数 学 年 刊
2016, 37A(4):367–376
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2016.0031

$\mathbf{C}^n$ 中单位球上 μ-Bloch 函数的等价刻画*

张学军[1] 黎深莲[1]

提要 设 μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数, 给出了 $\mathbf{C}^n$ 中单位球 B 上 μ-Bloch 空间 β_μ 中函数的几种刻画. 证明了下列条件是等价的: (1) $f\in\beta_\mu$; (2) $f\in H(B)$ 且函数 $\mu(|z|)(1-|z|^2)^{\gamma-1}R^{\alpha,\gamma}f(z)$ 在 B 上有界; (3) $f\in H(B)$ 且函数 $\mu(|z|)(1-|z|^2)^{M_1-1}\frac{\partial^{M_1}f}{\partial z^m}(z)$ 在 B 上有界, 其中 $|m|=M_1$; (4) $f\in H(B)$ 且函数 $\mu(|z|)(1-|z|^2)^{M_2-1}R^{(M_2)}f(z)$ 在 B 上有界.

关键词 μ-Bloch 空间, 等价刻画, 单位球
MR (2000) 主题分类 32A36
中图法分类 O174.56
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2016)04-0367-010

1 引 言

设 $\mathrm{d}v(z)$ 表示 $\mathbf{C}^n$ 中单位球 B 上的规范 Lebesgue 测度, 满足 $v(B)=1$; 设 $\alpha>-1$, 定义 B 上一个测度 $\mathrm{d}v_\alpha(z)=c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha\,\mathrm{d}v(z)$, 这里常数 c_α 满足 $v_\alpha(B)=1$; 用 $H(B)$ 表示 B 上全纯函数的全体.

在本文中, $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 和 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中的点, 记 $\langle z,w\rangle=\sum\limits_{j=1}^n z_j\overline{w_j}$. $H(B)$ 中函数 f 的梯度和径向导数分别定义为

$$\nabla f(z)=\Big(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z),\cdots,\frac{\partial f}{\partial z_n}(z)\Big),\quad Rf(z)=\sum_{j=1}^n z_j\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)=\langle\nabla f(z),\overline{z}\rangle.$$

设 $m=(m_1,\cdots,m_n)$ 为多重指标 (其中 $m_1,\cdots,m_n$ 为非负整数), 记 $|m|=m_1+\cdots+m_n$, $m!=m_1!\cdots m_n!$, $z^m=z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}$.

对于正整数 $k\geqslant 2$, $f\in H(B)$, 记 $R^{(k)}f=R[R^{(k-1)}]f$ 以及 $\partial^k f$ 表示

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^m}(z)=\frac{\partial^k f}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}(z),\quad z\in B,$$

其中 $|m|=k$.

设 α 和 γ 是任意两个实参数, 满足 $n+\alpha$ 和 $n+\alpha+\gamma$ 不是负整数, 微分算子 $R^{\alpha,\gamma}$ 和积分算子 $R_{\alpha,\gamma}$ 分别定义如下:

$$R^{\alpha,\gamma}f(z)=\sum_{|m|\geqslant 0}\frac{\Gamma(n+1+\alpha)\,\Gamma(n+1+|m|+\alpha+\gamma)}{\Gamma(n+1+\alpha+\gamma)\,\Gamma(n+1+|m|+\alpha)}\,A_m z^m,$$

$$R_{\alpha,\gamma}f(z)=\sum_{|m|\geqslant 0}\frac{\Gamma(n+1+\alpha+\gamma)\,\Gamma(n+1+|m|+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)\,\Gamma(n+1+|m|+\alpha+\gamma)}\,A_m z^m,$$

本文 2015 年 5 月 26 日收到, 2015 年 12 月 14 日收到修改稿.
[1]湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙 410006.
E-mail: xuejunttt@263.net; 1493351705@qq.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11571104), 湖南省自然科学基金 (No. 2015JJ2095), 湖南省重点学科建设项目和湖南师范大学数学与计算机科学学院高性能计算与随机信息处理省部共建教育部重点实验室的资助.

其中 $f\in H(B)$ 且 $f(z)=\sum\limits_{|m|\geqslant 0}A_m z^m,\ z\in B$.

$[0,1)$ 上正连续函数 μ 称为正规函数是指：存在常数 $0<a\leqslant b$ 和 $0\leqslant r_0<1$, 使得

(1) $\dfrac{\mu(r)}{(1-r^2)^a}$ 在 $[r_0,1)$ 上递减； (2) $\dfrac{\mu(r)}{(1-r^2)^b}$ 在 $[r_0,1)$ 上递增.

如 $\mu(r)=(1-r^2)^\alpha\big(\log\frac{2}{1-r^2}\big)^{-1}$, $\mu(r)=\big\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k\ r^{2k-2}}{\log(k+1)}\big\}^{-1}$, $\mu(r)=(1-r^2)^\alpha$, $\mu(r)=(1-r^2)^\alpha\log\log 3(1-r^2)^{-1}$ $(\alpha>0)$ 都是这种正规函数的例子.

鉴于在论证中，除了繁琐性外没有本质性的差异，不失一般性，本文中设 $r_0=0$.

设 μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数， B 上全纯函数 f 属于 μ-Bloch 空间 β_μ 是指

$$\|f\|_{\beta_\mu}=|f(0)|+\sup_{z\in B}\mu(|z|)|\nabla f(z)|<\infty.$$

这样定义的 β_μ 按其范数构成一个 Banach 空间. 当 $\mu(r)=(1-r^2)^\alpha$ $(\alpha>0)$ 时就是通常的 Bloch 型空间 β^α; 当 $\mu(r)=1-r^2$ 时就是 Bloch 空间 β.

设 $p>0$ 和 $\alpha>-1$, B 上全纯函数 f 属于加权 Bergman 空间 A^p_α 是指

$$\|f\|_{A^p_\alpha}=\Big\{\int_B|f(z)|^p\,\mathrm{d}v_\alpha(z)\Big\}^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

当 $p\geqslant 1$ 时， A^p_α 依范数 $\|\cdot\|_{A^p_\alpha}$ 构成一个 Banach 空间；当 $0<p<1$ 时， A^p_α 按距离 $\|\cdot\|^p_{A^p_\alpha}$ 构成一个 Fréchet 空间. 同时，当 $p>0$ 时， $(A^p_\alpha,\|\cdot\|_{A^p_\alpha})$ 还是一个拓扑向量空间.

B 上 Lebesgue 可测函数 f 属于空间 L^∞ 是指

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{z\in B}|f(z)|<\infty.$$

全纯函数空间中函数的等价刻画由来已久，这里主要是讨论函数空间的性质 (如考虑函数空间上复合算子的有界性或紧性条件、 Gleason 问题的可解性、对偶空间和原子分解等) 时往往需要对该空间的函数用其他形式进行刻画. 在 2005 年，文 [1] 初步引入了 μ-Bloch 函数的等价定义； 2009 年，陈怀惠等在文 [2] 中给出了如下刻画.

定理 A 设 μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数， $f\in H(B)$, 则下列 3 个条件等价：

(1) $f\in\beta_\mu$; (2) $\sup\limits_{z\in B}\mu(|z|)|Rf(z)|<\infty$; (3) $\sup\limits_{z\in B}Q^\mu_f(z)<\infty$.

就在最近，文 [3] 给出了如下结果.

定理 B 设 μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数， $t>\max\{b-1,0\}$, 则 $f\in\beta_\mu$ 的充要条件为：存在 $g\in L^\infty$, 使得

$$f(z)=\int_B\frac{g(w)}{\mu(|w|)\ (1-\langle z,w\rangle)^{n+t}}\,\mathrm{d}v_t(w),\quad z\in B.$$

此外，在文 [4] 中， Zhu 就 Bloch 空间 β 给出了如下结果.

定理 C 设 N 为正整数， $\gamma>0$, $f\in H(B)$, 实参数 α 满足 $n+\alpha$ 和 $n+\alpha+\gamma$ 都不是负整数，则下列几个条件等价：

(1) $f\in\beta$;

(2) 函数 $(1-|z|^2)^\gamma R^{\alpha,\gamma}f(z)$ 在 B 上有界;

(3) 函数 $(1-|z|^2)^N \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z)$ 在 B 上有界，其中 $|m|=N$.

有关 Bloch 型空间的其他研究还可参阅文 [5–9] 等. 本文中，我们将权 $1-|z|^2$ 推广到一般正规权 $\mu(|z|)$, 主要讨论正规权 Bloch 型空间 β_μ 上类似上述定理 C 的等价刻画，同时还给出了这几种模是可以相互控制的，由于权是抽象的加上还要考虑模控制，论证方式和处理方式与原有 Bloch 空间的有较大差异.

本文中我们将用记号 c, c', c'', c''' 表示不依赖 z, w 和函数的正的常数，但可以和某些参数有关，不同的地方可以代表不同的数. “$E\approx F$” 表示比较或称等价，即存在正的常数 A_1 和 A_2, 使得 $A_1E\leqslant F\leqslant A_2E$.

本文中的 a 和 b 指正规函数 μ 定义中的那两个参数.

2 一些引理

为了证明主要结果，首先我们给出一些引理.

引理 2.1[3] 设 μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数， $t>\max\{b-1,0\}$, 则 $f\in\beta_\mu$ 的充要条件为：存在 $g\in L^\infty$, 使得

$$f(z)=\int_B \frac{g(w)}{\mu(|w|)\ (1-\langle z,w\rangle)^{n+t}}\ \mathrm{d}v_t(w),\quad z\in B.$$

进一步有 $\|g\|_\infty\approx\|f\|_{\beta_\mu}$, 且控制常数与 f 和 g 无关.

证 这是文 [3] 中的定理 3.1.

引理 2.2[10] 设 μ 是 $[0,1)$ 上的一个正规函数，则对任意 $z,w\in B$, 有

$$\frac{\mu(|z|)}{\mu(|w|)}\leqslant\Big(\frac{1-|z|^2}{1-|w|^2}\Big)^a+\Big(\frac{1-|z|^2}{1-|w|^2}\Big)^b.$$

证 这是文 [10] 中的引理 2.2(2).

引理 2.3[11] 设 $t>-1$, σ 为实数，记

$$I(z,\sigma,t)=\int_B \frac{(1-|w|^2)^t}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+t+\sigma}}\ \mathrm{d}v(w),\quad z\in B,$$

则

(1) 当 $\sigma<0$ 时， $I(z,\sigma,t)\approx 1$;

(2) 当 $\sigma=0$ 时， $I(z,\sigma,t)\approx\log\frac{2}{1-|z|^2}$;

(3) 当 $\sigma>0$ 时， $I(z,\sigma,t)\approx\frac{1}{(1-|z|^2)^\sigma}$.

证 这是文 [11] 中的命题 1.4.10.

引理 2.4[4] 设 $\alpha>-1$, 若 $f\in A^1_\alpha$, 则

$$f(z)=\int_B \frac{f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}\ \mathrm{d}v_\alpha(w),\quad z\in B.$$

证 这是文 [4] 中的定理 2.2.

引理 2.5 设实数 $n+\alpha$ 不为负整数， $f(x)=(1-x)^{-\lambda}$ ($|x|<1$, x 为复变量), 则

(1) 当 $\lambda<1$ 时， $|R_{\alpha,1}f(x)|\leqslant c$;

(2) 当 $\lambda=1$ 时， $|R_{\alpha,1}f(x)|\leqslant c\log 2(1-|x|)^{-1}$;

(3) 当 $\lambda>1$ 且为整数时，

$$R_{\alpha,1}f(x)=\frac{C_1}{(1-x)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{C_{\lambda-1}}{1-x}+h(x),\quad \text{其中 } |h(x)|\leqslant c\log\frac{2}{1-|x|};$$

(4) 当 $\lambda>1$ 且不为整数时，用 $[\lambda]$ 表示对 λ 取整，则

$$R_{\alpha,1}f(x)=\frac{C_1}{(1-x)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{C_{[\lambda]}}{(1-x)^{\lambda-[\lambda]}}+h(x),\quad \text{其中 } |h(x)|\leqslant c.$$

证 当 $\lambda\leqslant 0$ 为整数时， $(1-x)^{-\lambda}$ 为多项式，因而 $R_{\alpha,1}f(x)$ 也为多项式，结论显然；当 $\lambda<0$ 不为整数或 $\lambda>0$ 时，有下列 Taylor 展开式：

$$\frac{1}{(1-x)^{\lambda}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+k)}{k!\ \Gamma(\lambda)}\ x^k.$$

因而可以得到

$$R_{\alpha,1}f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n+1+\alpha}{n+1+\alpha+k}\frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)\ k!}\ x^k.$$

根据 Stirling 公式，可得

$$|R_{\alpha,1}f(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|n+1+\alpha|}{|n+1+\alpha+k|}\frac{|\Gamma(\lambda+k)|}{|\Gamma(\lambda)|\ k!}\ |x|^k\approx 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^k}{k^{2-\lambda}}.$$

这样立即得到 (1)–(2).

当 $\lambda>1$ 为整数时，

$$\begin{aligned}R_{\alpha,1}f(x)&=\frac{n+1+\alpha}{\lambda-1}\frac{1}{(1-x)^{\lambda-1}}+\frac{(\lambda-2-n-\alpha)}{(n+1+\alpha)^{-1}\Gamma(\lambda)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda-1+k)\ x^k}{(n+1+\alpha+k)\ k!}\\&=\cdots=\frac{C_1}{(1-x)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{C_{\lambda-1}}{1-x}+C_\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{n+1+\alpha+k},\end{aligned}$$

其中

$$|h(x)|=\Big|C_\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{n+1+\alpha+k}\Big|\leqslant\frac{|C_\lambda|}{|n+1+\alpha|}+c|C_\lambda|\log\frac{1}{1-|x|}\leqslant c'\log\frac{2}{1-|x|}.$$

当 $\lambda>1$ 不为整数时，

$$R_{\alpha,1}f(x)=\frac{C_1}{(1-x)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{C_{[\lambda]}}{(1-x)^{\lambda-[\lambda]}}+C_{[\lambda]+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda-[\lambda]+k)}{(n+1+\alpha+k)\ k!}\ x^k,$$

其中根据 Stirling 公式，可得

$$\begin{aligned}|h(x)|&=\Big|C_{[\lambda]+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda-[\lambda]+k)}{(n+1+\alpha+k)\ k!}\ x^k\Big|\\&\leqslant\frac{|C_{[\lambda]+1}|\ \Gamma(\lambda-[\lambda])}{|n+1+\alpha|}+|C_{[\lambda]+1}|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda-[\lambda]+k)}{|n+1+\alpha+k|\ k!}\approx\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2-(\lambda-[\lambda])}}\leqslant c.\end{aligned}$$

引理 2.6[4]　设 $\alpha > -1$, 多重指标 $m = (m_1, \cdots, m_n)$, 则

$$\int_B |z^m|^2 \,\mathrm{d}v_\alpha(z) = \frac{m!\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)}.$$

证　这是文 [4] 中的 (1.23).

3　主要结果及其证明

在讨论函数空间的性质 (如算子的有界性以及紧性条件等) 时，需要一些量之间的相互控制关系，下面定理不仅给出了几种等价关系，而且还给出了相互控制关系.

定理 3.1　设 μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数， M_1 和 M_2 为正整数， $\gamma > \max\{1-a, 0\}$, 实参数 α 满足 $n+\alpha$ 和 $n+\alpha+\gamma$ 都不是负整数，则下列几条等价：

(1) $f \in \beta_\mu$;

(2) $f \in H(B)$ 且 $\mathrm{T} = \sup\limits_{z\in B} \mu(|z|)(1-|z|^2)^{\gamma-1}|R^{\alpha,\gamma} f(z)| < \infty$;

(3) $f \in H(B)$ 且 $\mathrm{I} = \sup\limits_{z\in B} \mu(|z|)(1-|z|^2)^{M_1-1}\left|\frac{\partial^{M_1} f}{\partial z^m}(z)\right| < \infty$, 其中 $|m| = M_1$;

(4) $f \in H(B)$ 且 $\mathrm{J} = \sup\limits_{z\in B} \mu(|z|)(1-|z|^2)^{M_2-1}|R^{(M_2)} f(z)| < \infty$.

进一步，存在与 f 无关的控制常数，使得

$$\|f\|_{\beta_\mu} \approx \mathrm{T} \approx \sum_{|m|=0}^{M_1-1} \left|\frac{\partial^{|m|} f}{\partial z^m}(0)\right| + \mathrm{I} \approx |f(0)| + \mathrm{J},$$

其中 $\partial^0 f = f$.

证　(1) $\Rightarrow$ (2).

若 $f \in \beta_\mu$, 选择参数 $t > \max\{b-1, 0\}$, 根据引理 2.1 可知，存在 $g \in L^\infty$, 使得

$$f(z) = \int_B \frac{g(w)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t}} \,\mathrm{d}v_t(w), \quad z \in B. \tag{3.1}$$

若选择 t 还满足 $t = \alpha + N + 1$ (N 为某个正整数), 利用文 [4] 中的引理 2.18 知，存在 N 次一元多项式 P, 使得

$$R^{\alpha,\gamma} f(z) = \int_B \frac{g(w)P(\langle z,w\rangle)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t+\gamma}} \,\mathrm{d}v_t(w), \quad z \in B.$$

由引理 2.2–2.3 可得，当 $\gamma + b - 1 > \gamma + a - 1 > 0$ 时，有

$$\begin{aligned}\mu(|z|)(1-|z|^2)^{\gamma-1}|R^{\alpha,\gamma} f(z)| &\leqslant c\|g\|_\infty \int_B \frac{(1-|z|^2)^{\gamma-1}\mu(|z|)(1-|w|^2)^t}{\mu(|w|)|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+\gamma}} \,\mathrm{d}v(w)\\ &\leqslant c\|g\|_\infty \int_B \frac{(1-|z|^2)^{\gamma+a-1}(1-|w|^2)^{t-a}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+\gamma}} \,\mathrm{d}v(w)\\ &\quad + c\|g\|_\infty \int_B \frac{(1-|z|^2)^{\gamma+b-1}(1-|w|^2)^{t-b}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+\gamma}} \,\mathrm{d}v(w)\\ &\leqslant c'\|g\|_\infty.\end{aligned}$$

再根据引理 2.1, 有 $\mathrm{T} \leqslant c'\|g\|_\infty \leqslant c''\|f\|_{\beta_\mu}$.

(2) $\Rightarrow$ (1).

若 $f\in H(B)$ 且 $\mathrm{T}=\sup\limits_{z\in B}\mu(|z|)(1-|z|^2)^{\gamma-1}|R^{\alpha,\gamma}f(z)|<\infty$. 利用 $\mu(|z|)\geqslant\mu(0)(1-|z|^2)^b$ 可得，当 $q>\gamma+b-2$ 时 $R^{\alpha,\gamma}f\in A_q^1$, 再由引理 2.4, 有

$$R^{\alpha,\gamma}f(z)=\int_B\frac{R^{\alpha,\gamma}f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+q}}\ \mathrm{d}v_q(w). \tag{3.2}$$

取函数

$$\varphi(z)=\frac{c_{\alpha+N+\gamma}}{c_{\alpha+N+1}}\ \mu(|z|)(1-|z|^2)^{\gamma-1}R^{\alpha+N,\gamma}f(z),$$

其中 N 是满足 $\alpha+N+1>\max\{b-1,0\}$ 的某个正整数.

当 $N=1$ 时，根据文 [4] 中命题 1.14 经计算，有

$$\begin{aligned}&R^{\alpha,\gamma}\Big\{\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+2+\alpha}}\Big\}\\&=\frac{n+1+\alpha+\gamma}{n+1+\alpha}\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+2+\alpha+\gamma}}-\frac{\gamma}{n+1+\alpha}\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha+\gamma}}\\&=\frac{n+1+\alpha+\gamma}{n+1+\alpha}R^{\alpha+1,\gamma}\Big\{\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+2+\alpha}}\Big\}\\&\quad-\frac{\gamma}{n+1+\alpha}R_{\alpha,1}R^{\alpha,\gamma}\Big\{\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+2+\alpha}}\Big\}.\end{aligned}$$

这样就有算子关系

$$R^{\alpha+1,\gamma}=\frac{n+1+\alpha}{n+1+\alpha+\gamma}R^{\alpha,\gamma}+\frac{\gamma}{n+1+\alpha+\gamma}R_{\alpha,1}R^{\alpha,\gamma}. \tag{3.3}$$

根据 (3.2)–(3.3) 可得

$$\begin{aligned}&R^{\alpha+1,\gamma}f(z)-\frac{n+1+\alpha}{n+1+\alpha+\gamma}R^{\alpha,\gamma}f(z)\\&=\frac{\gamma}{n+1+\alpha+\gamma}\int_B R^{\alpha,\gamma}f(w)R_{\alpha,1}\Big\{\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+q}}\Big\}\mathrm{d}v_q(w).\end{aligned} \tag{3.4}$$

因 $n+1+q>n+b-a>1$, 选择不为整数的 q, 利用引理 2.5 中情况 (4), 有

$$\Big|R_{\alpha,1}\Big\{\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+q}}\Big\}\Big|\leqslant\frac{c}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+q}}. \tag{3.5}$$

根据 (3.4)–(3.5) 以及引理 2.2–2.3 分情况讨论，可得

$$\begin{aligned}|\varphi(z)|&\leqslant c\mathrm{T}+c'\mu(|z|)(1-|z|^2)^{\gamma-1}\int_B|R^{\alpha,\gamma}f(w)|\Big\{\frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+q}}\Big\}\mathrm{d}v_q(w)\\&\leqslant c\mathrm{T}+c'\mathrm{T}\int_B\frac{\mu(|z|)(1-|z|^2)^{\gamma-1}}{\mu(|w|)(1-|w|^2)^{\gamma-1}}\Big\{\frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+q}}\Big\}\mathrm{d}v_q(w)\\&\leqslant c''\mathrm{T}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

当 $N>1$ 时反复利用 (3.3) 中不同的 α 递推可得出 (3.6) 仍成立.

另外，记 $t=\alpha+N+1$ 及 $f(z)=\sum\limits_{|m|\geqslant0}A_mz^m$, 由文 [4] 中的 (1.21) 和引理 2.6, 有

$$\begin{aligned}&\int_B\frac{\varphi(w)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t}}\ \mathrm{d}v_t(w)\\&=\int_B\frac{R^{\alpha+N,\gamma}f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\alpha+N+1}}\ \mathrm{d}v_{\alpha+N+\gamma}(w)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{|m|\geqslant 0} \frac{\Gamma(n+1+\alpha+N)\Gamma(n+1+\alpha+N+|m|+\gamma)}{\Gamma(n+1+\alpha+N+\gamma)\Gamma(n+1+\alpha+N+|m|)} A_m z^m \\
&\quad \times \frac{\Gamma(n+\alpha+N+1+|m|)}{m!\,\Gamma(n+\alpha+N+1)} \int_B |w^m|^2 \, \mathrm{d}v_{\alpha+N+\gamma}(w) \\
&= \sum_{|m|\geqslant 0} \frac{\Gamma(n+1+\alpha+N)\Gamma(n+1+\alpha+N+|m|+\gamma)}{\Gamma(n+1+\alpha+N+\gamma)\Gamma(n+1+\alpha+N+|m|)} A_m z^m \\
&\quad \times \frac{\Gamma(n+\alpha+N+1+|m|)}{m!\,\Gamma(n+\alpha+N+1)} \frac{m!\,\Gamma(n+1+\alpha+N+\gamma)}{\Gamma(n+|m|+1+\alpha+N+\gamma)} \\
&= \sum_{|m|\geqslant 0} A_m z^m = f(z).
\end{aligned}
$$

再根据引理 2.1 以及 (3.6) 可知 $f \in \beta_\mu$ 且 $\|f\|_{\beta_\mu} \leqslant c\|\varphi\|_\infty \leqslant c'\mathrm{T}$.

(1) $\Rightarrow$ (3).

若 $f \in \beta_\mu$, 根据 (3.1), 可得

$$
\frac{\partial^{M_1} f}{\partial z^m}(z) = \int_B \frac{(n+t)\cdots(n+t+M_1-1)\ \overline{w}^m\ g(w)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t+M_1}} \, \mathrm{d}v_t(w).
$$

根据引理 2.2–2.3 可得

$$
\begin{aligned}
&\mu(|z|)(1-|z|^2)^{M_1-1}\Big|\frac{\partial^{M_1} f}{\partial z^m}(z)\Big| \\
&\leqslant c\|g\|_\infty \int_B \frac{\mu(|z|)(1-|z|^2)^{M_1-1}}{\mu(|w|)|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+M_1}} \, \mathrm{d}v_t(w) \leqslant c'\|g\|_\infty,
\end{aligned}
$$

这表明 $\mathrm{I} \leqslant c'\|g\|_\infty$.

此外，根据 (3.1), 有

$$
|f(0)| = \Big|\int_B \frac{g(w)}{\mu(|w|)} \, \mathrm{d}v_t(w)\Big| \leqslant \frac{c_t\ \|g\|_\infty}{\mu(0)} \int_B (1-|w|^2)^{t-b} \, \mathrm{d}v(w) \leqslant c\|g\|_\infty.
$$

若 $M_1 > 1$, 对 $|m| = 1, \cdots, M_1-1$, 有

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial^{|m|} f}{\partial z^m}(0)\Big| &= \Big|\int_B \frac{(n+t)\cdots(n+t+|m|-1)\ \overline{w^m}\ g(w)}{\mu(|w|)} \, \mathrm{d}v_t(w)\Big| \\
&\leqslant \frac{c_t(n+t)\cdots(n+t+|m|-1)\ \|g\|_\infty}{\mu(0)} \int_B (1-|w|^2)^{t-b} \, \mathrm{d}v(w) \\
&\leqslant c\|g\|_\infty.
\end{aligned}
$$

结合引理 2.1, 则有

$$
\sum_{|m|=0}^{M_1-1} \Big|\frac{\partial^{|m|} f}{\partial z^m}(0)\Big| + \mathrm{I} \leqslant c\|g\|_\infty \leqslant c'\|f\|_{\beta_\mu}.
$$

(3) $\Rightarrow$ (1).

若 $f \in H(B)$ 且

$$
\mathrm{I} = \sup_{z\in B} \mu(|z|)(1-|z|^2)^{M_1-1}\Big|\frac{\partial^{M_1} f}{\partial z^m}(z)\Big| < \infty. \tag{3.7}
$$

当 $M_1 = 2$ 时，若 $t > b$, 则有 $\partial^2 f \in A_t^1$, 对 $k, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 根据引理 2.4, 有

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial z_j}(z) = \int_B \frac{\partial^2 f}{\partial w_k \partial w_j}(w) \frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t}} \, \mathrm{d}v_t(w), \quad z \in B.
$$

根据常规极限，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(n+t)x}\Big\{\frac{1}{(1-x)^{n+t}}-1\Big\}=1.$$

结合 Fubini 定理以及 (3.7), 可得

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)-\frac{\partial f}{\partial z_k}(0)\Big| &= \Big|\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 z_j\frac{\partial^2 f}{\partial z_k\partial z_j}(\rho z)\ \mathrm{d}\rho\Big| \\ &= \Big|\int_B \frac{\partial^2 f}{\partial w_k\partial w_j}(w)\Big\{\sum_{j=1}^{n} z_j\int_0^1\frac{1}{(1-\rho\langle z,w\rangle)^{n+t+1}}\ \mathrm{d}\rho\Big\}\mathrm{d}v_t(w)\Big| \\ &= \Big|\int_B \frac{\partial^2 f}{\partial w_k\partial w_j}(w)\Big\{\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j}{(n+t)\langle z,w\rangle}\Big[\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+t}}-1\Big]\Big\}\mathrm{d}v_t(w)\Big| \\ &\leqslant c\int_B\Big|\frac{\partial^2 f}{\partial w_k\partial w_j}(w)\Big|\frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t}}\ \mathrm{d}v_t(w) \\ &\leqslant c\mathrm{I}\int_B\frac{1}{\mu(|w|)(1-|w|^2)|1-\langle z,w\rangle|^{n+t}}\ \mathrm{d}v_t(w).\end{aligned}$$

由于 $t>b>b-1>a-1$, 上式结合引理 2.2–2.3, 则有

$$\begin{aligned}\mu(|z|)\Big|\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)-\frac{\partial f}{\partial z_k}(0)\Big| &\leqslant c'\mathrm{I}(1-|z|^2)^a\int_B\frac{(1-|w|^2)^{t-a-1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t}}\ \mathrm{d}v(w) \\ &\quad + c'\mathrm{I}(1-|z|^2)^b\int_B\frac{(1-|w|^2)^{t-b-1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t}}\ \mathrm{d}v(w) \\ &\leqslant c''\mathrm{I}\Rightarrow \mu(|z|)|\nabla f(z)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mu(|z|)\Big|\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)\Big| \\ &\leqslant c'''\mathrm{I}+\mu(0)\sum_{k=1}^{n}\Big|\frac{\partial f}{\partial z_k}(0)\Big|.\end{aligned}$$

因此 $f\in\beta_\mu$ 且

$$\|f\|_{\beta_\mu}\leqslant c\Big\{|f(0)|+\sum_{k=1}^{n}\Big|\frac{\partial f}{\partial z_k}(0)\Big|+\mathrm{I}\Big\}.$$

当 $M_1>2$ 时，对 $q\in\{3,\cdots,M_1\}$ 以及 $j_1,\cdots,j_q\in\{1,\cdots,n\}$, 利用如下等式

$$\frac{\partial^{q-1}f}{\partial z_{j_1}\cdots\partial z_{j_{q-1}}}(z)-\frac{\partial^{q-1}f}{\partial z_{j_1}\cdots\partial z_{j_{q-1}}}(0)=\sum_{j_q=1}^{n}\int_0^1 z_{j_q}\frac{\partial^q f}{\partial z_{j_1}\cdots\partial z_{j_q}}(\rho z)\ \mathrm{d}\rho,$$

类似 $M_1=2$ 的情形利用归纳法即可.

(1) $\Rightarrow$ (4).

只要利用 (3.1) 和等式

$$R^{(M_2)}f(z)=\int_B\frac{g(w)\ P_{M_2}(1-\langle z,w\rangle)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t+M_2}}\ \mathrm{d}v_t(w),$$

其中 P_{M_2} 为一元 M_2 次多项式.

结合引理 2.2–2.3 和文 [2] 中定理 2 类似 “(1) $\Rightarrow$ (3)” 的证明即可得到 $\mathrm{J}\leqslant c\|f\|_{\beta_\mu}$, 从而 $|f(0)|+\mathrm{J}\leqslant c'\|f\|_{\beta_\mu}$.

(4) $\Rightarrow$ (1).

若 $f\in H(B)$ 且

$$\mathrm{J}=\sup_{z\in B}\mu(|z|)(1-|z|^2)^{M_2-1}|R^{(M_2)}f(z)|<\infty. \tag{3.8}$$

当 $M_2=2$ 时，只要 $t>b$, 结合 $R^{(2)}f(0)=0$, 同样可得

$$\begin{aligned}R^{(2)}f(z)&=\int_B\frac{R^{(2)}f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t}}\ \mathrm{d}v_t(w)\\&=\int_B R^{(2)}f(w)\Big\{\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t}}-1\Big\}\ \mathrm{d}v_t(w).\end{aligned}$$

上式结合 $Rf(0)=0$, 则有

$$Rf(z)=\int_0^1\frac{R^{(2)}f(\rho z)}{\rho}\ \mathrm{d}\rho=\int_B R^{(2)}f(w)L(z,w)\ \mathrm{d}v_t(w).$$

根据文 [4] 中定理 2.16 的证明过程，可知

$$L(z,w)=\int_0^1\frac{1}{\rho}\Big\{\frac{1}{(1-\rho\langle z,w\rangle)^{n+1+t}}-1\Big\}\mathrm{d}\rho$$

满足

$$|L(z,w)|\leqslant\frac{c}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t}}.$$

因此，根据 (3.8) 以及引理 2.2–2.3, 可得

$$\mu(|z|)|Rf(z)|\leqslant c\mathrm{J}\int_B\frac{\mu(|z|)\ \mathrm{d}v_t(w)}{\mu(|w|)(1-|w|^2)|1-\langle z,w\rangle|^{n+t}}\leqslant c'\mathrm{J}.$$

再利用文 [2] 中定理 2 可得， $f\in\beta_\mu$ 且 $\|f\|_{\beta_\mu}\leqslant c\{|f(0)|+\mathrm{J}\}$.

当 $M_2>2$ 时，对 $k\in\{3,\cdots,M_2\}$, 利用如下等式

$$R^{(k-1)}f(z)=\int_0^1\frac{R^{(k)}f(\rho z)}{\rho}\ \mathrm{d}\rho,$$

类似 $M_2=2$ 情形用归纳法即可.

致谢 感谢审稿人的有益建议.

参　考　文　献

[1] Zhang X J, Xiao J B. Weighted composition operators between μ-Bloch spaces on the unit ball [J]. *Science in China*, 2005, 48A(10):1349–1368.

[2] Chen H H, Gauthier P. Composition operators on μ-Bloch spaces [J]. *Cana J Math*, 2009, 61(1):50–75.

[3] 张学军，李敏，关莹，李俊锋. $\mathbf{C}^n$ 中 μ-Bloch 空间上的原子分解 [J]. 中国科学：数学, 2015, 45(10):1677–1688.

[4] Zhu K H. Spaces of holomorphic functions in the unit ball [M]. New York: Springer-Verlag, 2005.

[5] Zhou Z H, Shi J H. Compactness of composition operators on the Bloch space in classical bounded symmetric domains [J]. *Michigan Math J*, 2002, 50:381–405.

[6] Zhang M Z, Xu W. Composition operators on α-Bloch spaces of the unit ball [J]. *Acta Math Sin*, Eng Ser, 2007, 23(11):1991–2002.

[7] Shi J H, Luo L. Composition operators on the Bloch space of several complex variables [J]. *Acta Math Sin*, Eng Ser, 2000, 16: 85–98.

[8] 张学军，李菊香. $\mathbf{C}^n$ 中单位球上 μ-Bloch 空间之间的复合算子 [J]. 数学物理学报, 2009, 29A(3):573–583.

[9] Lou Z J. Composition operators on Bloch type spaces [J]. *Analysis*, 2003, 23:81–95.

[10] Zhang X J, Xi L H, Fan H X, Li J F. Atomic decomposition of μ-Bergman space in $\mathbf{C}^n$ [J]. *Acta Math Sci*, 2014, 34B(3):779–789.

[11] Rudin W. Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$ [M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

Equivalent Characterizations of μ-Bloch Functions on the Unit Ball in $\mathbf{C}^n$

ZHANG Xuejun[1] LI Shenlian[1]

[1]College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410006, China. E-mail: xuejunttt@263.net; 1493351705@qq.com

Abstract Let μ be a normal function on $[0,1)$. In this paper, the authors give some equivalent characterizations of μ-Bloch functions on the unit ball in $\mathbf{C}^n$. They prove that the following conditions are equivalent:

(1) $f \in \beta_\mu$;

(2) $f \in H(B)$ and the function $\mu(|z|)(1-|z|^2)^{\gamma-1}R^{\alpha,\gamma}f(z)$ is bounded in B;

(3) $f \in H(B)$ and the function $\mu(|z|)(1-|z|^2)^{M_1-1}\frac{\partial^{M_1}f}{\partial z^m}(z)$ is bounded in B, where $|m| = M_1$;

(4) $f \in H(B)$ and the function $\mu(|z|)(1-|z|^2)^{M_2-1}R^{(M_2)}f(z)$ is bounded in B.

Keywords μ-Bloch space, Equivalent characterization, Unit ball
2000 MR Subject Classification 32A36

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 37 No. 4, 2016
by ALLERTON PRESS, INC., USA