (2000) 主题分类 39A05

中图法分类 O175

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2009)06-0793-10

1 引 言

近几十年来,神经网络作为一门高度综合的交叉学科,使得它的研究与应用涉及计算机与人工智能、神经生理学、认知科学、信息科学、非线性动力学等众多科学领域. 在之后的发展过程中,人们提出了近百种的网络模型,在研究方法上也形成多个流派,较为常用的主要有: Rumelhart 和 McClelland 提出的前馈网络 (BP 网络) 模型, Hopfield 提出的 Hopfield 网络模型以及由 Aihara 等人提出的混沌神经网络模型等. 这些网络模型已经在模式识别、决策优化、联想记忆、自适应控制和计算机视觉、信号处理、目标追踪、网络系统等众多领域的应用中取得了引人注目的成果 (见 [1-3]).

近十多年来,人工神经网络和生物神经网络中的离散混沌神经元和神经网络模型的混沌动力学的研究已逐渐为人们注意,并成为国内外不少学者研究的热点之一.

文 [4] 给出了一个混沌神经元模型, 即

$$x(t+1) = f\left(A(t) - \alpha \sum_{r=0}^t k^r g(x(t-r)) - \theta\right), \quad (1.1)$$

其中 $x(t+1)$ 神经元在 $t+1$ 时刻于区间 $[0, 1]$ 的模拟输出, $A(t)$ 是在离散时刻 t 来自神经元外部的输入强度, k 是过去的激活导致不应性的衰减因子, α 为神经元的不应性系数, θ 表示神经元激活与否取决于刺激的强度是否大于该阈值, g 表示神经元输出与不应性的大小间的关系的函数. 现假定 g 为恒等函数, f 取为具有陡度参数 ϵ 的 Logistic 函数

$$f(y) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{y}{\epsilon}}}. \quad (1.2)$$

现定义神经元的内部状态为

$$y(t+1) = A(t) - \alpha \sum_{r=0}^t k^r x(t-r) - \theta, \quad (1.3)$$

本文 2008 年 10 月 29 日收到.

*复旦大学数学科学学院, 上海 200433. E-mail: 041018022@fudan.edu.cn; jruan@fudan.edu.cn

由此可得

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha f(y(t)) + a(t), \quad (1.4)$$

这里 α 是神经元的不应性系数, $a(t) = A(t) - kA(t-1) - \theta(1-k)$. 若输入 $A(t)$ 是等幅周期脉冲, 则 $a(t) = (A(t) - \theta)(1-k)$.

文 [5] 讨论了如下瞬时混沌离散神经网络模型

$$y_i(t+1) = ky_i(t) + \sum_{j=1}^n \omega_{ij}x_j(t) + a_i - \omega_{ii}(t)a_{0i}, \quad (1.5)$$

$$x_i(t) = f(y_i(t)) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{y_i(t)}{\varepsilon}}}, \quad (1.6)$$

$$|\omega_{ii}(t+1)| = (1-\beta)|\omega_{ii}(t)|, \quad (1.7)$$

其中 $0 < \beta < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, $t \in 0 \cup \mathbb{N} \triangleq \mathbb{Z}^+$. 其它参数意义如下: x_i 为第 i 个神经元的输出; y_i 为第 i 个神经元的内部状态; ω_{ij} 为从第 j 个神经元到第 i 个神经元的连接权值; a_i 为第 i 个神经元的输入偏差; k 为神经膜衰减因子; ω_{ii} 为自连接权值; a_{0i} 为第 i 个神经元的自偏差.

特别地, 文 [6-7] 利用 Marotto 定理对 $\omega_{ii}(t)$ 恒为常数时模型 (1.5)-(1.6) 在 Marotto 意义下的混沌进行了研究. 之后文 [8] 给出了 Marotto 定理的修正定理及其严格证明, 并且用于模型 (1.5)-(1.7) 在 $\omega_{ii}(t)$ 恒为常数情形下的讨论; 在文 [9] 中, 作者利用 Li-Misiurewicz 定理讨论了一维瞬时混沌离散神经网络在 $\omega_{ii}(t)$ 恒为常数情形下的混沌动力学行为.

当输入输出函数 f 不取上述单调的有界递增函数, 而取类似正弦函数的周期函数时, 该类模型在函数优化、混沌控制、联想记忆等实际问题中得到了很好的应用, 因此近年来已有许多论文对它们的稳定性、分支和混沌动力学作了讨论 (见 [10-14]).

本文主要研究了输入输出函数更为一般时, 离散神经网络模型 (1.5)-(1.6) 一维情形下的分支问题

$$y(t+1) = ky(t) + \omega f\left(\frac{y(t)}{\tau}\right) + a - \omega \cdot a_0, \quad (1.8)$$

其中 $k, \omega, \tau > 0$, a, a_0 均为参数. 众所周知, 分支行为是产生混沌现象的路径之一, 因此对于分支行为的研究是对于混沌动力学研究的基础. 我们熟知, 分支的主要类型包括倍周期分支和鞍-结点分支 (切分支), 并且在相关讨论研究中先固定某些参数, 让另一个参数在适当范围中变化时, 展开我们的讨论.

为方便起见, 作变换 $z(t) = \frac{y(t)}{\tau}$, 则 (1.8) 可化为

$$z(t+1) = kz(t) + \frac{\omega}{\tau} f(z(t)) + \frac{a - \omega \cdot a_0}{\tau}. \quad (1.9)$$

本文讨论的模型 (1.9) 中的 $f(\cdot)$ 作如下假设:

(H₁) 在区间 (T_0, T_2) 上 $f \in C^3$, 存在 $T_2 > T_0 > 0$, 使 f 在 T_2 处取得极小值 $\min < 0$, 在 T_0 处取零值;

(H₂) 在区间 (T_0, T_2) 上 $f(\cdot)$ 单调减少, $f'(\cdot)$ 满足 $C < f'(\cdot) < 0$ (其中 C 为负常数), $f''(\cdot) > 0$, $f'''(\cdot) \geq 0$.

2 倍周期分支问题

倍周期分支是指, 在某个特定的参数值的一侧有稳定的不动点, 但当参数经过这个特定的参数值变化到另一侧时, 这个稳定的不动点变成排斥的, 并同时产生了一个周期 2 轨道. 在给出我们的倍周期分支结果之前, 先给出关于倍周期分支存在的判别法.

引理 2.1 (倍周期分支见文 [15]) 设 $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是充分光滑的函数, 记 $h_\mu(x) = h(x, \mu)$, 如果下列条件成立:

- (1) $h(x_0, \mu_0) = x_0$;
- (2) $h'_{\mu_0}(x_0) = -1$;
- (3) $\alpha = \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \mu \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \mu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \Big|_{(x_0, \mu_0)} \neq 0$;
- (4) $\beta = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(x_0, \mu_0) + \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \right)^2 \neq 0$,

那么系统 $x(t+1) = h(x(t), \mu)$ 在 (x_0, μ_0) 处发生倍周期分支. 更为详细的是, 在 μ_0 附近存在一个不动点曲线 $x(\mu)$, $x(\mu)$ 在 μ_0 一边是稳定的不动点, 而过了 μ_0 以后成为不稳定的不动点, 并且存在一条光滑的曲线 γ 在 (x_0, μ_0) 点与直线 $\mathbb{R} \times \mu_0$ 相切, 而 γ 是 μ 关于 x 的函数 $m(x)$ 的图像. 当 $\beta > 0$ 时, 新生成的周期 2 轨道是稳定的, 反之, 则不稳定.

定理 2.1 若模型 (1.9) 的输入输出函数 $f(\cdot)$ 满足上述条件 (H₁) 和 (H₂), 同时固定参数满足 $\omega > 0, k > \frac{2C}{f'(T_0)} - 1, \min < a_0 - \frac{a}{\omega} < 0$, 则一定存在参数 $\tau = \tau^* \in (0, -\frac{\omega C}{k+1})$, 使得模型 (1.9) 的不动点 z^{**} 在 τ^* 处存在倍周期分支, 而且产生的周期 2 轨道是稳定的.

证 视参数 τ 为变化的参数. 定义函数

$$G(z) = z \left(\frac{2\tau}{\omega} + f'(z) \right) - f(z) + a_0 - \frac{a}{\omega}, \quad (2.1)$$

则有

$$G'(z) = \frac{2\tau}{\omega} + f'(z) + z f''(z) - f'(z) = \frac{2\tau}{\omega} + z f''(z). \quad (2.2)$$

当 $z \in (T_0, T_2)$ 时, 由于 $f''(z) > 0$, 得到 $G'(z) > 0$, 从而 $G(z)$ 在区间 (T_0, T_2) 上是严格单调递增函数. 注意到如下事实成立: 由于 $C < f'(T_0) < 0$ 且 $k > \frac{2C}{f'(T_0)} - 1$, 则有 $k+1 > \frac{2C}{f'(T_0)} > 0$, 即 $f'(T_0) < \frac{2C}{k+1}$; 又根据定理条件有 $a_0 - \frac{a}{\omega} < 0$, 并且 $f(\cdot)$ 在 T_2 处取得极小值, 即成立 $f'(T_2) \equiv 0$. 则对任意 $\tau \in (0, -\frac{\omega C}{k+1})$, 都有

$$\begin{aligned} G(T_0) &= T_0 \left(\frac{2\tau}{\omega} + f'(T_0) \right) + a_0 - \frac{a}{\omega} < T_0 \left(-\frac{2C}{k+1} + f'(T_0) \right) + a_0 - \frac{a}{\omega} < 0, \\ G(T_2) &= T_2 \left(\frac{2\tau}{\omega} + f'(T_2) \right) - f(T_2) + a_0 - \frac{a}{\omega} = T_2 \cdot \frac{2\tau}{\omega} - \min + a_0 - \frac{a}{\omega} > 0. \end{aligned}$$

所以存在唯一的 $z^* \in (T_0, T_2)$, 满足 $G(z^*) = 0$. 于是, 对于每一个 $\tau \in (0, -\frac{\omega C}{k+1})$, 都有唯一一个零点 $z^* = z^*(\tau)$ 与之对应, 并且 $z^* = z^*(\tau)$ 关于 τ 是连续的.

定义一个关于 τ 的函数

$$H(\tau) = f'(z^*) + \frac{k+1}{\omega} \tau. \quad (2.3)$$

由于 $z^* \in (T_0, T_2)$, 所以 $f'(z^*) \in (C, 0)$, 从而 $H(0) < 0, H(-\frac{\omega C}{k+1}) = f'(z^*) - C > 0$, 所以至少存在一个 $\tau^* \in (0, -\frac{\omega C}{k+1})$, 使得 $H(\tau^*) = 0$. 于是, 将相应的不动点 $z^{**} = z^*(\tau^*)$ 代入 (2.3), 可得

$$f'(z^{**}) = -\frac{k+1}{\omega} \tau^*, \quad (2.4)$$

代入 (2.1), 可得

$$\begin{aligned} f(z^{**}) &= z^{**} \left(\frac{2\tau^*}{\omega} + f'(z^{**}) \right) + a_0 - \frac{a}{\omega} = z^{**} \left(\frac{2\tau^*}{\omega} - \frac{k+1}{\omega} \tau^* \right) + a_0 - \frac{a}{\omega} \\ &= z^{**} \frac{1-k}{\omega} \tau^* + a_0 - \frac{a}{\omega} = \frac{\tau^*}{\omega} \left[(1-k)z^{**} + \frac{\omega a_0 - a}{\tau^*} \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

记

$$F_\tau(z) = F(z, \tau) = kz + \frac{\omega}{\tau}f(z) + \frac{a - \omega a_0}{\tau}, \quad (2.6)$$

则有

$$F'_\tau(z) = k + \frac{\omega}{\tau}f'(z). \quad (2.7)$$

将 (2.5) 代入 (2.6), 得到 $F(z^{**}, \tau^*) = kz^{**} + \frac{\omega}{\tau^*}f(z^{**}) + \frac{a - \omega a_0}{\tau^*} = z^{**}$, 验证了引理 2.1 的条件 (1). 将 (2.4) 代入 (2.7), 得到 $F'_{\tau^*}(z^{**}) = k + \frac{\omega}{\tau^*}f'(z^{**}) = -1$, 验证了引理 2.1 的条件 (2). 通过计算可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z, \tau)}{\partial \tau} &= -\frac{\omega f(z) + a - \omega a_0}{\tau^2}, \\ \frac{\partial^2 F(z, \tau)}{\partial \tau \partial z} &= -\frac{\omega f'(z)}{\tau^2}, \quad \frac{\partial^2 F(z, \tau)}{\partial z^2} = \frac{\omega}{\tau}f''(z), \quad \frac{\partial^3 F(z, \tau)}{\partial z^3} = \frac{\omega}{\tau}f'''(z). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right] \Big|_{(z^{**}, \tau^*)} \\ &= -\frac{\omega f'(z^{**})}{\tau^{*2}} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega f(z^{**}) + a - \omega a_0}{\tau^{*2}} \right) \frac{\omega}{\tau^*} f''(z^{**}) \\ &= -\frac{\omega f'(z^{**})}{\tau^{*2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^*(1-k)z^{**} + \omega a_0 - a + a - \omega a_0}{\tau^{*2}} \right) \frac{\omega}{\tau^*} f''(z^{**}) \\ &= \frac{\omega}{2\tau^{*2}} \left[-2f'(z^{**}) + (k-1)z^{**}f''(z^{**}) \right], \end{aligned}$$

根据定理 2.2 的条件和对输入输出函数 $f(\cdot)$ 的假设, 可得 $f'(z^{**}) < 0$, $f''(z^{**}) > 0$, $k-1 > \frac{2C}{f'(T_0)} - 2 > 0$, 又有 $0 < z^{**} \in (T_0, T_2)$, 则上式 $\alpha > 0$ 恒成立. 验证了引理 2.1 的条件 (3). 与此同时

$$\beta = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}(z^{**}, \tau^*) + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(z^{**}, \tau^*) \right]^2 = \frac{1}{6} \frac{\omega}{\tau^*} f'''(z^{**}) + \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{\tau^{*2}} \left[f''(z^{**}) \right]^2,$$

根据定理 2.2 的条件和对输入输出函数 $f(\cdot)$ 的假设, 可得 $\beta > 0$ 恒成立. 验证了引理 2.1 的条件 (4).

综上所述, 根据引理 2.1, 我们可以知道模型 (1.9) 在参数 τ 经过 τ^* 时发生了倍周期分支, 而且由 $\beta > 0$ 可知, 所产生的周期 2 轨道是稳定的.

3 鞍-结点分支问题

鞍-结点分支是指, 在某个特定参数值的一侧点的附近没有不动点, 而当参数经过这个特定值变化到另一侧时, 出现两个不动点. 同样地, 在模型 (1.9) 中也存在着鞍-结点分支的情况. 下面, 我们先给出鞍-结点分支的判别方法.

引理 3.1 (鞍-结点分支见文 [15]) 设 $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是充分光滑的函数, 记 $h_\mu(x) = h(x, \mu)$, 如果下列条件成立:

- (1) $h(x_0, \mu_0) = x_0$;
- (2) $h'_{\mu_0}(x_0) = 1$;
- (3) $h''_{\mu_0}(x_0) \neq 0$;
- (4) $\frac{\partial h}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$,

那么系统 $x(t+1) = h(x(t), \mu)$ 在 (x_0, μ_0) 处发生鞍-结点分支. 更为详细的是, 存在一个

包含 x_0 的区间 \mathcal{I} 和包含 μ_0 的区间 \mathcal{N} 以及与 h 同样的光滑的函数 $m: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{N}$, 成立:
 (1) $h_m(x)(x) = x$; (2) $m(x_0) = \mu_0$; (3) $m'(x_0) = 0$ 且 $m''(x_0) \neq 0$. 而 $m(x)$ 的图像给出了系统 $x(t+1) = h(x(t), \mu)$ 在 $\mathcal{I} \times \mathcal{N}$ 上所有的不动点.

引理 3.2 (鞍-结点分支方向见文 [16]) 若记引理 3.1 中的 (3) 为 A , 即 $A = h''_{\mu_0}(x_0)$, (4) 为 B , 即 $B = \frac{\partial h}{\partial \mu}(x_0, \mu_0)$: 则当 $AB < 0$ 时, 在 $\mu > \mu_0$, 系统 $x(t+1) = h(x(t), \mu)$ 出现不动点; 反之, 当 $AB > 0$ 时, 在 $\mu < \mu_0$, 系统 $x(t+1) = h(x(t), \mu)$ 出现不动点.

在上述引理的理论基础上, 我们适当调整输入输出函数 $f(\cdot)$ 的假定: 将其中关于区间 (T_0, T_2) 上 $f'''(\cdot) \geq 0$ 的假定省略, 最终给出以 τ 为变化参数的情形下, 本文研究的模型 (1.9) 产生鞍-结点分支的充分条件.

定理 3.1 若模型 (1.9) 的固定参数满足 $\omega > 0$, $k > \frac{2C}{f'(T_0)} - 1$, $0 < \frac{a}{\omega} - a_0 < -\min$, 参数 τ 是变化的, 则在区间 $(0, -\frac{\omega C}{k-1})$ 上, 一定存在参数 $\tau = \tau^*$, 模型 (1.9) 相应的不动点 z^{**} 在 τ^* 处存在鞍-结点分支, 并且在 $\tau < \tau^*$ 模型 (1.9) 出现不动点.

证 视参数 τ 是变化的参数. 定义函数

$$G(z) = f(z) + \frac{a}{\omega} - a_0 - z f'(z), \quad (3.1)$$

则有

$$G'(z) = f'(z) - z f''(z) - f'(z) = -z f''(z). \quad (3.2)$$

当 $z \in (T_0, T_2)$ 时, 由于 $f''(z) > 0$, 得到 $G'(z) < 0$, 从而 $G(z)$ 在区间 (T_0, T_2) 上是严格单调递减函数. 注意到如下事实成立: $T_0 > 0$ 且 $f(T_0) \equiv 0$, $f'(T_0) < 0$, $0 < \frac{a}{\omega} - a_0 < -\min$; 另外 $f(\cdot)$ 在 T_2 处取得极小值, 则 $f'(T_2) \equiv 0$ 成立. 因此可知, 对任意 $\tau \in (0, -\frac{\omega C}{k-1})$, 都有

$$\begin{aligned} G(T_0) &= f(T_0) + \frac{a}{\omega} - a_0 - T_0 f'(T_0) > 0, \\ G(T_2) &= f(T_2) + \frac{a}{\omega} - a_0 - T_2 f'(T_2) = \min + \frac{a}{\omega} - a_0 < 0. \end{aligned}$$

所以存在唯一的 $z^* \in (T_0, T_2)$, 满足 $G(z^*) = 0$. 于是对于每一个 $\tau \in (0, -\frac{\omega C}{k-1})$, 都有唯一一个零点 $z^* = z^*(\tau)$ 与之对应, 并且 $z^* = z^*(\tau)$ 关于 τ 是连续的.

定义一个关于 τ 的函数

$$H(\tau) = f'(z^*) + \frac{k-1}{\omega} \tau, \quad (3.3)$$

由于 $z^* \in (T_0, T_2)$, 所以 $f'(z^*) \in (C, 0)$, 从而 $H(0) = f'(z^*) < 0$, $H(-\frac{\omega C}{k-1}) = f'(z^*) - C > 0$, 所以至少存在一个 $\tau^* \in (0, -\frac{\omega C}{k-1})$, 使得 $H(\tau^*) = 0$. 于是相应的不动点 $z^{**} = z^*(\tau^*)$ 代入 (3.3), 可得

$$f'(z^{**}) = -\frac{k-1}{\omega} \tau^*, \quad (3.4)$$

代入 (3.1), 可得

$$f(z^{**}) = z^{**} f'(z^{**}) - \frac{a}{\omega} + a_0 = (1-k) z^{**} \frac{\tau^*}{\omega} - \frac{a}{\omega} + a_0. \quad (3.5)$$

记

$$F_\tau(z) = F(z, \tau) = kz + \frac{\omega}{\tau} f(z) + \frac{a - \omega a_0}{\tau}, \quad (3.6)$$

则有

$$F'_\tau(z) = k + \frac{\omega}{\tau} f'(z). \quad (3.7)$$

将 (3.5) 代入 (3.6), 得到 $F(z^{**}, \tau^*) = kz^{**} + \frac{\omega}{\tau^*} f(z^{**}) + \frac{a - \omega a_0}{\tau^*} = z^{**}$, 验证了引理 3.1 的条件 (1). 将 (3.4) 代入 (3.7), 得到 $F'_{\tau^*}(z^{**}) = k + \frac{\omega}{\tau^*} f'(z^{**}) = k + \frac{\omega}{\tau^*} (-\frac{k-1}{\omega} \tau^*) = -1$, 验证了引理 3.1 的条件 (2). 通过计算可以得到

$$A \triangleq \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \Big|_{(z^{**}, \tau^*)} = \frac{\omega}{\tau^*} f''(z) \Big|_{(z^{**}, \tau^*)} = \frac{\omega}{\tau^*} f''(z^{**}) > 0,$$

验证了引理 3.1 的条件 (3). 与此同时, 注意到 $C < f'(T_0) < 0$, 则有 $k - 1 > \frac{2C}{f'(T_0)} - 2 > 0$ 成立, 因此

$$B \triangleq \frac{\partial F}{\partial \tau} \Big|_{(z^{**}, \tau^*)} = -\frac{\omega f(z) + a - \omega a_0}{\tau^2} \Big|_{(z^{**}, \tau^*)} = -\frac{\omega f(z^{**}) + a - \omega a_0}{\tau^{*2}} = \frac{(k-1)z^{**}}{\tau^*} > 0,$$

验证了引理 3.1 的条件 (4).

综上所述, 根据引理 3.1 和引理 3.2, 我们可以知道模型 (1.9) 在参数 τ 经过 τ^* 时发生了鞍-结点分支, 并且在 $\tau < \tau^*$ 模型 (1.9) 出现不动点.

4 模拟解释

在这个部分, 我们将针对模型 (1.9) 给出一个具体的满足假设 (H₁) 和 (H₂) 的输入输出函数 $f(\cdot)$, 并进行适当的数值模拟说明.

首先, 我们取的函数为 (如图 4.1 所示)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & (2k-1)\pi < x \leq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ -\sin(x), & 2k\pi < x \leq (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4.1)$$

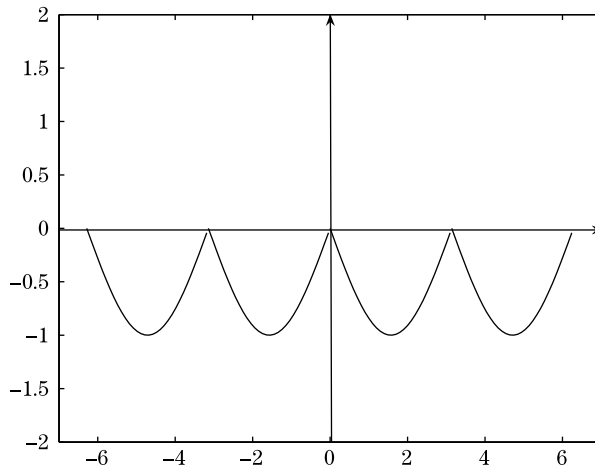


图 4.1 函数 $f(\cdot)$ 的图像

例 4.1 (倍周期分支) 考虑如下的神经元模型

$$z(t+1) = kz(t) + \frac{\omega}{\tau} f(z(t)) + \frac{a - \omega \cdot a_0}{\tau}, \quad (4.2)$$

其中 $k = 1.01$, $a = 0.1$, $a_0 = 0.2$, $\omega = 0.1$. 图 4.2 给出了当参数 τ 变化时的相应分支图, 图 4.3 给出了在 $\tau = 0.028$ 时 $F(z, \tau) = kz + \frac{\omega}{\tau} f(z) + \frac{a - \omega a_0}{\tau}$ 与 $F = z$ 的图像, 图 4.4 给出

了。在 $\tau = 0.0274$ 时 $(F \circ F)(z, \tau)$ 与 $F = z$ 的图像。可以看出存在 τ^* , 当 $\tau > \tau^*$ 时, F 存在一个不动点; 当 $\tau < \tau^*$ 时, F 存在一个周期 2 轨道。

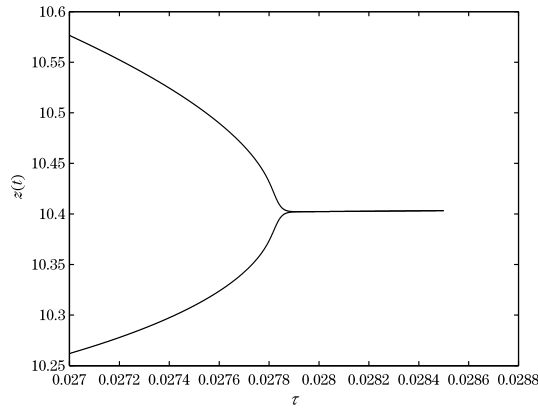


图 4.2 模型 (1.9) 的倍周期分支图

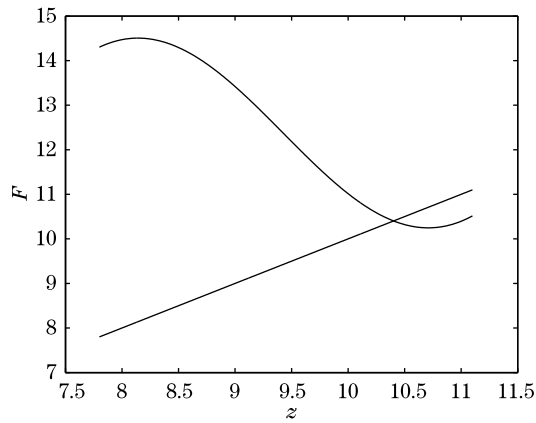


图 4.3 $\tau = 0.028$ 时函数 $F(z, \tau)$ 的图像

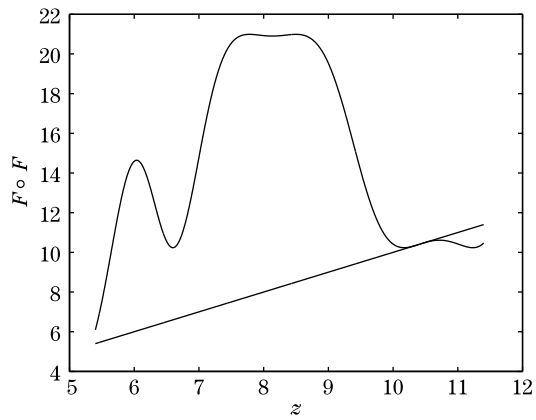


图 4.4 $\tau = 0.0274$ 时函数 $F \circ F$ 的图像

例 4.2 (鞍-结点分支) 考虑如下的神经元模型

$$z(t+1) = kz(t) + \frac{\omega}{\tau} f(z(t)) + \frac{a - \omega \cdot a_0}{\tau}, \quad (4.3)$$

其中 $k = 1.5$, $a = 0.2$, $a_0 = 0.5$, $\omega = 0.2$, 参数 τ 变化. 图 4.5、图 4.6、图 4.7 分别给出了在 $\tau = 0.05$, $\tau = 0.044$, $\tau = 0.03$ 时的 $F(z, \tau) = kz + \frac{\omega}{\tau}f(z) + \frac{a-\omega a_0}{\tau}$ 与 $F = z$ 的图像. 可以看出当 τ 从 0.03 变化到 0.05 的过程中图像 $F(z, \tau)$ 从有两个不动点变化到一个不动点到没有不动点. 即存在 τ^* , 当 $\tau > \tau^*$ 时, $F(z, \tau)$ 没有不动点; 当 $\tau < \tau^*$ 时, $F(z, \tau)$ 有两个不动点.

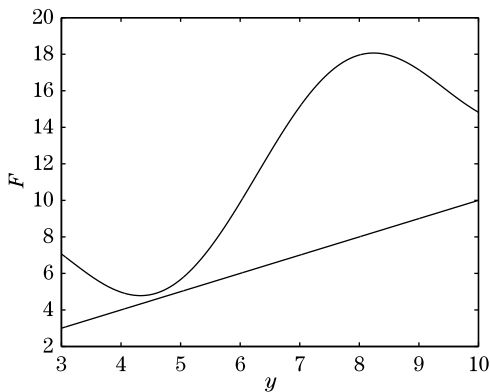


图 4.5 $\tau = 0.05$ 时函数 $F(z, \tau)$ 的图像

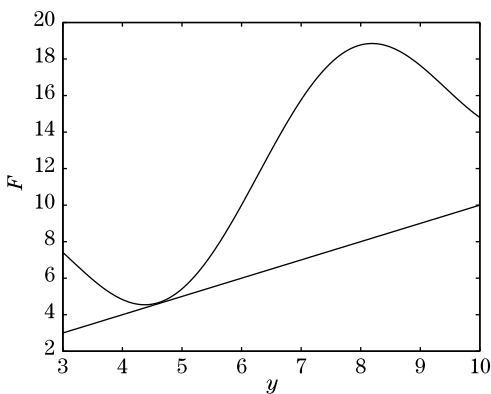


图 4.6 $\tau = 0.044$ 时函数 $F \circ F$ 的图像

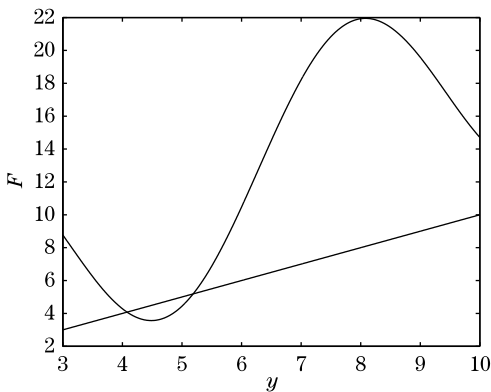


图 4.7 $\tau = 0.03$ 时函数 $F \circ F$ 的图像

5 结论与展望

本文研究了一类具有一般输入输出函数的离散神经元模型, 给出了此类模型一维情形下产生倍周期分支和鞍-结点分支的充分条件. 显然, 具有 $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ 这类三角函数形式的输入输出函数的离散神经元模型为我们研究对象中的特例. 本文讨论的输入输出函数 $f(\cdot)$ 对于函数本身的周期性条件或者函数本身的对称性条件并无特殊要求, 在此意义上, 是对上述 $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ 形式的输入输出函数的极大推广. 另外, 将本文讨论的输入输出函数 $f(\cdot)$ 的条件 (H_1) , (H_2) 改为如下的 (H_3) , (H_4) 时, 关于倍周期分支和鞍-结点分支的结论仍成立:

(H_3) $f \in C^3$, 存在 $0 < T_1 < T_0$, 使 f 在 T_1 处取得极大值 $\max > 0$, 在 T_0 处取零值;

(H_4) 在区间 (T_1, T_0) 上 $f(\cdot)$ 单调减少, $f'(\cdot)$ 满足 $C < f'(\cdot) < 0$ (其中 C 为负常数), $f''(\cdot) > 0$, $f'''(\cdot) \geq 0$.

具体证明思想和方法与本文第 2 节和第 3 节的内容相似, 这里不再详细阐述. 但是, 注意到常见的 $\arctan(\cdot)$ 或 (1.6) 定义的函数并不满足本文提出的 $f(\cdot)$ 的所有假设, 因此, 关于这一类形式的输入输出函数的分支问题有待进一步研究.

鉴于分支现象是通往混沌现象的路径之一, 如何由相关分支的讨论进而分析混沌现象的研究有待进一步展开. 同时, 当模型由一维变成高维, 或者模型的常数项变成时变项等的分支研究均有待进一步地深入进行.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见及建议.

参 考 文 献

- [1] 吴福朝, 张岭, 自联想记忆神经网络的设计 [J], 计算机工程, 1996, 25(3):156-164.
- [2] Tseng F. M., Yu H. C. and Tzeng G. H., Combining neural network model with seasonal time series ARIMA model [J], *Technological Forecasting and Social Change*, 2002, 69:71-87.
- [3] Jeng J. Y., Mau T. F. and Leu S. M., Prediction of laser butt joint welding parameters using back propagation and learning vector quantization networks [J], *Journal of Materials Processing Technology*, 2000, 99:207-218.
- [4] Aihara K., Takabe T. and Toyoda M., Chaotic neural networks [J], *Phys. Lett. A*, 1990, 144:333-340.
- [5] Chen L. and Aihara K., Chaos and asymptotical stability in discrete-time neural networks [J], *Physica D*, 1997, 104:286-325.
- [6] Chen L. and Aihara K., Global searching ability of chaotic neural networks [J], *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 1999, 48:974-993.
- [7] Chen L. and Aihara K., Chaotic simulated annealing by a neural networks model with transient chaos [J], *Neural Networks*, 1995, 8:915-930.
- [8] Ruan J., Lin W. and Zhao W., On the mathematical clarification of the snap-back-repeller in high-dimensional system and chaos in a discrete neural network model [J], *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(5):1129-1139.
- [9] Ruan J., Zhao W. and Liu R., Chaos in transiently chaotic neural networks [J], *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2003, 24(8):989-996.

- [10] Chen F. and Liu Z., Chaotic stationary solutions of cellular neural networks [J], *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2003, 11:3499–3504.
- [11] Nakagawa M., A study of chaos neural network with a periodic activation function [C]//2nd New Zealand Two-Stream International Conference on Artificial Neural Networks and Expert Systems (ANNES'95), Dunedin: IEEE Conference Proceedings, 1995:45–50.
- [12] 张强, 马润年, 王超, 许进, 具有暂态混沌动力学的神经网络及其在函数优化计算中的应用 [J], *自然科学进展*, 2003, 13(1):104–107.
- [13] Nakagawa M., A chaos associative model with a sinusoidal activation function [J], *Chaos, Solitons and Fractals*, 1999, 10(9):1437–1452.
- [14] Nakagawa M., A super memory retrieval with chaos associative model [J], *Journal of the Physical Society of Japan*, 1999, 68(7):2457–2465.
- [15] Robinson C., *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos* [M], Boca Raton, London, New York, Washington D. C.: CRC Press, 1999.
- [16] Saber N. E., *Discrete Chaos* [M], Boca Raton: CRC Press, 2000.

The Bifurcation of a Class of Discrete-Time Neural Networks with a General Activation Function

CHEN Weina* RUAN Jiong*

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China.
E-mail: 041018022@fudan.edu.cn; jruan@fudan.edu.cn

Abstract By using classical bifurcation theories, the authors investigate a class of discrete-time neural networks with a general activation function, and obtain the sufficient condition of period-doubling bifurcation and saddle-node bifurcation of this model, which can be regarded as an extension of a sinusoidal activation function. As a result, an important theoretical foundation for the application of this class of neural networks is provided.

Keywords Discrete neural networks, Period-doubling bifurcation, Saddle-node bifurcation

2000 MR Subject Classification 39A05