

极值 Beltrami 系数的 Hamilton 序列 **

张 思 汇* 陈 纪 修*

提要 考虑了 Strebel 点与 Hamilton 序列之间的关系. 这个问题是 Gardiner F. P. 最早研究的 (见 [Approximation of infinite-dimensional Teichmüller spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1984, 282(1):367-383]). 在无限小 Teichmüller 空间中, 证明了范金华在 [On infinitesimal Teichmüller space, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2008, 78:293-300] 中得到的使 $\{\phi_n\}$ 成为 Hamilton 序列的充分条件不是必要的.

关键词 Hamilton 序列, 极值 Beltrami 系数, 无限小 Teichmüller 度量

MR (2000) 主题分类 30C62, 30F60

中图法分类 O174.5

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2009)06-0765-06

1 引 言

给定一个万有覆盖为单位圆的双曲 Riemann 面 R , 令 $M(R)$ 为 R 上本性有界 Beltrami 微分空间 $L^\infty(R)$ 中开的单位球. 记 $A(R)$ 为 R 上全纯二次微分 $\phi(z)$ 的全体, 并且满足

$$\|\phi\| = \int_R |\phi(z)| < \infty,$$

$A_1(R)$ 为 $A(R)$ 中的单位球面. 记 $T(R)$ 为 R 上 Teichmüller 空间, $B(R)$ 为 R 上无限小 Teichmüller 空间.

我们有下述已知结论:

定理 1.1 (见 [1]) 设 Beltrami 系数 μ 在 Teichmüller 空间 $T(R)$ 中是极值的, $\{\phi_n\}$ 是 $A_1(R)$ 中的一个函数序列. 若对一系列 $\{k_n\}$, 点列 $[\frac{k_n|\phi_n|}{\phi_n}]_T$ 按照 Teichmüller 距离趋向于点 $[\mu]_T$, 则 $\{\phi_n\}$ 是 μ 的一个 Hamilton 序列.

定理 1.2 (见 [2]) 设 R 为解析无限型 Riemann 曲面, 则对任意非零极值 Beltrami 系数 μ , 均有一个 Hamilton 序列 $\{\phi_n\}$, 使得任意 $(0, 1)$ 内的序列 $\{k_n\}$, $[\frac{k_n|\phi_n|}{\phi_n}]_T$ 按照 Teichmüller 距离均不收敛于 $[\mu]_T$.

定理 1.3 (见 [3]) 设 Beltrami 系数 μ 在无限小 Teichmüller 空间 $B(R)$ 中是极值的, $\{\phi_n\}$ 是 $A_1(R)$ 中的一个函数序列. 若对一系列 $\{k_n\}$, 点列 $[\frac{k_n|\phi_n|}{\phi_n}]_B$ 按照无限小 Teichmüller 距离趋向于点 $[\mu]_B$, 则 $\{\phi_n\}$ 是 μ 的一个 Hamilton 序列.

定理 1.1 是 Gardiner F. P. 证明的 (见 [1]), 沈玉良考虑了其逆命题, 证明了定理 1.2 (见 [2]), 定理 1.3 是范金华证明的 (见 [3]).

本文中, 我们考虑了定理 1.3 的逆命题, 证明了定理 1.3 的逆命题并不成立. 事实上, 我们得到了如下结果:

本文 2009 年 4 月 16 日收到.

*复旦大学数学科学学院, 上海 200433. E-mail: 071018005@fudan.edu.cn; majxchen@fudan.edu.cn

**国家自然科学基金 (No. 10871047) 资助的项目.

定理 1.4 设 R 为解析无限型 Riemann 曲面, 则对任意非零无限小极值 Beltrami 系数 μ , 均有一个 Hamilton 序列 $\{\phi_n\}$, 使得任意 $(0, 1)$ 内的序列 $\{k_n\}$, $[\frac{k_n|\phi_n|}{\phi_n}]_B$ 按照无限小 Teichmüller 距离均不收敛于 $[\mu]_B$.

2 Teichmüller 空间的定义及相关概念与结果

本节给出 Teichmüller 空间的定义及一些相关概念与结果 (见 [4, 5]).

$M(R)$ 中的每个 μ 能诱导一个 R 上的拟共形映射 f , 使得 f 满足 Beltrami 方程

$$f_{\bar{z}}(z) = \mu(z)f_z(z).$$

反之, R 上的任意一个拟共形映射 f 都有一个 Beltrami 系数 (或称为复特征) $\mu_f(z) = \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}$ 且 $\mu_f(z) \in M(R)$. 对于 $M(R)$ 中的两个 Beltrami 系数 μ, ν , 我们称它们是等价的, 记为 $\mu \sim \nu$, 如果它们满足下列条件: 假设由 μ 和 ν 所诱导的拟共形映射分别为 f 和 g , 则存在 $f(R)$ 到 $g(R)$ 的共形映射 c 以及一个 R 到 R 的拟共形合痕 h_t , $0 \leq t \leq 1$, 使得

(1) h_0 是 R 上的恒等映射,

(2) $h_1 = g^{-1} \circ c \circ f$,

(3) 对每个 $t \in [0, 1]$ 以及 R 的任何理想边界点 p , 成立 $h_t(p) = g^{-1} \circ c \circ f(p)$.

上述等价关系将集合 $M(R)$ 分为一些等价类, 称这些等价类全体所组成的集合为 R 上的 Teichmüller 空间, 记为 $T(R)$.

对于 $M(R)$ 中的一个 Beltrami 系数 μ , 记 $[\mu]_T$ 为 $M(R)$ 中所有与 μ 等价的 Beltrami 系数全体, 令

$$k(\mu) = \inf\{\|\nu\|_\infty, \nu \sim \mu\}.$$

如果 $\|\mu\|_\infty = k(\mu)$, 那么称 Beltrami 系数 μ 在 Teichmüller 空间 $T(R)$ 中极值; 如果对 $[\mu]_T$ 中的任何其他元素 ν 都成立 $\|\nu\|_\infty > \|\mu\|_\infty$, 那么称 μ 在 Teichmüller 空间 $T(R)$ 中唯一极值. 利用拟共形映射族的紧性, 可以知道在 $[\mu]_T$ 中至少存在一个极值 Beltrami 系数.

设 μ, ν 为 $L^\infty(R)$ 中的两个元素, 如果对 $A(R)$ 中的任何函数 ϕ , 都成立 $\int_R \mu\phi = \int_R \nu\phi$, 那么称 μ, ν 为无限小等价的, 记为 $\mu \approx \nu$. 这种等价关系将 $L^\infty(R)$ 中的元素分为一些等价类, 我们称所有这些等价类全体所组成的集合为无限小 Teichmüller 空间, 记为 $B(R)$. 事实上, $B(R)$ 是 $T(R)$ 在基点 $([0]_T)$ 处的切空间.

对 $L^\infty(R)$ 中的元素 μ , 记 $[\mu]_B$ 为 $L^\infty(R)$ 中所有与 μ 无限小等价的元素全体, 令

$$\|\mu\| = \inf\{\|\nu\|_\infty, \nu \approx \mu\}.$$

如果 $\|\mu\|_\infty = \|\mu\|$, 那么称 μ 在 $B(R)$ 中极值; 如果对 $[\mu]_B$ 中的任何其他元素 ν 都成立 $\|\nu\|_\infty > \|\mu\|_\infty$, 那么称 μ 在 $B(R)$ 中唯一极值.

由 Hahn-Banach 定理及 Riesz 表示定理, $\|\mu\|$ 有另一个等价定义, 即

$$\|\mu\| = \sup_{\varphi \in A_1(R)} \operatorname{Re} \int_R \mu\varphi. \quad (2.1)$$

两点 $[\mu_1]_B$ 与 $[\mu_2]_B$ 间的无限小 Teichmüller 距离定义为

$$d_B([\mu_1]_B, [\mu_2]_B) = \|\mu_1 - \mu_2\| = \inf_{\eta \in [\mu_1 - \mu_2]_B} \|\eta\|_\infty.$$

Hamilton, Krushkal, Reich 和 Strebel 证明了 $M(R)$ 中的 Beltrami 系数 μ 在 $T(R)$ 中极值当且仅当 μ 在 $B(R)$ 中极值 (见 [6]), 当且仅当 μ 满足 Hamilton-Krushkal 条件 $\|\mu\|_\infty = \|\mu\|$ (见 [7]). 此时, 存在 $A_1(R)$ 中一列 $\{\phi_n\}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\operatorname{Re} \int_R \mu \phi_n \rightarrow \|\mu\|_\infty$, 这样的 $\{\phi_n\}$ 被称为 μ 的 Hamilton 序列. 进一步得到: 要么存在 $\phi \in A_1(R)$, $\mu = \frac{\|\mu\|_\infty |\phi|}{\phi}$, 要么 μ 有一个 $A_1(R)$ 上的 Hamilton 序列 $\{\phi_n\}$, 并且 $\{\phi_n\}$ 在 R 上内闭一致收敛到 0, 这样的 $\{\phi_n\}$ 被称为 μ 的退化 Hamilton 序列.

对于 $M(R)$ 中元素 μ , 定义边界伸缩商 $h(\mu)$ 为

$$h(\mu) = \inf\{\|\nu|_{R \setminus F}\|_\infty : \nu \sim \mu, F \text{ 是 } R \text{ 的紧子集}\},$$

那么显然有 $h(\mu) \leq k(\mu) \leq \|\mu\|_\infty$. 如果 $h(\mu) < k(\mu)$, 那么称 $[\mu]_T$ 是 $T(R)$ 中的 Strebel 点, 否则称 $[\mu]_T$ 为非 Strebel 点. 根据 Strebel 标架准则 (见 [8]), 我们知道每个 Strebel 点 $[\mu]_T$ 中必含有唯一极值 Beltrami 系数 ν 且 $\nu = k \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|}$, 其中 $k = k(\mu)$, $\varphi \in A_1(R)$.

类似地, 定义边界半模 $b(\mu)$ 为

$$b(\mu) = \inf\{\|\nu|_{R \setminus F}\|_\infty : \nu \approx \mu, F \text{ 是 } R \text{ 的紧子集}\}.$$

显然有 $b(\mu) \leq \|\mu\| \leq \|\mu\|_\infty$. 如果 $\|\mu\| > b(\mu)$, 那么称 $[\mu]_B$ 为 $B(R)$ 中的一个无限小 Strebel 点, 否则称 $[\mu]_B$ 为无限小非 Strebel 点. 根据无限小 Strebel 标架准则, 我们知道每个无限小 Strebel 点 $[\mu]_B$ 中必含有唯一极值 Beltrami 系数 ν 且 $\nu = k \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|}$, 其中 $k = \|\mu\|$, $\varphi \in A_1(R)$.

Lacic 证明了当 μ 极值时, $[\mu]_T$ 是 Strebel 点当且仅当 $[\mu]_B$ 是无限小 Strebel 点 (见 [9]).

3 定理 1.4 的证明

设 μ 为极值 Beltrami 系数, $k = \|\mu\|_\infty > 0$, 我们分两种情况证明.

若 $[\mu]_B$ 为无限小 Strebel 点, 则 $[\mu]_T$ 为 Strebel 点, 因此, 存在某个 $\varphi \in A_1(R)$, 使得 $\mu = \frac{k|\varphi|}{\varphi}$. 利用非 Strebel 微分的稠密性 (见 [10]) 知, 存在 $A_1(R)$ 中一列 φ_n , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$ 且对任意 $k_n \in (0, 1)$, $[\frac{k_n|\varphi_n|}{\varphi_n}]_T$ 均不是 Strebel 点. 由于 $\frac{k_n|\varphi_n|}{\varphi_n}$ 是极值的, 故 $[\frac{k_n|\varphi_n|}{\varphi_n}]_B$ 不是无限小 Strebel 点.

利用 $\int_R \mu \varphi = k$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, 我们得到当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_R \mu \varphi_n \rightarrow \int_R \mu \varphi = k,$$

所以 $\{\varphi_n\}$ 为 μ 的 Hamilton 序列. 由于无限小 Strebel 点所成的点集为开集 (见 [10]), 我们得到对任意 $(0, 1)$ 内的序列 $\{k_n\}$, $[\frac{k_n|\varphi_n|}{\varphi_n}]_B$ 在无限小 Teichmüller 距离下不收敛于 $[\mu]_B$.

若 $[\mu]_B$ 为无限小非 Strebel 点, 则 μ 有一个退化的 Hamilton 序列 $\{\phi_n\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_R \mu \phi_n = k. \quad (3.1)$$

取一列 R 的紧子集 $\{E_n\}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_{E_n} |\phi_n| \rightarrow 1.$$

令 $\mu_n = \mu \cdot \chi_{E_n}$, 其中 χ 为集合的特征函数.

记 $\|\mu_n\| = k_n$, 由 (2.1) 得: 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$k_n \geq \operatorname{Re} \int_R \mu_n \phi_n = \operatorname{Re} \int_{E_n} \mu_n \phi_n = \operatorname{Re} \int_R \mu \phi_n - \operatorname{Re} \int_{R-E_n} \mu \phi_n \rightarrow k.$$

由于 $k_n = \|\mu_n\| \leq \|\mu_n\|_\infty \leq k = \|\mu\|$, 得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k$.

取 n 充分大, 使得

$$\|\mu_n\| \geq \frac{k}{2} > 0 = b([\mu_n]_B),$$

此时 $[\mu_n]_B$ 为一个无限小 Strelbel 点, 存在 $\psi_n \in A_1(R)$, 使得

$$\mu_n \approx \frac{\|\mu_n\| |\psi_n|}{\psi_n},$$

则

$$\int_R \mu_n \psi_n = \int_R \|\mu_n\| |\psi_n| = \|\mu_n\| \rightarrow k,$$

由 $\operatorname{Re} \int_{E_n} \mu_n \psi_n = \operatorname{Re} \int_R \mu_n \psi_n \rightarrow k$, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |\psi_n| = 1,$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_R \mu \psi_n = k, \quad (3.2)$$

这说明 $\{\psi_n\}$ 为 μ 的一个 Hamilton 序列.

另一方面, 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_R \mu \phi_m = k.$$

由于 ϕ_m 退化, 所以对固定的 n ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{R-E_n} \mu \phi_m = k.$$

由此得到

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{R-E_n} (\mu - \mu_n) \phi_m = k,$$

所以

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_R (\mu - \mu_n) \phi_m = k = \|\mu - \mu_n\|_\infty, \quad (3.3)$$

这说明 $\mu - \mu_n$ 是极值的. 因此, 对 $\{k_n\}$,

$$\begin{aligned} d_B([\mu]_B, [\frac{k_n |\psi_n|}{\psi_n}]_B) &= d_B([\mu]_B, [\mu_n]_B) \\ &= \inf_{\eta \in [\mu - \mu_n]_B} \|\eta\|_\infty \\ &= \|\mu - \mu_n\|_\infty \\ &= k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

这等价于

$$\sup_{\varphi \in A_1(R)} \operatorname{Re} \int_R \left(\mu - \frac{k'_n |\psi_n|}{\psi_n} \right) \varphi = k. \quad (3.4)$$

对任意序列 $\{k'_n\}$, $k'_n \in (0, 1)$, 显然

$$d_B \left([\mu]_B, \left[\frac{k'_n |\psi_n|}{\psi_n} \right]_B \right) \rightarrow 0$$

蕴涵了 $k'_n \rightarrow k$. 所以我们只需证明 $k'_n \rightarrow k$ 的情形即可. 此时, 对任意 $0 < \varepsilon < k$, 存在某个 N , 使得对任意 $n > N$, $|k_n - k'_n| < \varepsilon$, 因此, 当 n 充分大时,

$$\sup_{\varphi \in A_1(R)} \operatorname{Re} \int_R \left[(k_n - k'_n) \frac{|\psi_n|}{\psi_n} \right] \varphi < \varepsilon. \quad (3.5)$$

由 (3.5), 结合 (3.4), 得到

$$\sup_{\varphi \in A_1(R)} \operatorname{Re} \int_R \left(\mu - \frac{k'_n |\psi_n|}{\psi_n} \right) \varphi > k - \varepsilon > 0,$$

这说明当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$d_B \left([\mu]_B, \left[\frac{k'_n |\psi_n|}{\psi_n} \right]_B \right) \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

综上所述, 定理 1.4 得证.

致谢 感谢审稿人对本文提出的有益的建议.

参 考 文 献

- [1] Gardiner F. P., Approximation of infinite-dimensional Teichmüller spaces [J], *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1984, 282(1):367–383.
- [2] Shen Yuliang, A note on Hamilton sequences for extremal Beltrami coefficients [J], *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2001, 129(1):105–109.
- [3] Fan Jinhua, On infinitesimal Teichmüller space [J], *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2008, 78:293–300.
- [4] Gardiner F. P., Teichmüller Theory and Quadratic Differentials [M], Pure and Applied Mathematics, New York: Wiley-Interscience Publication, 1987.
- [5] Gardiner F. P. and Lakic N., Quasiconformal Teichmüller theory [M]//Mathematical Surveys and Monographs, 76, Providence RI: American Mathematical Society, 2000.
- [6] Reich E. and Strebel K., Extremal quasiconformal mappings with given boundary values [M]//Contributions to Analysis, New York: Academic Press, 1974:375–391.
- [7] Hamilton R. S., Extremal quasiconformal mappings with prescribed boundary values [J], *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, 138:399–406.
- [8] Strebel K., On the existence of extremal Teichmüller mappings [J], *J. Anal. Math.*, 1976, 30:464–480.

- [9] Lakic N., Substantial boundary points for plane domains and Gardiner's conjecture [J], *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2000, 25(2):285–306.
- [10] Lakic N., Strebel points [J], *Contemp. Math.*, 1997, 211:417–431.

On Hamilton Sequences for Extremal Beltrami Coefficients

ZHANG Sihui* CHEN Jixiu*

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China.
E-mail: 071018005@fudan.edu.cn; majxchen@fudan.edu.cn

Abstract In this paper, the relationship between Hamilton sequence and Strebel points is discussed, which was first studied by F. P. Gardiner in [Approximation of infinite-dimensional Teichmüller spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1984, 282(1):367–383]. The authors prove that in the case of infinitesimal Teichmüller space, the sufficient condition for $\{\phi_n\}$ to be a Hamilton sequence obtained by Fan in [On infinitesimal Teichmüller space, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2008, 78:293–300] is not necessary.

Keywords Hamilton sequence, Extremal Beltrami coefficient, Infinitesimal Teichmüller metric

2000 MR Subject Classification 30C62, 30F60