数 学 年 刊
2009,30A(6):751–760

可除阿贝尔 p-群的自同构群 ***

吕 恒* 陈贵云**

提要 主要探讨了秩大于或者等于 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群的 p-自同构群, 并且得到这些 p-自同构如何作用在该可除阿贝尔 p-群上. 这些结论有助于进一步理解 Černikov p-群的结构.

关键词 拟循环 p-群, 可除阿贝尔 p-群, 自同构群
MR (2000) 主题分类 20F16
中图法分类 O152
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2009)06-0751-10

1 引 言

若群 Q 满足 $Q=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots \mid a_1^p=1,a_{n+1}^p=a_n,n=1,2\cdots\rangle$, 则称 Q 是拟循环 p-群, 而一个阿贝尔群 D 被称为可除阿贝尔 p-群当 D 是一个 p-群且对每一个元 $d\in D$, 存在 $d_1\in D$, 使得 $d=d_1^p$. 由文 [1, 引理 4.1.5], 秩有限的可除阿贝尔 p-群是有限个拟循环 p-群的直积.

在文 [2] 中证明了每个幂零 p-群 G 都存在外自同构. 不久文 [3, 4] 改进了文 [2] 的结论, 并且证明了如果幂零 p-群 G 没有非平凡的可除子群, 则有 $|\mathrm{Out}(G)|=2^{|G|}$. 而文 [5] 得到了关于幂零 p-群的自同构的更加进一步的结论, 即当幂零 p-群 G 不是 p 阶循环群或秩小于 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群, 那么 G 存在 p-自同构. 因此, 秩大于或者等于 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群就一定存在 p-自同构. 由此自然出现一个让我们感兴趣的问题, 秩大于或者等于 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群的 p-自同构群具有怎样的性质和结构, 特别是临界点秩为 $p-1$ 和 p 的可除阿贝尔 p-群的 p-自同构群具有怎样的性质和结构?

设 N 是可除阿贝尔 p-群, $a\in N$, $g\in \mathrm{Aut}(N)$, 为了方便, 令 a^g 表示元 g 同构地作用在 a 上. 在本文中, 我们主要探讨了秩等于 $p-1$ 和 p 的可除阿贝尔 p-群的 p-自同构群, 特别是可除阿贝尔 p-群的 p-自同构如何作用在该可除阿贝尔 p-群上. 主要结论在第 3 节和第 4 节.

在第 3 节中, 我们主要得到下面的定理 1.1.

定理 1.1 设 N 是秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群, g 是 N 的 p 阶自同构, 则 $N=D_1\times D_2\times\cdots\times D_{p-1}$, 其中 $D_i=\langle a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},\cdots \mid a_{i1}^p=1,a_{i,n+1}^p=a_{in},\ n=1,2,\cdots\rangle$, $i=1,2,\cdots,p-1$, 并且对于每个元 $a_{kn}\in D_k$, $a_{kn}^g=a_{k+1,n}\in D_{k+1}$, $a_{p-1,n}^g=a_{1n}^{-1}a_{2n}^{-1}\cdots a_{p-1,n}^{-1}$, $k=1,\cdots,p-2$.

在第 4 节中, 我们主要得到下面的两个结论.

本文 2009 年 4 月 22 日收到.
*西南大学数学与统计学院, 重庆 400715. E-mail: lvh529@sohu.com
**通讯作者. 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715. E-mail: gychen@swu.edu.cn
***国家自然科学基金 (No. 10771172), 重庆市自然科学基金 (No. CSTC2009BB8111) 和西南大学博士基金 (No. SWUB2008039) 资助的项目.

定理 1.2 设 N 是秩为 p 的可除阿贝尔 p-群，g 是 N 的 p 阶自同构. 令群 $G=\langle N,g\rangle$. 如果 $p\geqslant 3$, 那么下列之一结论成立：

(1) 在 N 中存在 G 的有限正规子群 F, 使得 $G/F\cong C_{p^\infty}\wr\langle g\rangle$, 其中 C_{p^∞} 是拟循环 p-子群.

(2) $N=D\times D_p$, 其中 D 是正规的秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群， D_p 是正规的拟循环 p-子群. 如果 $p=2$, 那么存在拟循环 2-群 N_1 和 N_2, 使得 $N=N_1\times N_2$, 其中 $N_1=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\mid a_1^2=1,a_{n+1}^2=a_n,n=1,2,\cdots\rangle$, $N_2=\langle b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\mid b_1^2=1,b_{n+1}^2=b_n,n=1,2,\cdots\rangle$, 则 g 作用在 N 上可表现为下列几种方式之一：

(3) $a_n^g=a_n,\quad b_n^g=b_n^{-1},\quad n=1,2,\cdots;$
(4) $a_n^g=a_n^{-1},\quad b_n^g=b_n^{-1},\quad n=1,2,\cdots;$
(5) $a_n^g=b_n,\quad b_n^g=a_n,\quad n=1,2,\cdots;$
(6) $a_n^g=b_n^{-1},\quad b_n^g=a_n^{-1},\quad n=1,2,\cdots;$
(7) $a_n^g=a_n^{-1},\quad b_n^g=b_n,\quad n=1,2,\cdots.$

定理 1.3 设 N 是秩为 l 的可除阿贝尔 p-群， M 是 $\mathrm{Aut}(N)$ 的西洛 p-子群，其中 $p-1\leqslant l\leqslant 2p-3$. 则下列之一成立：

(1) 当 $l=p-1$ 时， M 是 p 阶循环群;

(2) 当 $l=p=2$ 时， $M\cong D_8$, 其中 D_8 是 8 阶二面体群;

(3) 当 $p>2$ 且 $p\leqslant l\leqslant 2p-3$ 时， $M=\langle g\rangle$ 是 p 阶循环群，并且 N 中存在一个秩为 $l-p+1$ 的可除阿贝尔子群 D, 使得 $D^g=D$.

2 预备知识

为了方便，文 [5] 的两个结论作为如下的两个引理.

引理 2.1 在幂零 p-群中，每个拟循环子群包含在中心里面.

引理 2.2 秩小于 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群没有非平凡的 p-自同构.

下面的引理 2.3 可以见文 [6, 引理 12.12].

引理 2.3 设群 A 是有限的非阿贝尔 p-群且 G 中存在指数为 p 阿贝尔子群，则 $|G|=p|G'||Z(G)|$.

引理 2.4 设 N 是秩为 p 的可除阿贝尔群 p-群， p 阶元 $g\in\mathrm{Aut}(N)$. 令 $G=\langle N,g\rangle$. 如果存在 N 的拟循环子群 D, 使得 $D^{\langle g\rangle}=N$, 那么 $N\cap Z(G)$ 是无限子群.

证 容易得到 $Z(G)\leqslant N$, 因此仅需证明 $Z(G)$ 是无限的. 若 $Z(G)$ 是有限的. 考虑商群 $G/Z(G)$, 显然 $N/Z(G)$ 是秩为 p 的可除阿贝尔群 p-群. 因为

$$(ng)^p=g^pn^{g^p}n^{g^{p-1}}\cdots n^g=nn^{g^{p-1}}\cdots n^g$$

且由 N 是阿贝尔的，所以有 $((ng)^p)^g=(ng)^p$. 于是 $(ng)^p\in Z(G)$. 由此得到对每一个元 $ngZ(G)\in G/Z(G)$, 都有 $|ngZ(G)|=p$.

当 $p=2$ 时，则 $(ng)^2=nn^g\in Z(G)$. 因此对任意 $n\in N$, 有 $n^{-1}Z(G)=n^gZ(G)$ 成立，即对于 N 的每一个拟循环子群 D, 有 $(DZ(G)/Z(G))^g=DZ(G)/Z(G)$. 这与假设 $D^{\langle g\rangle}=N$ 相矛盾.

当 $p > 2$ 时，令 $\overline{g} = gZ(G)$. 由前面得到的结论 $|ngZ(G)| = p$, 仅需证明存在一个元 $m \in N/Z(G) = \overline{N}$, 使得 $|m\overline{g}| > p$. 设 H 是 $\overline{N}$ 的一个拟循环 p-子群且令 $H = \langle a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \rangle$, 其中 $a_1^p = 1$, $a_{i+1}^p = a_i$, $i = 1, 2, \cdots$. 如果对于每一个元 $m \in \overline{N}$, 有 $(m\overline{g})^p = 1$ 成立，那么

$$(a_n\overline{g})^p = a_n a_n^{\overline{g}^{p-1}} a_n^{\overline{g}^{p-2}} \cdots a_n^{\overline{g}} = 1.$$

$a_n \in \langle a_n^{\overline{g}^{p-1}}, \cdots, a_n^{\overline{g}} \rangle$. 这表明 $H^{\langle \overline{g} \rangle}$ 的每一个元都包含在秩小于 p 的阿贝尔群里面. 又令 $K = H^{\langle \overline{g} \rangle}$, 容易得到 K 是 $\overline{N}$ 的一个可除阿贝尔 p-子群. 因此 K 是秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-子群.

设 $\overline{G} = G/K$, 那么 $\overline{G}$ 是一个拟循环 p-群被有限循环 p-群的扩张. 由引理 2.2, $\overline{G}$ 是阿贝尔群, 因此 $G' \leqslant K$. 因为 K 是 $\overline{N}$ 的秩为 $p-1$ 的真子群, 则存在一个元 $b \in \overline{N} - K$ 且 $b^p \notin K$. 由于 $(b\overline{g})^p = 1$, 则有 $(b\overline{g}K)^p = 1$. 又因为 G/K 是阿贝尔的, 所以有 $1 = (b\overline{g}K)^p = b^p\overline{g}^pK = b^pK$. 因此 $b^p \in K$, 矛盾于假设 $b^p \notin K$. 故 $Z(G)$ 是无限的.

3 秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群

设群 G 是一个 p-群，令 G 的一个特征不变子群 $\langle g \mid g \in G,\ g^{p^n} = 1 \rangle$ 为 $\Omega_n(G)$.

定理 1.1 的证明 由文 [5], 存在 p 阶元 $g \in \mathrm{Aut}(N)$. 设群 $G = \langle N, g \rangle$, 由引理 2.1 可知，G 不是幂零群. 容易得到 G 的中心 $Z(G)$ 包含在 N 里. 首先将证明 $N \cap Z(G) = Z(G)$ 是有限 p-群. 如果 $N \cap Z(G)$ 是无限群, 那么存在一个拟循环子群 D, 使得 $D \leqslant N \cap Z(G)$. 因为 N 是秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群，所以 N/D 是秩为 $p-2$ 的可除阿贝尔 p-群. 由引理 2.2 知，G/D 幂零群. 再由引理 2.1, 则 G/D 是阿贝尔群. 从而, 有 $G' \leqslant D \leqslant Z(G)$, 因此 G 幂零. 这与 G 不是幂零群相矛盾.

类似于引理 2.4 的证明, 可得对任意元 $n \in N$, 有 $(ng)^p \in Z(G)$. 因为 $Z(G)$ 是有限群且 $Z(G) \leqslant N$, 所以存在自然数 m, 使得 $Z(G) \leqslant \Omega_m(N)$. 令 $\overline{G} = G/\Omega_m(N)$, $\overline{g} = g\Omega_m(N)$ 和 $\overline{n} = n\Omega_m(N)$, 其中 $n \in N$. 那么 $(\overline{n}\,\overline{g})^p = 1$. 显然, 在 $\overline{G}$ 中存在一个阶为 p^p 的正规子群 $\overline{M}$, 使得 $\Omega_{m+1}(N)/\Omega_m(N) \leqslant \overline{M}$, 在这里 $\overline{M}$ 还满足 $\overline{M} \leqslant N/\Omega_m(N)$. 令子群 $K = \langle \overline{M}, \overline{g} \rangle$. 因为 $N/\Omega_m(N)$ 的秩是 $p-1$, 所以 $\overline{M}$ 中有一个阶为 p^2 的元 $\overline{g}_1$. 由于对于任意元 $n \in N$, 有 $(ng)^p \in Z(G)$, 因此 $(\overline{g}_1\overline{g})^p = 1$, 而 $(\overline{g}_1\overline{g})\overline{g}^{-1} = \overline{g}_1$, 故利用文 [7, 定理 1.10.5] 可得， K 是非正则 p-群. 又因为 K 的阶是 p^{p+1}, 所以 K 的幂零类恰是 p. 由此易得中心 $Z(K)$ 的阶是 p 而且有 $Z(K) \leqslant \overline{M}$, 因此，子群 $\langle \Omega_{m+1}(N)/\Omega_m(N), \overline{g} \rangle$ 的中心的阶也是 p, 即 $|(\Omega_{m+1}(N)/\Omega_m(N)) \cap Z(\overline{G})| = p$.

下面将证明 $|\Omega_1(N) \cap Z(G)| = p$. 取元 $n_1 \in \Omega_1(N) \cap Z(G)$. 由 N 是可除阿贝尔 p-群可知，一定存在元 $n_2 \in \Omega_2(N)$, 使得 $n_2^p = n_1 \in Z(G)$, 这表明子群 $\langle n_2^g, n_2 \rangle$ 的阶是 p^3. 故 $\langle n_2^g, n_2 \rangle = \langle n_2 \rangle \times \langle a_1 \rangle$, 其中 $a_1 \in \Omega_1(N)$. 显然有 $n_2^g\Omega_1(N) = n_2\Omega_1(N) \in Z(G/\Omega_1(N))$ 成立. 上述结论表明 $n\Omega_1(N) \in \Omega_2(N)/\Omega_1(N) \cap Z(G/\Omega_1(N))$ 成立的充要条件是 $n^p \in \Omega_1(N) \cap Z(G)$. 于是就有

$$|\Omega_2(N)/\Omega_1(N) \cap Z(G/\Omega_1(N))| = |\Omega_1(N) \cap Z(G)|.$$

同理可得

$$|\Omega_3(N)/\Omega_2(N) \cap Z(G/\Omega_2(N)| = |\Omega_2(N)/\Omega_1(N) \cap Z(G/\Omega_1(N))| = |\Omega_1(N) \cap Z(G)|.$$

以此类推，对任意自然数 m 下列等式

$$|\Omega_{m+1}(N)/\Omega_m(N)\cap Z(G/\Omega_m(N))|=|\Omega_1(N)\cap Z(G)|=p$$

都成立.

设子群 $H=\langle\Omega_1(N),g\rangle$, 则 $|Z(H)|=p$. 由引理 2.3 可得 $|H:H'|=p^2$. 因为 H 是有限 p-群，其换位子子群 $H'\leqslant \mathrm{Frat}(G)$, 所以有 $H=\langle g,a_{11}\rangle$, 其中 $a_{11}\in\Omega_1(N)$. 因此 $\langle a_{11}\rangle^{\langle g\rangle}=\Omega_1(N)$, 这说明

$$\Omega_1(N)=\langle a_{11}\rangle\times\langle a_{11}^g\rangle\times\langle a_{11}^{g^2}\rangle\times\cdots\times\langle a_{11}^{g^{p-2}}\rangle.$$

令元 $a_{11}^{g^j}=a_{j+1,1}$, 其中 $j=1,2,\cdots,p-2$. 如果 $a_{p-1,1}^g=a_{11}^{l_1}\cdots a_{p-1,1}^{l_{p-1}}$, 那么

$$a_{11}^{g^p}=a_{p-1,1}^{g^2}=(a_{11}^{l_1}\cdots a_{p-1,1}^{l_{p-1}})^g=a_{11}^{l_1l_{p-1}}a_{21}^{l_1+l_2l_{p-1}}\cdots a_{p-1,1}^{l_{p-2}+(l_{p-1})^2}=a_{11},$$

由此得到方程组

$$\begin{cases}l_1l_{p-1}\equiv 1\ (\operatorname{mod}p),\\ l_1+l_2l_{p-1}\equiv 0\ (\operatorname{mod}p),\\ l_2+l_3l_{p-1}\equiv 0\ (\operatorname{mod}p),\\ \qquad\vdots\\ l_{p-2}+(l_{p-1})^2\equiv 0\ (\operatorname{mod}p).\end{cases}\tag{3.1}$$

解这个方程组可得 $l_1\equiv l_2\equiv\cdots\equiv l_{p-1}\equiv -1\ (\operatorname{mod}\ p)$. 于是 $a_{p-1,1}^g=a_{11}^{-1}\cdots a_{p-1,1}^{-1}$. 又取元 $a_{12}\in\Omega_2(N)$, 使得 $a_{12}^p=a_{11}$. 令 $a_{j2}^g=a_{j+1,2}$, $j=1,2,\cdots,p-2$. 需要注意 $\langle a_{11}\rangle^{\langle g\rangle}=\Omega_1(N)$, 这表明

$$\Omega_2(N)=\langle a_{12}\rangle\times\langle a_{22}\rangle\times\cdots\times\langle a_{p-1,2}\rangle.$$

又设 $a_{p-1,2}^g=a_{12}^{k_1}\cdots a_{p-1,2}^{k_{p-1}}$, 则

$$a_{12}=a_{12}^{g^p}=a_{p-1,2}^{g^2}=(a_{12}^{k_1}\cdots a_{p-1,2}^{k_{p-1}})^g=a_{12}^{k_1k_{p-1}}a_{22}^{k_1+k_2k_{p-1}}\cdots a_{p-1,2}^{k_{p-2}+(k_{p-1})^2},$$

于是有

$$\begin{cases}k_1k_{p-1}\equiv 1\ (\operatorname{mod}p^2),\\ k_1+k_2k_{p-1}\equiv 0\ (\operatorname{mod}p^2),\\ k_2+k_3k_{p-1}\equiv 0\ (\operatorname{mod}p^2),\\ \qquad\vdots\\ k_{p-2}+(k_{p-1})^2\equiv 0\ (\operatorname{mod}p^2).\end{cases}\tag{3.2}$$

但是

$$a_{12}^p=(a_{12}^{k_1k_{p-1}}a_{22}^{k_1+k_2k_{p-1}}\cdots a_{p-1,2}^{k_{p-2}+(k_{p-1})^2})^p=a_{11}^{k_1k_{p-1}}a_{21}^{k_1+k_2k_{p-1}}\cdots a_{p-1,1}^{k_{p-2}+(k_{p-1})^2}=a_{11},$$

因此还有

$$\begin{cases}k_1k_{p-1}\equiv 1\ (\operatorname{mod}p),\\ k_1+k_2k_{p-1}\equiv 0\ (\operatorname{mod}p),\\ k_2+k_3k_{p-1}\equiv 0\ (\operatorname{mod}p),\\ \qquad\vdots\\ k_{p-2}+(k_{p-1})^2\equiv 0\ (\operatorname{mod}p).\end{cases}\tag{3.3}$$

解方程组 (3.2) 和 (3.3), 可以得到

$$k_1 \equiv k_2 \equiv \cdots \equiv k_{p-1} \equiv -1 \pmod{p^2}.$$

代入可得 $a_{p-1,2}^g = a_{12}^{-1} \cdots a_{p-1,2}^{-1}$. 持续这个步骤并利用归纳法一定可以找到拟循环子群 $D_1, D_2, \cdots, D_{p-1}$, 其中 $D_i = \langle a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, \cdots \rangle$, $a_{i1}^p = 1, a_{i,n+1}^p = a_{in}$, $i = 1, \cdots, p-1, i = 1, 2, \cdots, p-1$, 使得 $N = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_{p-1}$, 并且对任意元 $a_{jn} \in D_j$, $a_{jn}^g = a_{j+1,n} \in D_{j+1}$, $a_{p-1,n}^g = a_{1n}^{-1} a_{2n}^{-1} \cdots a_{p-1,n}^{-1}$, $j = 1, \cdots, p-2$.

推论 3.1　设 N 是秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群并假设 $\mathrm{Aut}(N)$ 有阶为 p 的元 g. 令群 $G = \langle N, g \rangle$, 则 $|Z(G)| = p$ 且 G 的每一个无限真子群是阿贝尔群.

证　由定理 1.1 的证明可得 $|\Omega_1(N) \cap Z(G)| = p$. 因为 $Z(G) \leqslant N$, 所以要证明 $|Z(G)| = p$ 成立，仅需证明 $Z(G) \leqslant \Omega_1(N)$. 令 $n = a_{1n}^{l_1} \cdots a_{p-1,n}^{l_{p-1}}$. 引用定理 1.1 的记号，其中 $a_{kn} \in D_k, k = 1, 2, \cdots, p-1$. 由 $(ng)^p = nn^{g^{p-1}} n^{g^{p-2}} \cdots n^g$, 易得

$$(ng)^p = (a_{1n}^{l_1} g)^p (a_{2n}^{l_2} g)^p \cdots (a_{p-1,n}^{l_{p-1}} g)^p.$$

又由定理 1.1, 可得 $a_{in}^g = a_{i+1,n}$, $a_{p-1,n}^g = a_{1n}^{-1} \cdots a_{p-1,n}^{-1}$, 其中 $i = 1, \cdots, p-2$. 于是

$$(a_{1n}^{l_1} g)^p = a_{1n}^{l_1} (a_{1n}^{l_1})^{g^{p-1}} \cdots (a_{1n}^{l_1})^g = 1, \ \cdots, \ \ (a_{p-1,n}^{l_{p-1}} g)^p = a_{p-1,n}^{l_{p-1}} \cdots (a_{p-1,n}^{l_{p-1}})^g = 1.$$

因此对任意元 $n \in N$, 可得 $(ng)^p = 1$. 如果 $n \in Z(G)$, 那么 $(ng)^p = n^p = 1$. 从而证得 $Z(G) \leqslant \Omega_1(N)$.

取 M 是 G 的一个无限真子群, 我们断言 M 包含在 N 中. 假设 M 不包含在 N 中, 则有 $G = MN$. 因为 $G/N = MN/N \cong M/M \cap N$, 所以 $|M/M \cap N| = p$. 因此存在一个拟循环子群 A, 使得 $A \leqslant M \cap N$. 由假设 $M \neq N$ 且 $M \neq G$ 可以得出 $M \cap N \neq M$. 因此 $M \cap N$ 不会是秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群. 于是 $M \cap N = D \times F$, 其中 D 是秩小于 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群，而 F 是一个有限阿贝尔群. 显然 D 是 M 的一个特征不变子群，由引理 2.2, 则 $D \leqslant Z(M)$. 又由 $[D, g] = 1$, 因此 $D \leqslant Z(G)$, 这与 $|Z(G)| = p$ 相矛盾. 故 $M \leqslant N$ 且 M 是阿贝尔子群.

极大类的有限 p-群是有限 p-群的一个重要子类. 文 [8] 给出了极大类的有限 p-群的一些重要性质. 这里我们通过前面结论得到一个存在指数为 p 的阿贝尔子群的极大类的有限 p-群.

推论 3.2　对于任意自然数 n 和素数 p, 一定存在一个阶为 p^n 的有限 p-群 G_0, 使得 G_0 有一个指数为 p 的阿贝尔子群，并且 G_0 的幂零类是 $n-1$.

证　利用定理 1.1 的记号和假设条件, 在定理 1.1 中, 可以找到 G 的一个正规子群 H, 使得 $H \leqslant N$ 且 $|H| = p^{n-1}$. 令 $G_0 = \langle H, g \rangle$, 由推论 3.1 中 $|Z(G)| = p$ 可知， $|Z(G_0)| = p$ 且 G_0 有一个指数为 p 的阿贝尔子群，从而得到 G_0 是极大类 p-群. 故 G 的幂零类是 $n-1$.

推论 3.3　设 N 是秩为 $p-1$ 的阿贝尔 p-群， M 是 $\mathrm{Aut}(N)$ 的 p-子群，则 $|M| = p$.

证　当 $p = 2$ 时， N 是拟循环 2-群. 显然 $M = \langle g \rangle$, 其中 $g^2 = 1$, 对任意元 $a \in N$, 有 $a^g = a^{-1}$ 成立.

当 $p > 2$ 时，考虑群 G 是 M 和 N 的半直积，即 $G = MN$, 其中 $\Omega_1(N)$ 是 G 的一个特征不变子群. 由文 [9, 定理 3.29.2] 知， Černikov p-群的自同构群的西洛 p-子群是有限群，因此 M 是一个有限 p-群. 从而得到群 $G_1 = \Omega_1(N)M$ 也是一个有限 p-群. 于是，

G_1 中存在 p^2 阶子群 H, 使得 $H \leqslant \Omega_1(N)$. 对于每一个 p 阶元 $m \in M$, m 都会诱导出 H 的一个非平凡自同构. 由推论 3.1, 子群 $Z(\langle m, N\rangle) = p$, 因此 $M \leqslant \mathrm{Aut}(H)$.

因为 H 是一个阶为 p^2 的初等阿贝尔 p-群, 所以 $|\mathrm{Aut}(H)| \leqslant (p^2-1)(p^2-p)$. 由此得证 $|M| = p$.

4 秩为 p 的可除阿贝尔 p-群

引理 4.1 设 N 是秩为 p 的可除阿贝尔 p-群且 $p \geqslant 3$, $\langle g\rangle$ 是 N 的阶为 p 的自同构群，令群 $G = \langle N, g\rangle$, 那么下列之一结论成立：

(1) 在 N 中存在 G 的有限正规子群 F, 使得 $G/F \cong C_{p^\infty} \wr \langle gF\rangle$, 即 G/F 与 C_{p^∞} 和 $\langle gF\rangle$ 的标准圈积同构，这里 C_{p^∞} 是拟循环 p-子群.

(2) $N = D \times D_p$, 其中 D 是正规的秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群， D_p 是正规的拟循环 p-子群.

证 由文 [10] 知，$|\Omega_1(N) \cap Z(G)| \geqslant p$. 因此证明这个定理，可以分为以下两种情况.

(i) 当 $|\Omega_1(N) \cap Z(G)| = p$ 时.

设子群 $H = \langle \Omega_1(N), g\rangle$, 则有 $|Z(H)| = p$. 由引理 2.3 可知， $|H| = p|H'||Z(H)|$, 因此 $|H : H'| = p^2$. 由于 $H' \leqslant \mathrm{Frat}(H)$, 故存在元 $a_{11} \in \Omega_1(N)$, 使得 $H = \langle g, a_{11}\rangle$. 从而有 $\langle a_{11}\rangle^{\langle g\rangle} = \Omega_1(N)$. 假设 $a_{12} = a_{11}^g, a_{13} = a_{12}^g, \cdots, a_{1p} = a_{1,p-1}^g$, 容易得到等式

$$\Omega_1(N) = \langle a_{11}\rangle \times \langle a_{12}\rangle \times \cdots \times \langle a_{1p}\rangle.$$

显然 $a_{1p}^g = a_{11}^{g^p} = a_{11}$. 因为 N 是可除阿贝尔子群，所以存在元 $a_{21} \in \Omega_2(N)$, 使得 $a_{21}^p = a_{11}$. 令 $a_{22} = a_{21}^g, a_{23} = a_{22}^g, \cdots, a_{2p} = a_{2,p-1}^g$, 由 $\langle a_{11}\rangle^{\langle g\rangle} = \Omega_1(N)$ 可得到

$$\Omega_2(N) = \langle a_{21}\rangle \times \langle a_{22}\rangle \times \cdots \times \langle a_{2p}\rangle.$$

因此 $a_{2p}^g = a_{21}^{g^p} = a_{21}$, $a_{2i}^p = a_{1i}$, $i = 1, 2, \cdots, p$. 显然这个步骤可以持续下去，故存在拟循环子群 $D_1, D_2, \cdots, D_p$, 其中 $D_i = \langle a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}, \cdots \mid a_{1i}^p = 1,\ a_{n+1,i}^p = a_{ni},\ \ n = 1, 2, \cdots\rangle$, $i = 1, 2, \cdots, p$, 并且对任意元 $a_{nj} \in D_j$, 有 $a_{nj}^g = a_{n,j+1} \in D_{j+1}$, $a_{np}^g = a_{n1} \in D_1$ 成立，其中 $j = 1, 2, \cdots, p-1$. 这说明 G 同构于一个拟循环子群和一个阶为 p 的循环群的圈积，即是结论 (1) 中 $F = 1$ 这种情形.

(ii) 当 $|\Omega_1(N) \cap Z(G)| \geqslant p^2$ 时.

首先证明存在 N 的一个拟循环子群 Q, 使得 $Q \leqslant Z(G)$. 假设 Q 是 N 的一个拟循环子群并且 $Q^g \neq Q$, 则 Q^G 是 N 的一个可除阿贝尔子群. 由引理 2.2 可得， Q^G 等于 N 或者是一个秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔子群. 如果 $Q^G = N$, 那么由引理 2.4 可得，存在拟循环子群 $D_p \leqslant Z(G)$. 如果 Q^G 的秩是 $p-1$, 那么 $N = Q^G \times D_0$, 其中 D_0 是拟循环子群. 考虑子群 D_0^G, 这里只需要讨论 D_0^G 秩为 $p-1$ 或者 1 这两种情况. 由于 $D_0^G \cap Q^G$ 是 Q^G 的一个真子群，并且 $Q^G \neq D_0^G \cap Q^G \lhd G$ 可知， $D_0^G \cap Q^G$ 的所有拟循环子群包含在 G 的中心里. 而对于 $D_0^G \cap Q^G$ 是有限群. 如果 D_0^G 的秩为 $p-1$, 那么 $\langle Q^G, D_0^G\rangle / Q^G \cap D_0^G$ 是秩为 $2p-2$ 的可除阿贝尔群，与 $N/Q^G \cap D_0^G$ 的秩为 p 相矛盾. 故只有 $D_0^G = D_0$ 这种情况出现，由此可得 $D_0^G \cap Q^G = 1$. 又因为 $p \geqslant 3$, 所以由引理 2.4 有 $D_0 \leqslant Z(G)$.

令 D_p 是 N 中的拟循环子群并满足 $D_p \leqslant Z(G)$, 又令群 $\overline{N} = N/D_p$, 则 $\Omega_1(\overline{N}) = \Omega_1(N)D_p/D_p$ 且 $\overline{N}$ 是秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔子群. 因为 G/D_p 不是幂零群，所以由定

理 3.1 可知，存在元 $a_{11}\in\Omega_1(N)$, 使得

$$\langle a_{11}D_p\rangle^{\langle gD_p\rangle}=\Omega_1(\overline{N})=\langle a_{11}D_p\rangle\ \times\langle a_{12}D_p\rangle\ \cdots\ \times\langle a_{1,\ p-1}D_p\rangle$$

成立，其中 $a_{1k}^gD_p=a_{1,k+1}D_p$, $a_{1,p-1}^gD_p=a_{11}^{-1}a_{12}^{-1}\cdots a_{1,p-1}^{-1}D_p$, $a_{1k}\in\Omega_1(N)$, $k=1,\ 2\cdots,\ p-2$. 令 $T=\langle a_{11}\rangle^{\langle g\rangle}$, $K=\langle T,g\rangle$, 则 $|K/K'|=p^2$. 由引理 2.3, $|Z(K)|=p$. 因为 $|\Omega_1(N)\cap Z(G)|\geqslant p^2$, 所以可得 T 是 $\Omega_1(N)$ 的一个真子群. 于是 $a_{1p}\notin T$, 并且有 $\Omega_1(N)=T\times\langle a_{1p}\rangle$, 其中 $a_{1p}\in D_p\leqslant Z(G)$. 因此 $a_{1j}^g=a_{1,j+1}$, $a_{1,p-1}^g=a_{11}^{-1}a_{12}^{-1}\cdots a_{1,p-1}^{-1}$, $j=1,2,\cdots,p-2$. 由定理 1.1 可以找到拟循环子群 $D_1,D_2,\cdots,D_{p-1}$, 使得 $N=D_1\times\cdots D_{p-1}\times D_p$, 其中 $D_i=\langle a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni},\cdots\mid a_{1i}^p=1,a_{n+1,i}^p=a_{ni}\rangle$, $i=1,\cdots,p-1$, 并且 $a_{kj}^g=a_{k,j+1},a_{k,p-1}^g=a_{k1}^{-1}a_{k2}^{-1}\cdots a_{k,p-1}^{-1}b_r,j=1,2,\cdots p-2,b_r\in D_p$, k 是自然数. 显然当 $k=1$ 时， $a_{1,p-1}^g=a_{11}^{-1}a_{12}^{-1}\cdots a_{1,p-1}^{-1}$. 不妨假设 m 是最小的自然数，使得 $a_{m,p-1}^g=a_{m1}^{-1}a_{m2}^{-1}\cdots a_{m,p-1}^{-1}b_s$, 并且 $1\neq b_s\in D_p$, 则 $b_s\in\Omega_1(D_p)$. 令子群 $F=\Omega_{m-1}(D_1\times\cdots D_{p-1})$, 则 $F\trianglelefteq G$. 考虑商群 G/F, 由前面的推理可得 $\Omega_1(N/F)=\langle a_{1m}F\rangle^{\langle gF\rangle}$. 从而 $|\Omega_1(N/F)\cap Z(G/F)|=p$. 类似前面讨论则有 $G/F\cong C_{p^\infty}\wr\langle gF\rangle$, 其中 C_{p^∞} 是拟循环 p-子群.

如果对任意自然数 m 都有 $a_{m,p-1}^g=a_{m1}^{-1}a_{m2}^{-1}\cdots a_{m,p-1}^{-1}$, 那么 $D=D_1\times D_2\times\cdots\times D_{p-1}\trianglelefteq G$. 于是得到结论 (2), 结论证毕.

下面将讨论秩为 2 的可除阿贝尔 2-群的自同构群. 引理 4.2 容易得到.

引理 4.2　设群 $G=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$ 且 $|a|=|b|=4$, 则 $|\mathrm{Aut}(G)|=96$.

引理 4.3　设 N 是秩为 2 的可除阿贝尔 2-群， A 是 $\mathrm{Aut}(N)$ 的西洛 2-子群，则 $A\cong D_8$, 其中 D_8 是阶为 8 的二面体群.

证　由文 [10] 可知，对任意 $g\in\mathrm{Aut}(N)$, 如果 g 平凡的作用在 $\Omega_2(N)$ 上，那么 g 是无限阶的元. 从而有 $A\leqslant\mathrm{Aut}(\Omega_2(N))$.

设 $N=N_1\times N_2$, 其中 $N_1=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots\mid a_1^2=1,a_{n+1}^2=a_n\rangle$, $N_2=\langle b_1,b_2,\cdots,b_n\cdots\mid b_1^2=1,b_{n+1}^2=b_n,\ n=1,2,\cdots\rangle$.

设有元 g_1,g_2, 使得对任意自然数 n, 有 $a_n^{g_1}=b_n,b_n^{g_1}=a_n$, $a_n^{g_2}=a_n^{-1},b_n^{g_2}=b_n$. 显然 $|g_1|=|g_2|=2$ 且 $a_n^{g_1g_2}=b_n^{-1}$, $b_n^{g_1g_2}=a_n$. 又易得 $g_1,g_2\in\mathrm{Aut}(N)$, 并且 $g_1g_2(a_n)=b_n^{-1},g_1g_2(b_n)=a_n$. 于是，有 $g_1g_2\in\mathrm{Aut}(N)$ 且 $|g_1g_2|=4$. 由此可以推出 $\langle g_1,g_2\rangle\cong D_8$, 并且 $\langle g_1,g_2\rangle\leqslant\mathrm{Aut}(N)$.

现构造 $\mathrm{Aut}(N)$ 的一个元, 即 g_3 使得对任意自然数 $n\geqslant 2$, 有 $a_n^{g_3}=b_na_{n-1}$, $b_n^{g_3}=a_n$. 由 n 的任意性的假设可知， g_3 是 $\mathrm{Aut}(N)$ 的一个无限阶元. 显然 g_3 是 $\mathrm{Aut}(\Omega_2(N))$ 的另一个阶为 4 的元. 易得 $\langle g_1,g_2\rangle\cap\langle g_3\rangle=1$ 而且 $\langle g_1,g_2,g_3\rangle$ 是阶为 32 的群. 由引理 4.2 可得， $\langle g_1,g_2,g_3\rangle$ 是 $\mathrm{Aut}(\Omega_2(N))$ 的西洛 2-子群.

因为 g_3 不是 $\mathrm{Aut}(N)$ 的西洛 2-子群的元，并且 g_3 是 $\mathrm{Aut}(\Omega_2(N))$ 的一个阶为 4 的元. 所以有 $|A|\leqslant 8$. 又因为 $\langle g_1,g_2\rangle\cong D_8$, 并且 $\langle g_1,g_2\rangle\leqslant\mathrm{Aut}(N)$, 所以 $A\cong D_8$.

推论 4.1　设群 $N=N_1\times N_2$, 其中 $N_1=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\mid a_1^2=1,a_{n+1}^2=a_n,n=1,2,\cdots\rangle$, $N_2=\langle b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\mid b_1^2=1,b_{n+1}^2=b_n,n=1,2,\cdots\rangle$, 则存在 2 阶元 $g\in$

$\mathrm{Aut}(N)$, 使得下列之一成立:

(1) $a_n^g = a_n$, $b_n^g = b_n^{-1}$, 其中 $n = 1, 2, \cdots$;
(2) $a_n^g = a_n^{-1}$, $b_n^g = b_n^{-1}$, 其中 $n = 1, 2, \cdots$;
(3) $a_n^g = b_n$, $b_n^g = a_n$, 其中 $n = 1, 2, \cdots$;
(4) $a_n^g = b_n^{-1}$, $b_n^g = a_n^{-1}$, 其中 $n = 1, 2, \cdots$;
(5) $a_n^g = a_n^{-1}$, $b_n^g = b_n$, 其中 $n = 1, 2, \cdots$.

证 这里引用引理 4.3 的符号. 因为 $A \cong \langle g_1, g_2\rangle$ 是 $\mathrm{Aut}(N)$ 的西洛 2-子群, 容易得到 A 的所有 2 阶元是 $g_1, g_2, g_1g_2g_1, g_2g_1g_2$ 和 $(g_1g_2)^2$. 由引理 4.3 的证明可知, $a_n^{g_1} = b_n, b_n^{g_1} = a_n$; $a_n^{g_2} = a_n^{-1}, b_n^{g_2} = b_n$; $a_n^{g_1g_2g_1} = a_n, b_n^{g_1g_2g_1} = b_n^{-1}$; $a_n^{(g_1g_2)^2} = a_n^{-1}, b_n^{(g_1g_2)^2} = b_n^{-1}$; $a_n^{g_2g_1g_2} = b_n^{-1}, b_n^{g_2g_1g_2} = a_n^{-1}$, 其中 $n = 1, 2, \cdots$.

定理 1.2 的证明 由引理 4.1 及推论 4.1 易得定理 1.2.

定理 1.3 的证明 结论 (1) 和 (2) 由推论 3.3 和引理 4.3 可得. 仅需对 $p \geqslant 3$ 且 $p \leqslant l \leqslant 2p-3$ 进行讨论.

由文 [9] 可知, Černikov p-群的自同构群的西洛 p-子群是有限群, 因此 M 是有限 p-群. 设群 G 是 M 和 N 的半直积. 则 M 中存在 p 阶元 g, 使得 $\langle N, g\rangle \lhd G$. 下面证明 N 中存在拟循环子群 Q, 使得 $Q^g = Q$.

假设 $Q^g \neq Q$, 则 $Q^{\langle g\rangle}$ 是秩为 p 或者 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群. 如果 $Q^{\langle g\rangle}$ 的秩为 p, 由引理 4.1 知, $Q^{\langle g\rangle}$ 中存在拟循环子群 Q_0, 使得 $Q_0^g = Q_0$. 如果对任意拟循环子群 $Q \leqslant N$ 都有 $Q^{\langle g\rangle}$ 的秩为 $p-1$, 令 $A = Q^{\langle g\rangle}$, 则 $N = A \times B_1$, 其中 B_1 秩为 $l-p+1$ 的可除阿贝尔 p-群. 设拟循环子群 $Q_1 \leqslant B_1$, 令 $B_2 = Q_1^{\langle g\rangle}$, 那么 B_2 的秩是 $p-1$. 因为 $AB_2 \leqslant N$ 且 A 与 B_2 的秩的和是 $2p-2 > l$, 所以存在拟循环子群 $Q_2 \leqslant A \cap B_2$. 故必有拟循环子群 $Q_2^g = Q_2$, 即假设任意拟循环子群 Q 都有 $Q^{\langle g\rangle}$ 是秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔 p-群是不成立的. 从而得到 N 中存在一个拟循环子群 Q, 使得 $Q^g = Q$.

考虑商群 $\langle N, g\rangle/Q$, 显然 N/Q 的秩是 $l-1$. 如果 $l-1$ 大于 p, 同理存在一个拟循环子群 $\overline{Q}_1 \leqslant N/Q$, 使得 $\overline{Q}_1^g = \overline{Q}$. 设子群 $K_1/Q = \overline{Q}_1$, 则 K_1 是秩为 2 的可除阿贝尔群, 并且 $K_1^g = K_1$. 又设商群 $\overline{\overline{G}} = G/K_1$. 按这种方法持续下去, 可以找到一个秩为 $l-p+1$ 的可除阿贝尔群 K_j, 使得 $K_j^g = K_j$. 因为 $l-p+1 < p-1$, 那么 $[K_j, g] = 1$. 因此 K_j 是 N 中一个秩最大的可除阿贝尔子群且 $K_j \leqslant Z(\langle N, g\rangle)$. 这表明 K_j 是 $\langle N, g\rangle$ 的一个特征不变子群. 由 $p \geqslant 3$ 可知, $K_j \leqslant Z(G)$. 又因为 N/K_j 是秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔子群, 所以由推论 3.3 可得 $|G/K_j : C_{G/K_j}(N/K_j)| \leqslant p$. 如果 $|M| > p$, 那么存在元 $g_0 \in M$, 使得 $[g_0K_j, N/K_j] = 1K_j$, 则有 $[g_0, N] = 1$, 矛盾. 故 $|M| = p$.

定理 1.3 表明秩小于 $2p-2$ 的可除阿贝尔 p-没有阶是 p^2 的自同构元. 而对于 $p = 2$, 定理 1.3 证明了秩为 2 的可除阿贝尔 2-有阶是 2^2 的自同构元. 但是对于 $p \geqslant 3$, 秩为 $2p-2$ 的可除阿贝尔 p-是否有阶是 p^2 的自同构元我们还不清楚. 我们仅得到下面结论.

推论 4.2 设 N 是秩为 $2p-2$ 的可除阿贝尔 p-群, $p \geqslant 3$. 若存在元 $g \in \mathrm{Aut}(N), |g| = p^2$, 令群 $G = \langle N, g\rangle$, 则 G 的所有不包含 N 的无限真子群都不是正规子群, 并且 N 中存在秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔群 N_1, N_2, 使得 $N = N_1 \times N_2$, $N_i^{g^p} = N_i$, $i = 1, 2$.

证 设 G 存在子群 K 是不包含 N 的一个无限正规子群. 则 $K \cap N \lhd G$ 且 $K \cap N$ 是无限真子群. 不妨设 $K \cap N = K_1 \times F$, 其中 K_1 是秩小于 $2p-2$ 的可除阿贝尔群, F 是有限

群. 因为 K_1 是 $K\cap N$ 的特征不变子群, 故 $K_1\lhd G$. 由定理 1.3 可得 $[K_1,g^p]=1$. 又因为 N/K_1 是秩小于 $2p-2$ 的可除阿贝尔群, 并且 $N/K_1\lhd G/K_1$, 所以有 $[N/K_1,g^pK_1]=1K_1$. 从而得到 $\langle N,g^p\rangle$ 是幂零群. 这说明 $[N,g^p]=1$, 矛盾于 $|g|=p^2,g\in \mathrm{Aut}(N)$. 假设不成立, 故 G 不存在不包含 N 的无限正规子群.

设 Q 是 N 的任意拟循环子群. 令子群 $N_1=Q^{\langle g^p\rangle}$, 则 N_1 是秩为 $p-1$ 或 p 的可除阿贝尔群. 当 N_1 的秩是 p 时, 由引理 2.4 知, 存在一个包含在 N_1 的拟循环子群 Q_1, 使得 $Q_1^{g^p}=Q_1$. 由此得到 $Q_1^{\langle g\rangle}$ 也只能是秩为 $p-1$ 或 p 的正规可除阿贝尔群, 这与前面的结论矛盾. 因此 N_1 是秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔群.

令子群 $G_0=\langle N,g^p\rangle$. 因为 $N_1\lhd G_0$ 且 N/N_1 是秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔群, 则 $[g^pN_1,N/N_1]=1N_1$ 或 g^pN_1 是 N/N_1 的 p 阶自同构. 当 $[g^pN_1,N/N_1]=1N_1$ 时, 则存在拟循环子群 D/N_1, 使得 $(D/N_1)^{g^p}=D/N_1$. 于是 $D^{g^p}=D$, 显然 D 是秩为 p 的可除阿贝尔群. 第 2 段的讨论说明这种情况不存在. 故只有 g^pN_1 是 N/N_1 的 p 阶自同构这种情形. 因此 g^pN_1 在 N/N_1 上诱导出一个 p 阶自同构. 因为 $\Omega_1(N/N_1)=\Omega_1(N_2)N_1/N_1$, 由定理 1.1 知, 存在元 $b\in\Omega_1(N_2)$, 使得 $\Omega_1(N/N_1)=\langle bN_1\rangle^{\langle g^pN_1\rangle}$. 假设 Q_2 是 N_2 的一个拟循环子群满足 $b\in Q_2$, 则 $Q_2^{\langle g^p\rangle}$ 秩为 $p-1$ 的可除阿贝尔群且 $\Omega_1(N/N_1)=\langle bN_1\rangle^{\langle g^pN_1\rangle}=\Omega_1(Q_2^{\langle g^p\rangle})N_1/N_1$. 从而得到 $\Omega_1(Q_2^{\langle g^p\rangle})\cap\Omega_1(N_1)=1$, 于是 $Q_2^{\langle g^p\rangle}\cap N_1=1$. 这说明 $N=N_1\times Q_2^{\langle g^p\rangle}$. 令 $N_2=Q_2^{\langle g^p\rangle}$ 即完成证明.

设 N 为可除阿贝尔 p-群, $g\in\mathrm{Aut}(N)$, 其中 $p\geqslant 3$. 文 [10] 证明了对任意元 $n\in\Omega_2(N)$, 如果都有 $n^g=n$ 成立, 则 $|g|$ 无限的. 这给出了一个判定 Černikov p- 群幂零的判定准则.

命题 4.1　设群 G 是 Černikov p-群, $p>2$, N 是 G 中指数有限的正规的可除阿贝尔子群. 对任意元 $g\in G-N$, g 平凡地共轭作用在 $\Omega_1(N)$ 上, 那么 G 是幂零群.

这里将给出上述结论的一个推广.

命题 4.2　设 G 是 Černikov p-群, N 是 G 的正规可除阿贝尔子群, 并且满足 $|G:N|<\infty$. 如果 $|\Omega_1(N)/(Z(G)\cap\Omega_1(N))|<p^{p-2}$ 且 $p\geqslant 3$, 那么 G 是幂零群.

证　如果 G 不是幂零群, 由引理 2.1, 一定存在一个拟循环子群 Q 和元 $g\in G-N$, 使得 $Q^g\neq Q$, 但是 $Q^{g^p}=Q$. 令子群 $H=\langle Q,\ g\rangle$, 那么 $Q^H\leqslant N$ 且 Q^H 是秩为 $p-1$ 或 p 的可除阿贝尔 p-群. 如果 $(Q^H)=p-1$, 则由定理 1.1 得到 $|\Omega_1(Q^H)/(Z(H)\cap\Omega_1(Q^H))|=p^{p-2}$. 如果 $(Q^H)=p$, 由引理 4.1, 同样可以得到 $|\Omega_1(Q^H)/(Z(H)\cap\Omega_1(Q^H))|=p^{p-2}$. 因为 $\Omega_1(N)$ 是初等阿贝尔 p-群, 则容易推出下列等式

$$|\Omega_1(Q^H)/(Z(H)\cap\Omega_1(Q^H))|=|\Omega_1(Q^H)(Z(G)\cap\Omega_1(N))/(Z(G)\cap\Omega_1(N))|.$$

又因为

$$|\Omega_1(Q^H)(Z(G)\cap\Omega_1(N))/(Z(G)\cap\Omega_1(N))|\leqslant|\Omega_1(N)/(Z(G)\cap\Omega_1(N))|,$$

于是 $p^{n-2}=|\Omega_1(Q^H)/(Z(H)\cap\Omega_1(Q^H))|\leqslant|\Omega_1(N)/(Z(G)\cap\Omega_1(N))|<p^{n-2}$, 从而证得我们需要的结论.

致谢　感谢审稿专家给出的宝贵的意见.

参 考 文 献

[1] Robinson D. J. S., A Course in the Theory of Groups [M], New York: Springer-Verlag, 1980.

[2] Zalesskiĭ A. E., A nilpotent p-group has an outer automorphism [J], *Dokl. Akad. SSSR*, 1971, 196:751–754; *Soviet Math. Dokl.*, 1971, 12:227–230.

[3] Buckley J. and Wielgold J., On the number of outer automorphism of an infinite nilpotent p-group I [J], *Arch. Math.*, 1978, 31:321–328.

[4] Buckley J. and Wielgold J., On the number of outer automorphism of an infinite nilpotent p-group II [J], *Arch. Math.*, 1981, 36:1–5.

[5] Federico M. and Stewart E. S., On the automorphism group of a nilpotent p-group [J], *J. London Math. Soc.*, 1985, 31(2):272–276.

[6] Issacs I. M., Character Theory of Finite Groups [M], New York: Academic Press, 1976.

[7] Huppert B., Finite Groups [M], New York: Springer-Verlag, 1976.

[8] Blackburn N., On a special class of p-groups [J], *Acta Math.*, 1958, 100(1):42–59.

[9] Robinson D. J. S., Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups (Part I) [M], New York: Springer-Verlag, 1972.

[10] Baer R., Finite extension of abelian groups with minimum condition [J], *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1955, 79:521–540.

On the Automorphism Groups of Divisible Abelian p-Groups

LÜ Heng* CHEN Guiyun**

*School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China. E-mail: lvh529@sohu.com

**Corresponding author. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China. E-mail: gychen@swu.edu.cn

Abstract The authors investigate how the p-automorphism of a divisible Abelian p-group G of rank $p-1$ or p acts on the group G and get the order of p-automorphism groups of a divisible Abelian p-group of rank $p-1$ or p. These results are helpful to get a description of the detailed structure of Černikov p-group.

Keywords Quasicyclic p-groups, Divisible abelian p-groups, Automorphism groups

2000 MR Subject Classification 20F16