数 学 年 刊
2009,30A(6):761–764

调和复结构

万 建 明*

提要 利用向量丛值微分形式的调和理论来研究近复结构，称之为调和复结构，它是介于复结构与 Kähler 结构之间的一种新结构．特别地，证明了 S^6 上不允许此种结构．

关键词 调和形式，近复结构
MR (2000) 主题分类 53C56
中图法分类 O186.16
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2009)06-0761-04

1 引 言

向量丛值微分形式的调和理论在调和映射与 Yang-Mills 场的研究中扮演着重要的角色．主要想法是把调和映射或 Yang-Mills 场看成某种向量丛值调和形式．受这些想法的启示，我们发现，既然近复结构是一切丛值 1-形式，很自然地我们可以用向量丛值微分形式的调和理论来研究它．尽管这是非常经典的东西，然而直到现在我们并没有在其他地方发现它．

设 M 是一紧致近复流形， J 是它的近复结构，即 $T^*M\otimes TM$ 的一个光滑截面，并且作为自同态 $J:TM\longrightarrow TM$ 满足 $J^2=-1$. 给定 M 上的黎曼度量，我们可以定义作用于 $\Gamma(T^*M\otimes TM)$ 上的 Hodge-Laplace 算子 Δ. 调和复结构定义为

$$\Delta J=0.$$

由 Δ 的定义，近复结构 J 是调和复的当且仅当对任意的 $X,Y\in\Gamma(TM)$ 有 $\nabla J(X,Y)=\nabla J(Y,X)$ 与 Trace $\nabla J=0$. 由对称性可证明 J 是可积的 (见命题 2.1). 这就是我们没有称它为调和近复结构的原因．事实上，文 [1] 从纤维丛的能量变分观点定义了调和近复结构，但它的定义并不蕴含可积性．类似于调和映射，我们定义近复结构的能量并得到了调和复结构的 Bochner 型公式．作为应用，我们证明 S^6 上不允许调和复结构．

调和复结构是介于复结构与 Kähler 结构之间的一种新结构． Kähler 结构已被深入研究了很长时间，我们希望调和复结构能够引起人们的兴趣．

2 调和复结构

本节分为两部分．第 1 部分简单介绍切丛值微分形式的调和理论；第 2 部分将给出调和复结构的定义并研究它的一些性质．

2.1 切丛值微分形式的调和理论的简单回顾

我们仅涉及切丛值微分形式．对于一般向量丛值微分形式以及更详细的材料，可参文 [2].

本文 2009 年 4 月 22 日收到．
*浙江大学数学科学中心，杭州 310027. E-mail: wanj_m@yahoo.com.cn

设 (M,g) 是一黎曼流形. ∇ 是关于 g 的 Levi-Civita 联络. TM (T^*M) 表示 M 的切丛 (余切丛). $\Gamma(\wedge^p T^*M\otimes TM)$ 表示所有切丛值 p-形式的集合. Levi-Civita 联络 ∇ 可以典则地扩张到 $\Gamma(\wedge^p T^*M\otimes TM)$:

$$(\nabla_X\omega)(X_1,\cdots,X_p)=\nabla_X(\omega(X_1,\cdots,X_p))-\sum_j(\omega(X_1,\cdots,\nabla_XX_j,\cdots,X_p)),$$

对任意的 $\omega\in\Gamma(\wedge^pT^*M\otimes TM)$ 与 $X,X_1,\cdots,X_p\in\Gamma(TM)$.

我们可以定义微分算子 $\mathrm{d}\colon\Gamma(\wedge^pT^*M\otimes TM)\longrightarrow\Gamma(\wedge^{p+1}T^*M\otimes TM)$. 对任意的 $\omega\in\Gamma(\wedge^pT^*M\otimes TM)$ 与 $X_0,X_1,\cdots,X_p\in\Gamma(TM)$,

$$\mathrm{d}\omega(X_0,\cdots,X_p)=(-1)^k(\nabla_{X_k}\omega)(X_0,\cdots,\widehat{X}_k,\cdots,X_p),$$

其中 $\widehat{X}_k$ 表示去掉 X_k 项. 余微分算子 $\delta:\Gamma(\wedge^pT^*M\otimes TM)\longrightarrow\Gamma(\wedge^{p-1}T^*M\otimes TM)$ 定义为 $\delta\omega(X_1,\cdots,X_{p-1})=-(\nabla_{e_i}\omega)(e_i,X_1,\cdots,X_{p-1})$, 其中 $\{e_i\}$ 表示局部幺正标架场.

注 2.1 容易验证上面定义的微分算子不满足 $\mathrm{d}^2=0$. 因此对于向量丛值微分形式没有相应的 Hodge 理论.

现在我们可以定义 Hodge-Laplace 算子 $\Delta=\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d}$. 如果 $\Delta\omega=0$, 我们称 ω 是调和的. 类似于微分形式情形，对于向量丛值微分形式也有相应的 Bochner 技巧，这在调和映射研究中扮演着重要的角色 (见 [2]). 若 M 是紧的，由文 [2] 可知， $\Delta\omega=0$ 当且仅当 $\mathrm{d}\omega=0$ 与 $\delta\omega=0$.

2.2 调和复结构

设 M 是一紧致近复流形， J 是它的近复结构.

定义 2.1 若 $\Delta J=0$, 我们称 J 是一调和复结构.

注 2.2 由 d 与 δ 的定义， $\Delta J=0$ 当且仅当 $\nabla J(X,Y)=\nabla J(Y,X)$ 对所有的 $X,Y\in\Gamma(TM)$ 与 Trace $\nabla J=0$. 从而 Kähler 结构必定是调和复结构.

命题 2.1 调和复结构必定是复结构.

证 由 $\mathrm{d}J$ 的定义，对任意的 $X,Y\in\Gamma(TM)$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}J(X,Y)&=(\nabla_XJ)(Y)-(\nabla_YJ)(X)\\&=\nabla_XJY-J(\nabla_XY)-\nabla_YJX+J(\nabla_YX)\\&=[X,JY]+\nabla_{JY}X-[Y,JX]-\nabla_{JX}Y-J[X,Y]\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\mathrm{d}J(JX,JY)&=(\nabla_{JX}J)(JY)-(\nabla_{JY}J)(JX)\\&=-\nabla_{JX}Y-J(\nabla_{JX}JY)+\nabla_{JY}X+J(\nabla_{JY}JX)\\&=\nabla_{JY}X-\nabla_{JX}Y-J[JX,JY].\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}J(X,Y)-\mathrm{d}J(JX,JY)=N(J)(X,Y)$, 其中 N 是 Nijenhuis 张量

$$N(J)(X,Y)=[JX,Y]+[X,JY]+J[JX,JY]-J[X,Y].$$

由于 $\Delta J=0$ 蕴含 $\mathrm{d}J=0$, 由 Newlander-Nirenberg 定理 (见 [3]), 命题得证.

若黎曼度量是 J 不变的，则称为近 (almost) Hermitian 度量. 一个近 (nearly) Kähler 流形是一近 Hermitian 流形，并对任意的 $X\in\Gamma(TM)$, 满足 $(\nabla_XJ)(X)=0$. 下面的命题表明调和复结构是近 Kähler 结构与 Kähler 结构之间恰当的度量.

命题 2.2　如果 M 对于 J 是近 Hermitian 的, 则 M 是 Kähler 的当且仅当 J 是调和复的且 M 对于 J 是近 Kähler 的.

证　近 Kähler 条件表明 $(\nabla_X J)(Y) = -(\nabla_Y J)(X)$. 结合 $\mathrm{d}J(X,Y) = 0$, 我们得到 $\nabla J = 0$. 从而 M 是 Kähler 的 (见 [3]). 相反方向是平凡的.

3 调和复结构的 Bochner 型公式

类似于一般的微分形式, 对于切丛值微分形式, 我们也有下面的 Weitzenböck 公式.

命题 3.1 (见 [2])　对任意的切丛值 p-形式 ω, 有 $\Delta\omega = -\nabla^2\omega + S$, 其中 $\nabla^2\omega = \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega - \nabla_{\nabla_{e_i e_i}}\omega$ 且 $S(X_1,\cdots,X_p) = (-1)^k(R(e_i,X_k)\omega)(e_i,X_1,\cdots,\widehat{X_k},\cdots,X_p)$, 对任意的 $X_1,\cdots,X_p \in \Gamma(TM)$, R 代表曲率张量 $R(X,Y) = -\nabla_X\nabla_Y + \nabla_Y\nabla_X + \nabla_{[X,Y]}$, $\{e_i\}$ 是局部幺正标架场.

现在我们用命题 3.1 导出调和复结构的 Bochner 型公式. 设 $\{e_i\}$ 是局部幺正标架场, 定义近复结构 J 的能量密度 $e(J) = \frac{1}{2}\langle Je_i, Je_i\rangle$. 很明显 $e(J)$ 不依赖于 $\{e_i\}$ 的选取. 若 J 是调和复结构, 则有下面的 Bochner 型公式.

命题 3.2　$\Delta e(J) = |\nabla J|^2 - \langle R(e_i,e_j)Je_i, Je_j\rangle + \langle JR(e_i,e_j)e_i, Je_j\rangle$, 其中 $|\nabla J|^2 = |(\nabla_{e_i}J)(e_j)|^2$.

证　首先有

$$\begin{aligned}
-S(X) &= (R(e_i,X)J)e_i \\
&= ((-\nabla_{e_i}\nabla_X + \nabla_X\nabla_{e_i} + \nabla_{[e_i,X]})J)e_i \\
&= -\nabla_{e_i}((\nabla_X J)e_i) + (\nabla_X J)\nabla_{e_i}e_i + \nabla_X((\nabla_{e_i}J)e_i) \\
&\quad - (\nabla_{e_i}J)\nabla_X e_i + \nabla_{[e_i,X]}Je_i - J\nabla_{[e_i,X]}e_i \\
&= -\nabla_{e_i}(\nabla_X Je_i - J(\nabla_X e_i)) + \nabla_X(J\nabla_{e_i}e_i) - J(\nabla_X\nabla_{e_i}e_i) \\
&\quad + \nabla_X(\nabla_{e_i}Je_i - J(\nabla_{e_i}e_i)) - \nabla_{e_i}(J\nabla_X e_i) + J(\nabla_{e_i}\nabla_X e_i) \\
&\quad + \nabla_{[e_i,X]}Je_i - J\nabla_{[e_i,X]}e_i \\
&= R(e_i,X)Je_i - JR(e_i,X)e_i.
\end{aligned}$$

于是 $\langle S,J\rangle = -\langle R(e_i,e_j)Je_i, Je_j\rangle + \langle J(R(e_i,e_j)e_i), Je_j\rangle$. 而

$$\begin{aligned}
\langle\nabla^2 J, J\rangle &= \langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}J, J\rangle = e_i\langle\nabla_{e_i}J, J\rangle - \langle\nabla_{e_i}J, \nabla_{e_i}J\rangle \\
&= \frac{1}{2}e_ie_i\langle J,J\rangle - |\nabla J|^2 = \Delta e(J) - |\nabla J|^2,
\end{aligned}$$

此处选取法标架 (即对固定的 p, 有 $\nabla_{e_i}e_j|_p = 0$). 由命题 3.1, $0 = \langle\Delta J, J\rangle = -\langle\nabla^2 J, J\rangle + \langle S,J\rangle$, 命题得证.

我们希望命题 3.2 有助于复结构和 Kähler 结构的研究.

注 3.1　若 J 仅是一近复结构, 从命题 3.2 证明的最后一步可看出

$$\Delta e(J) + \langle\Delta J, J\rangle = |\nabla J|^2 - \langle R(e_i,e_j)Je_i, Je_j\rangle + \langle JR(e_i,e_j)e_i, Je_j\rangle.$$

推论 3.1　若 M 容许一 Hermitian 调和复结构, 则 M 的数量曲率 $\leqslant \langle R(e_i,e_j)Je_i, Je_j\rangle$. 等号成立当且仅当 M 是 Kähler 的.

尽管我们还不知道 S^6 上是否有复结构, 作为命题 3.2 的应用, 有

定理 3.1 具有标准度量的 S^6 上不容许任何调和复结构.

证 假设 J 是 S^6 上一调和复结构，局部地可写成 $Je_i = J_i^k e_k$. 在标准度量下， S^6 上曲率张量为 $R_{ijkm} = \delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{jk}\delta_{im}$, 则有

$$\begin{aligned}\langle JR(e_i, e_j)e_i, Je_j\rangle &= \langle J(R_{iji}^k e_k), Je_j\rangle = R_{iji}^k \langle Je_k, Je_j\rangle = R_{ijik} J_k^m J_j^m \\ &= R_{ijij}(J_j^m)^2 = \sum_m (J_j^m)^2\end{aligned}$$

及

$$\langle R(e_i, e_j)Je_i, Je_j\rangle = \langle J_i^k R_{ijk}^l e_l, J_j^m e_m\rangle = J_i^k J_j^m R_{ijkm} = J_i^i J_j^j - J_i^j J_j^i.$$

由于 J 是近复结构，我们有 $\operatorname{trace} J = \sum\limits_i J_i^i = 0$, 并且 $\delta_i^j = |-\delta_i^j| = |\sum\limits_k J_i^k J_k^j| \leqslant \sum\limits_k \frac{(J_i^k)^2 + (J_k^j)^2}{2}$. 因此有 $\sum\limits_{i,j} \langle JR(e_i, e_j)e_i, Je_j\rangle = 6 \sum\limits_{i,j} (J_i^j)^2 > 6$ 及

$$\sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j)Je_i, Je_j\rangle = \Big(\sum_i J_i^i\Big)^2 + 6 = 6.$$

由命题 3.2, $\Delta e(J) > 0$, 这与极值原理相矛盾. 定理得证.

致谢 作者感谢尹方亮提及文 [1] 引起作者的注意.

参 考 文 献

[1] Wood C. M., Harmonic almost-complex structures [J], *Compositoi Mathematica*, 1995, 99:183–212.

[2] Xin Y. L., Geometry of Harmonic Maps [M], Berlin: Birkhauser, 1996.

[3] Kobayashi S. and Nomizu K., Foundations of Differntial Geometry [M], Vol. 2, New York: Wiley, 1969.

Harmonic Complex Structures

WAN Jianming*

*Center of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China. E-mail: wanj_m@yahoo.com.cn

Abstract The author uses harmonic theory for vector bundle-valued differential forms to study the almost complex structure, which is called a harmonic complex structure, a new structure intermediate between complex structure and Kähler structure. Especially, it is proved that S^6 with standard metric can not admit any harmonic complex structure.

Keywords Harmonic forms, Almost complex structures
2000 MR Subject Classification 53C56