数 学 年 刊
2009,30A(6):787–792

偶数维 Riemannian 流形的直径估计 ***

董莲莲* 王培合* 温玉亮**

提要 设 M^{2n} 是 $2n$ 维紧致无边单连通的 Riemannian 流形， S^{2n} 为欧氏空间 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的单位球面．探讨了满足截面曲率 $K_M \in (0,1]$, 体积 $0 < V(M) \leqslant 2(1+\eta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$ 的流形 M^{2n} 的直径估计，这里 η 是某个仅依赖于 n 的正数， $\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}$ 是 S^{2n} 上半径为 $\frac{3}{4}\pi$ 的测地球，并且给出了这类流形上的一个 gap 现象及流形上 Laplacian 算子第一特征值的一个下界估计.

关键词 直径，体积比较定理， Hausdorff 收敛
MR (2000) 主题分类 53C20
中图法分类 O186.12
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2009)06-0787-06

1 引　言

对于 Riemannian 流形而言，它的曲率与拓扑有着密切的关系．一方面， Riemannian 流形的曲率能够反映拓扑，微分几何中很多著名的定理，如 Myer's 定理、体积比较定理都充分地说明了这一点．另一方面， Riemannian 流形的拓扑可以控制流形的曲率．如 Gauss-Bonnet-Chern 公式， Hamilton 定理等．特别地，如果考虑的流形是偶数维的，流形的曲率与拓扑的关系要比奇数维的情况更简单明确一些.

由 Synge 定理可知, 一个偶数维紧致定向的 Riemannian 流形 M, 若其截面曲率 $K_M > 0$, 则 M 必为单连通的．进而有，若 $K_M \in (0,1]$, 则 M 的内射半径 $i_M \geqslant \pi$．1991 年, Coghlan L. 和 Itokawa Y. 在文 [1] 中猜测： $2n$ 维紧致无边单连通的 Riemannian 流形 M^{2n} 如果满足截面曲率 $0 < K_M \leqslant 1$, 并且体积 $0 < V(M) < 3V(S^{2n})$, 那么它一定同胚于标准球面 S^{2n}, 这里 $V(M)$ 为 M^{2n} 的体积．同时，他们证明了若条件加强为 $0 < K_M \leqslant 1$ 和 $0 < V(M) \leqslant \frac{3}{2}V(S^{2n})$, 则可以保证这个猜想的正确性，并且构造了一个反例说明，如果猜想成立，那么 $3V(S^{2n})$ 将是最佳上界．迄今为止，这个猜想还是一个没有得到完全解决的公开问题．后来上界 $\frac{3}{2}V(S^{2n})$ 在文 ([2, 3]) 中被成功推进到 $(\frac{3}{2}+\eta)V(S^{2n})$, 这里 η 是一个只与维数有关的正常数．换句话说，这类流形的拓扑已经清楚了．现在本文想解决这样一个问题：这类流形的几何是怎样的？关于这方面，目前掌握的信息仅限于已经给出的流形的截面曲率和体积的条件．一般来说，如果知道了流形的直径和曲率的范围，由 Günther-Bishop 体积比较定理可以得到体积的估计．但是这一问题的反问题看起来复杂一些.

在这篇文章中，我们讨论了 $2n$ 维紧致无边单连通的 Riemannian 流形 M^{2n} 当截面曲率和体积满足某种条件时的直径问题．然后我们得到了这类流形上 Laplacian 算子的第一特征值的一个下界估计及流形上的 gap 现象.

本文 2008 年 12 月 31 日收到.
*曲阜师范大学数学科学学院，山东　曲阜 273165.
E-mail: lianlian198282@163.com; peihewang@hotmail.com
**华东师范大学数学系，上海 200062. E-mail: ylwen@math.ecnu.edu.cn
***国家自然科学基金 (No. 10871069) 和山东省自然科学青年基金 (No. Q2008A08) 资助的项目.

2 准备知识和记号

首先引入度量空间 Hausdorff-Gromov 收敛概念.

定义 2.1 (见 [4]) 设 $X, X_i\,(i=1,2,3,\cdots)$ 为紧致的度量空间，我们称 $\{X_i\}$ Hausdorff-Gromov 收敛到 X: $\lim\limits_{i\to\infty} X_i = X$ 是指：存在 $Z = X\amalg_i X_i$ 上的容许度量 d_H^Z, 使得 $d_H^Z(X, X_i)\to 0\ (i\to\infty)$.

下面我们来介绍一些记号和熟知的结果，为我们结论的得出做一些必要的准备.

令 $\mathcal{M}_{k,\,d,\,v}^{K,\,D,\,V}(n)$ 为集合 $\{M^n \mid M^n$ 为闭流形，并且 $k\leqslant K_M\leqslant K;\ d\leqslant d_M\leqslant D;\ v\leqslant V(M)\leqslant V\}$, 并且当 $\mathcal{M}_{k,\,d,\,v}^{K,\,D,\,V}(n)$ 的某个上标或者下标省略时，表示对此位置量的上限或下限没有限制．如 $\mathcal{M}_{k,\,\cdot,\,v}^{\cdot,\,D,\,\cdot}(n)$ 表示集合

$$\{M^n \mid M^n \text{ 为闭流形，并且 } k\leqslant K_M;\ d_M\leqslant D;\ V(M)\leqslant V\}.$$

沿用上面的记号，下面叙述两个关于 Hausdorff 收敛的引理.

引理 2.1 (见 [5]) 令 $\{M_i\}\subset \mathcal{M}_{k,\,\cdot,\,\cdot}^{\cdot,\,D,\,\cdot}(n)$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty} M_i = X$, 则

(1) X 为长度空间，即 X 中任何两点都可由一条极小测地线相连.

(2) X 的 Toponogov 曲率不小于 k. 这意味着 Toponogov 比较定理在 X 上仍成立. 就像在截面曲率 $K_X\geqslant k$ 的流形上 Toponogov 比较定理成立一样.

引理 2.2 (见 [6]) 令 $\{M_j\}\subset \mathcal{M}_{k,\,\cdot,\,v}^{K,\,D,\,\cdot}(n)$, 并且 $\lim\limits_{j\to\infty} M_j = X$, 则

(1) X 是 n 维光滑流形.

(2) 存在微分同胚 $f_j:\ X\to M_j$, 使得拉回度量序列 $\{f_j^*g_j\}$ 按 C^1 拓扑收敛到 X 上的 $C^{1,\,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ 度量 g_∞.

(3) 指数映射 $\exp: TX\to X$ 是良定义的，并且 X 的内射半径 $i(X)\geqslant \limsup\limits_{j\to\infty} i(M_j)$.

注 2.1 这里我们对由引理 2.2 得到的 X 做一点说明. 在 Hausdorff 收敛意义下，X 作为一列光滑 Riemannian 流形的极限是一个光滑的微分流形. 然而拉回度量序列 $\{f_j^*g_j\}$ 的极限仅是 $C^{1,\,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ 的而非光滑的，因此我们没法讨论与度量 g_∞ 有关的二阶及更高阶的几何量特别是各种曲率. 但幸运的是，我们仍可讨论 (X, g_∞) 中 C^0 和 C^1 的元素 (例如直径，体积，弧长等几何量).

引理 2.3 设 $\{M_j\}\subset \mathcal{M}_{0,\,\cdot,\,v}^{1,\,D,\,\cdot}(n)$ 是一列单连通无边的 Riemannian 流形，并且 $\lim\limits_{j\to\infty} M_j = X$. 记 X 上拉回度量序列 $\{f_j^*g_j\}$ 的极限为 g_∞, $g_\infty\in C^{1,\,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$, 则 (X, g_∞) 具有以下性质： $\forall p\in X,\ r\in(0,\pi)$, 有

$$V(\mathbb{B}_r(p))\geqslant V(\mathbb{B}_r),\quad A(\partial\mathbb{B}_r(p))\geqslant A(\partial\mathbb{B}_r),$$

这里 $\mathbb{B}_r$ 表示 S^{2n} 中半径为 r 的测地球， $A(\partial\mathbb{B}_r(p))$ 表示 $\mathbb{B}_r(p)$ 的边界 $\partial\mathbb{B}_r(p)$ 的面积.

证 由引理 2.2 知， X 上的拉回度量序列 $\{f_j^*g_j\}$ 按 C^1 拓扑收敛到 X 上的 $C^{1,\,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ 度量 g_∞. $\forall p\in X$, 由 $(X, f_j^*g_j)$ 与 (M_j, g_j) 等距我们可得结论成立.

引理 2.4 (见 [7]) 设 (M, g) 是具有非负 Ricci 曲率的紧致 Riemannian 流形， d_M 是 M 的直径，则 (M, g) 上 Laplacian 算子的第一特征值 λ_1 满足 $\lambda_1\geqslant \frac{\pi^2}{d_M^2}$.

3 直径的估计和 gap 现象

定理 3.1　设 (M^{2n},g) 是 $2n$ 维紧致无边单连通的 Riemannian 流形，$K_M, V(M)$ 分别是 M^{2n} 的截面曲率和体积，则存在一个仅依赖于 n 的正数 η，使得如果 $K_M, V(M)$ 满足 $0 < K_M \leqslant 1$，$0 < V(M) \leqslant 2(1+\eta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$，那么 $d_M < \frac{3}{2}\pi$.

证　我们根据 $V(M)$ 的范围分为 3 种情况来讨论.

(1) $V(M) < 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$

利用 Günther-Bishop 体积比较定理，结论显然成立. 事实上，若 $d_M < \frac{3}{2}\pi$ 不成立，则必存在某个满足条件 $0 < K_M \leqslant 1$，$0 < V(M) < 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$ 的流形 M^{2n}，使得 $d_M \geqslant \frac{3}{2}\pi$.

我们可取 $p, q \in M^{2n}$，使得 $d(p,q) = d_M \geqslant \frac{3}{2}\pi$. 从而有 $\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p) \cap \mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(q) = \varnothing$. 由 Günther-Bishop 体积比较定理，可知

$$V(M) \geqslant V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p)) + V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(q)) \geqslant V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}) + V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}) = 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}).$$

这与条件 $V(M) < 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$ 相矛盾.

(2) $V(M) = 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$

同 (1) 再次应用 Günther-Bishop 体积比较定理可得 $d_M \leqslant \frac{3}{2}\pi$.

下面利用反证法证明必有 $d_M < \frac{3}{2}\pi$. 假设 $d_M = \frac{3}{2}\pi$. 取 $p, q \in M$，使得 $d(p,q) = d_M = \frac{3}{2}\pi$. 从而有 $\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p) \cap \mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(q) = \varnothing$. 由 Günther-Bishop 体积比较定理，可知

$$2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}) = V(M) \geqslant V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p)) + V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(q)) \geqslant V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}) + V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}) = 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}).$$

从而，有

$$M = \overline{\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p)} \cup \overline{\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(q)} = \overline{\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}} \cup \overline{\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}}$$

记 $\mathbb{B}_r(p)$ 为 M 上以点 p 为心，以 r 为测地半径的测地开球，$\mathbb{B}_r$ 为 S^{2n} 中半径为 r 的测地开球，$A_r(p)$ 和 A_r 分别表示 $\partial\mathbb{B}_r(p)$ 和 $\partial\mathbb{B}_r$ 的面积.

$\forall r, 0 < r < \pi$，由 Günther-Bishop 体积比较定理，可知 $A_r(p) \geqslant A_r$. 从而，有

$$V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}) = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} A_r \mathrm{d}r \leqslant \int_0^{\frac{3}{4}\pi} A_r(p)\mathrm{d}r = V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p)) = V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}).$$

因此，$\forall r \in (0, \frac{3}{4}\pi]$，有 $A_r(p) = A_r$.

又 $\forall r$，$0 < r < \pi$，有 A_r 关于 r 的一阶导数是存在的，所以当 $0 < r \leqslant \frac{3}{4}\pi$ 时，有 $A'_r(p) = A'_r$ 成立，此处 $r = \frac{3}{4}\pi$ 为左导数.

我们知道 $A_r = \omega_{2n}\sin^{2n-1} r$，其中 ω_{2n} 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 中标准单位球面的面积，因此 $A'_r = (2n-1)\omega_{2n}\sin^{2n-2} r\cos r$. 从而 A_r 在 $r = \frac{3}{4}\pi$ 的左导数 $A'_{\frac{3}{4}\pi-} = (2n-1)\omega_{2n}\sin^{2n-2}\frac{3}{4}\pi \cdot \cos\frac{3}{4}\pi \neq 0$，即 $A'_{\frac{3}{4}\pi-}(p) = A'_{\frac{3}{4}\pi-} \neq 0$.

记 $A'_{\frac{3}{4}\pi-}(p)$ 为 $A_r(p)$ 关于 r 在 $r = \frac{3}{4}\pi$ 处的左导数，由

$$M = \overline{\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p)} \cup \overline{\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(q)} = \overline{\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}} \cup \overline{\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}}$$

可知，$A_{\frac{3}{4}\pi}(p)$ 为 $A_r(p)$ 的局部极小值，从而，有 $A'_{\frac{3}{4}\pi-}(p) = 0$. 这与 $A'_{\frac{3}{4}\pi-} \neq 0$ 相矛盾.

(3) $V(M) > 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$

在这种情况下，我们只需要证明存在一个仅依赖于 n 的正数 η，使得若 $2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}) < V(M) \leqslant 2(1+\eta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$，则必有 $d_M < \frac{3}{2}\pi$.

反证. 如若不然, 则存在单调递减趋向于 0 的数列 $\{\eta_i\}$ 和一列 $2n$ 维 Riemannian 流形 $\{(M_i,g_i)\}$, 虽然对任意的 i, 有 $0<K_{M_i}\leqslant 1$, $2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})<V(M_i)\leqslant 2(1+\eta_i)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$, 但是 $d_{M_i}\geqslant \frac{3}{2}\pi$.

首先我们断言

$$d_{M_i}\to \frac{3}{2}\pi,\quad i\to\infty. \tag{3.1}$$

事实上, 不失一般性, 我们可以选取 $\{d_{M_i}\}$ 的一个均 $>\frac{3}{2}\pi$ 的子列, 不妨仍记为 $\{d_{M_i}\}$, 即 $\{d_{M_i}\}$ 满足对每个 i 均有 $d_{M_i}>\frac{3}{2}\pi$. 记 p_i 和 q_i 是流形 M_i 上满足 $d(p_i,q_i)=d_{M_i}$ 的两点, γ_{p_i,q_i} 是 M_i 上由点 p_i 出发连结 p_i 和 q_i 的极小测地线. 取 $G_i\in\gamma_{p_i,q_i}$, 使得 $d(p_i,G_i)=d(G_i,q_i)$. 下面考虑测地球 $\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p_i)$, $\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(q_i)$, $\mathbb{B}_{\lambda_i}(G_i)$, 其中 $\lambda_i=\frac{1}{2}(d_{M_i}-\frac{3}{2}\pi)$. 显然这 3 个测地球是两两不交的. 从而, 有

$$\begin{aligned}2(1+\eta_i)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})\geqslant V(M_i)&\geqslant V(\mathbb{B}_{\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}}(p_i))+V(\mathbb{B}_{\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}}(q_i))+V(\mathbb{B}_{\lambda_i}(G_i))\\&\geqslant 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})+V(\mathbb{B}_{\lambda_i}).\end{aligned}$$

当 $i\to\infty$ 时, 有 $\eta_i\to 0$, 我们可知 (3.1) 成立.

由极限的定义可知, 存在正整数 N_0, 使得 $i\geqslant N_0$ 时, 有 $d_{M_i}\leqslant 2\pi$. 将从 $i\geqslant N_0$ 开始的流形 $\{M_i\}$ 重新进行编号, 仍记为 $\{M_i\}$, 此时, 对某个 D,v 显然有 $\{M_i\}\subset\mathcal{M}_{0,\cdot,v}^{1,D,\cdot}(n)$ 成立.

因此由文 [6] 可知, $\{M_i\}$ 收敛到一个光滑流形 X, X 上具有 $C^{1,\alpha}$ 度量 g_∞, 并且有

$$i(X)\geqslant\pi,\quad d_X=\frac{3}{2}\pi,\quad V(X)\leqslant 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}).$$

事实上, 对于光滑的极限流形 X, 我们赋予其拉回度量 $f_i^*g_i$ 可得 $(X,f_i^*g_i)$. 又因为 $(X,f_i^*g_i)$ 与 (M_i,g_i) 等距, 所以 $(X,f_i^*g_i)$ 的直径等于 d_{M_i} 且 d_{M_i} 收敛于 $\frac{3}{2}\pi$. 又 $f_i^*g_i$ 在 C^1 拓扑下收敛到 g_∞, 故 (X,g_∞) 的直径为 $\frac{3}{2}\pi$. 同理可得 $V(X)\leqslant 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$. 取 $p,q\in X$, 使得 $d(p,q)=d_X=\frac{3}{2}\pi$. 从而, 有 $\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p)\cap\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(q)=\varnothing$. 由引理 2.3, 可知

$$\begin{aligned}2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})\geqslant V(X)&\geqslant V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p))+V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(q))\\&\geqslant V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})+V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})=2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}),\end{aligned}$$

即 $V(X)=2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$.

记 $\mathbb{B}_r(p)$ 为 X 上以点 p 为心, 以 r 为测地半径的测地开球, $A_r(p)$ 和 $V_r(p)$ 分别表示 $\partial\mathbb{B}_r(p)$ 的面积和 $\mathbb{B}_r(p)$ 的体积. $\forall r\in(0,\pi)$, 由引理 2.3 可知, $A_r(p)\geqslant A_r$. 从而, 有

$$V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})=\int_0^{\frac{3}{4}\pi}A_r\mathrm{d}r\leqslant\int_0^{\frac{3}{4}\pi}A_r(p)\mathrm{d}r=V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p))=V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}).$$

因此 $\forall r\in(0,\frac{3}{4}\pi]$, 有 $A_r(p)=A_r$.

因为 X 上的度量 g_∞ 是 $C^{1,\alpha}$ 的, 所以 $\forall r$, $0<r<\pi$, 有 $A_r(p)$ 关于 r 的一阶导数是存在的. 进而当 $0<r\leqslant\frac{3}{4}\pi$ 时, 有 $A_r'(p)=A_r'$ 成立, 此处 $r=\frac{3}{4}\pi$ 为左导数.

剩余的证明过程同 (2).

因此假设不成立, 定理证毕.

作为上述定理的一个推论, 我们得到一个 gap 现象.

定理 3.2 对任意的正整数 n, 存在一个仅依赖于 n 的正数 η, 使得满足

$$0<K_M\leqslant 1,\quad 0<V(M)\leqslant 2(1+\eta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}),\quad \text{并且}\quad d_M\geqslant\frac{3}{2}\pi$$

的 $2n$ 维紧致无边单连通的 Riemannian 流形 (M^{2n},g) 是不存在的.

Laplacian 算子是流形分析上的一个非常重要的算子, 它的第一特征值也是长久以来人们关心的问题之一. 一般来讲, 第一特征值总是和流形的几何密切相关, 于是人们希望用流形的几何量来给出它的上下界的估计. 作为上述定理的一个应用, 对于第一特征值我们得到了如下的一个估计.

推论 3.1 设 (M^{2n},g) 是 $2n$ 维紧致无边的单连通 Riemannian 流形, d_M 是 M 的直径, 则存在一个仅依赖于 n 的正数 η, 使得如果 M^{2n} 满足 $0<K_M\leqslant 1$, $0<V(M)\leqslant 2(1+\eta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$, 那么 M^{2n} 上 Laplacian 算子的第一特征值 λ_1 满足 $\lambda_1>\frac{4}{9}\big(\frac{2(1+\eta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})}{V(M)}\big)^{2/n}$.

证 由定理 3.1 的结论可知, $d_M<\frac{3}{2}\pi$. 构造 M^{2n} 上的新度量 $\widetilde{g}=(\frac{3\pi}{2d_M})^2g$, 记 M^{2n} 在此新度量下构成的 Riemannian 流形为 $(\widetilde{M}^{2n},\widetilde{g})$. 由于微分同胚仅与流形的微分结构有关, 与流形上的度量无关, 因此 $\widetilde{M}^{2n}$ 与 M^{2n} 是微分同胚的. 经计算得

$$0<K_{\widetilde{M}}\leqslant 1,\quad d_{\widetilde{M}}=\frac{3}{2}\pi,\quad V(\widetilde{M})=\Big(\frac{3\pi}{2d_M}\Big)^nV(M).$$

由定理 3.2 可知, $(\frac{3\pi}{2d_M})^nV(M)=V(\widetilde{M})>2(1+\eta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$. 从而

$$d_M^2<\Big(\frac{3}{2}\pi\Big)^2\Big(\frac{V(M)}{2(1+\eta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})}\Big)^{2/n}.$$

由文 [7] 可知, $\lambda_1>\frac{4}{9}\big(\frac{2(1+\eta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})}{V(M)}\big)^{2/n}$.

利用 Hausdorff 收敛, 可以得到一个更精确一点的结论.

定理 3.3 设 (M^{2n},g) 是 $2n$ 维紧致无边单连通的 Riemannian 流形, K_M, $V(M)$ 分别是 M^{2n} 的截面曲率和体积, 则存在两个仅依赖于 n 的正数 δ 和 ϵ_n, 使得如果 K_M, $V(M)$ 满足 $0<K_M\leqslant 1$, $0<V(M)\leqslant 2(1+\delta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$, 那么 $d_M+\epsilon_n\leqslant\frac{3}{2}\pi$.

证 由定理 3.1 的结论知, 若 $\delta\leqslant\eta$, 则 $d_M<\frac{3}{2}\pi$.

下面仍然用反证法证明. 如果此定理的结论不成立, 我们可以选取一单调递减趋于 0 的正数列 $\{\delta_i\}$ 和一列 $2n$ 维 Riemannian 流形 $\{(M_i,\ g_i)\}$, 使得对每个 i, $(M_i,\ g_i)$ 虽然满足 $0<K_{M_i}\leqslant 1$, $0<V(M_i)\leqslant 2(1+\delta_i)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$, 但是当 $i\to\infty$ 时, 有 $d_{M_i}\to\frac{3}{2}\pi$. 显然对某个 D,v, $\{M_i\}\subset\mathcal{M}_{0,\cdot,v}^{1,D,\cdot}(n)$ 成立.

由文 [6] 可知, $\{M_i\}$ 收敛到一个光滑流形 X, X 上具有 $C^{1,\alpha}$ 度量 g_∞, 并且有

$$i(X)\geqslant\pi,\quad d_X=\frac{3}{2}\pi,\quad V(X)\leqslant 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}).$$

事实上, 对于光滑的极限流形 X , 我们赋予其拉回度量 $f_i^*g_i$, 可得 $(X,f_i^*g_i)$. 又因为 $(X,f_i^*g_i)$ 与 (M_i,g_i) 等距, 所以 $(X,f_i^*g_i)$ 的直径等于 d_{M_i} 且 d_{M_i} 收敛于 $\frac{3}{2}\pi$. 又 $\{f_i^*g_i\}$ 在 C^1 拓扑下收敛到 g_∞, 故 (X,g_∞) 的直径为 $\frac{3}{2}\pi$. 同理可得 $V(X)\leqslant 2V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$. 取 $p,q\in X$, 使得 $d(p,q)=d_X=\frac{3}{2}\pi$. 从而有 $\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(p)\cap\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}(q)=\varnothing$. 剩余的证明过程同定理 3.1 的 (3). 结论得证.

定理 3.4 对任意的正整数 n, 存在两个仅依赖于 n 的正数 δ 和 ϵ_n, 使得满足

$$0<K_M\leqslant 1,\quad 0<V(M)\leqslant 2(1+\delta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}),\quad \text{并且}\quad d_M>\frac{3}{2}\pi-\epsilon_n$$

的 $2n$ 维紧致无边单连通的 Riemannian 流形 (M^{2n},g) 是不存在的.

注 3.1 由定理 3.4 我们可以改进推论 3.1 中对 M 第一特征值的估计．但由于无法给出定理 3.4 中常数 ϵ_n 的具体描述，因此我们得不到更多关于流形 M 的几何性质的信息．此外，上述所有的结论 $\forall r \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 都是成立的，不只仅对 $r = \frac{3}{4}\pi$ 成立．

参 考 文 献

[1] Coghlan L. and Itokawa Y., A sphere theorem for reverse volume pinching on even-dimension manifolds [J], *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1991, 111(3):815–819.

[2] Wu J., Hausdorff convergence and sphere theorem [J], *Proc. Sym. Pure Math.*, 1993, 54:685–692.

[3] Wen Y., A note on pinching sphere theorem [J], *C. R. Acad. Sci. Ser. I*, 2004, 338:229–234.

[4] Petersen P, Riemannian Geometry [M], New York: Springer-Verlag, 1998.

[5] Grove K. and Petersen V. P., Manifolds near the boundary of existence [J], *Differ. Geom.*, 1991, 33:379–394.

[6] Peters S., Convergence of Riemannian manifolds [J], *Compositio Math.*, 1987, 62:3–16.

[7] Zhong J. and Yang H., On the estimates of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold [J], *Sci. Sinica Ser. A*, 1984, 27(12):1265–1273.

The Estimate of Diameter on Even Dimensional Riemannian Manifolds

DONG Lianlian* WANG Peihe* WEN Yuliang**

*School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu 273165, Shandong, China. E-mail: lianlian198282@163.com; peihewang@hotmail.com

**Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China. E-mail: ylwen@math.ecnu.edu.cn

Abstract Let M^{2n} be a $2n$-dimensional compact, simply connected Riemannian manifold without boundary and S^{2n} be the unit sphere in Euclidean space $\mathbb{R}^{2n+1}$. The authors derive an estimate of the diameter in this note whenever the manifold concerned satisfies that the sectional curvature K_M varies in $(0,1]$ and the volume $V(M)$ is not larger than $2(1+\eta)V(\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi})$ for some positive number η depending only on n, where $\mathbb{B}_{\frac{3}{4}\pi}$ is the geodesic ball on S^{2n} with radius $\frac{3}{4}\pi$. A gap phenomenon of the manifold concerned is given and finally a lower bound of the first eigenvalue of Laplacian operator on manifold M is obtained.

Keywords Diameter, Volume comparison theorem, Hausdorff convergence
2000 MR Subject Classification 53C20