

Van der Waals 气体 Euler 方程的 Riemann 问题 及基本波的相互作用*

盛 万 成¹ 王 斌²

摘要 研究了修正的等熵 Van der Waals 气体动力学 Euler 方程 Riemann 问题及其基本波的相互作用. 利用 Maxwell 提出的等面积法则, 将 Van der Waals 气体状态方程修正为与实际相符, 从而守恒律方程组从混合型转化为双曲型. 利用广义特征线分析法, 构造性地得到了 Riemann 问题的解是存在的. 进一步, 得到了基本波相互作用.

关键词 Euler 方程, Van der Waals 气体, Riemann 问题, 基本波的相互作用

MR (2000) 主题分类 35A09, 76N10

中图法分类 O175.29

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2016)04-0377-20

1 引 言

可压缩流等熵 Euler 方程组为

$$\begin{cases} u_t + p(\tau)_x = 0, \\ \tau_t - u_x = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\tau \geq 0$, $u, p(\tau) \geq 0$ 分别表示气体比容、速度以及压强. 等熵 Van der Waals 气体的状态方程为

$$p(\tau) = \frac{A}{\tau - b} - \frac{a}{\tau^2}, \quad (1.2)$$

这里 a 和 b 是气体的特征常数, A 是常数. 如图 1 所示, 当常数 A 充分小时, 在图中 \overline{DEF} 段 $p'(\tau) > 0$, 方程组 (1.1) 在这段上是椭圆型的, 而在其它处, $p'(\tau) < 0$, 方程组 (1.1) 是双曲型的. Maxwell 指出 $p'(\tau) > 0$ 违背了热力学稳定性定律. 根据热力学稳定性定律, $p'(\tau)$ 必须是非正的, 为了提供物理上有意义的的结果, Maxwell 构造了一个等面积法则 (如图 1), 计算一个平均压力作为压力函数值. 取 τ_C, τ_G 及 \bar{p} , 满足

$$\int_{\tau_C}^{\tau_G} p(\tau) d\tau = \bar{p}(\tau_G - \tau_C), \quad p(\tau_C) = p(\tau_G) = \bar{p}. \quad (1.3)$$

又因为 $p(\tau)$ 在 τ_C 和 τ_G 处是不可微的, 我们使用磨光算子, 使得 $p(\tau)$ 在 τ_C 和 τ_G 处是二次连续可微的.

本文 2015 年 5 月 17 日收到. 2016 年 2 月 4 日收到修改稿.

¹通讯作者. 上海大学理学院, 上海 200444. E-mail: mathwvsheng@t.shu.edu.cn

²上海大学理学院, 上海 200444. E-mail: binwangshu@gmail.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11371240) 的资助.

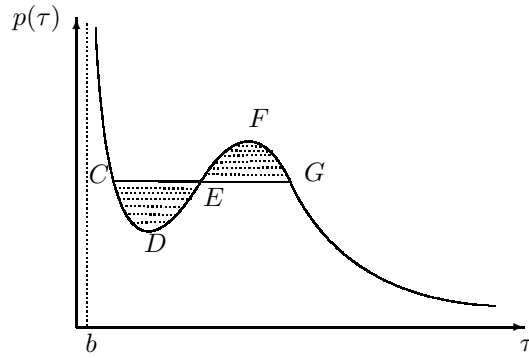


图 1 Van der Waals 气体的状态方程 $p = p(\tau)$ 图像

为了方便起见, 我们假设 $p(\tau)$ 满足以下条件 (如图 2 所示):

(1) $p(\tau)$ 二次连续可微;

$$(2) p'(\tau) \begin{cases} < 0, & b < \tau < \alpha \text{ 或 } \beta < \tau, \\ = 0, & \alpha \leq \tau \leq \beta, \end{cases} \quad p''(\tau) \begin{cases} > 0, & b < \tau < \alpha \text{ 或 } \gamma < \tau, \\ = 0, & \alpha \leq \tau \leq \beta, \tau = \gamma, \\ < 0, & \beta < \tau < \gamma. \end{cases}$$

$$(3) \lim_{\tau \rightarrow b^+} p(\tau) = +\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} p(\tau) = 0,$$

$$(4) \int_{\gamma}^{+\infty} \sqrt{-p'(x)} dx = +\infty, \quad \int_b^{\alpha} \sqrt{-p'(x)} dx = +\infty.$$

1972年, Wendroff^[1] 在 $p'(\tau) < 0$, $p''(\tau)$ 仅有两个零点的条件下, 得到了 (1.1) Riemann 问题的解. 1982年, Shearer^[2] 得到了一类混合系统 Riemann 问题的解. Yangi^[3] 从纯数学角度解决了一类 Van der Waals 气体的 Riemann 问题, 使用激波、稀疏波和静止的激波构造了 Riemann 问题的解. Hattori^[4] 在熵比率相容性条件下得到了等熵的 Van der Waals 气体守恒律方程 Riemann 问题的解. 张等^[5] 利用凸包的方法构造了非凸 Euler 方程组 Riemann 问题的解, 并且研究了基本波的相互作用. 刘等^[6] 构造性地得到了相对论流体力学方程组 Riemann 问题的解, 并给出了基本波的相互碰撞和追赶的结果.

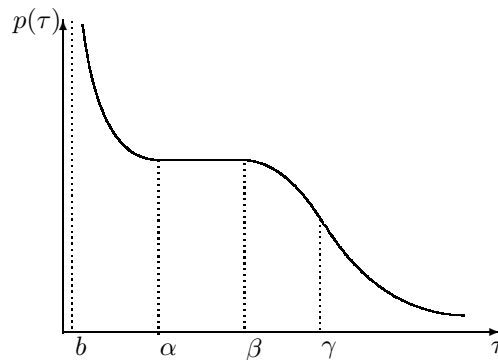


图 2 修正后 Van der Waals 气体状态方程 $p = p(\tau)$ 的图像

2 基本波线

方程 (1.1) 具有两个特征值

$$\lambda_1 = -\sqrt{-p'(\tau)}, \quad \lambda_2 = \sqrt{-p'(\tau)},$$

其中 $p(\tau)$ 为修正过的 Van der Waals 气体的状态方程, 满足条件 (1)–(4). 我们将半平面 $D: \tau > b$ 分成 3 部分 $D = D_\alpha \cup D_0 \cup D_\beta$, 这里

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \{(\tau, u) \mid b < \tau < \alpha, -\infty < u < +\infty\}, \\ D_\beta &= \{(\tau, u) \mid \tau > \beta, -\infty < u < +\infty\}, \\ D_0 &= \{(\tau, u) \mid \alpha \leq \tau \leq \beta, -\infty < u < +\infty\}. \end{aligned}$$

利用特征分析方法, 我们可以得到方程 (1.1) 中连接给定两个状态 (τ_0, u_0) 和 (τ, u) 的基本波.

1 当 $U_0 = (\tau_0, u_0) \in D_\alpha \cup D_\beta$ 时, 由 $U = (\tau, u)$ 所处不同的位置, 它可被一个激波 (shock) 或扇形波 (wave fan) (也可被左 (右) 接触间断扇形波, 简称为 jump-fan (fan-jump)) 连接到状态 (τ_0, u_0) . 分别用 $\vec{S}(\overleftarrow{S}), \vec{F}(\overleftarrow{F})$ 表示前向激波 (后向激波), 前向扇形波 (后向扇形波) 这类经典的基本波:

$$\vec{S}(\overleftarrow{S}): u = u_0 \mp \sqrt{-\frac{p-p_0}{\tau-\tau_0}}(\tau-\tau_0), \quad (2.1)$$

$$\vec{F}(\overleftarrow{F}): u = u_0 \mp \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx. \quad (2.2)$$

用 $\overrightarrow{JF}, \overrightarrow{JFJ}$ 分别表示前向接触间断扇形波和前向双接触间断扇形波这类非经典的基本波,

$$\overrightarrow{JF}: u = u_0 - \sqrt{-p'_{10}}(\tau_1 - \tau_0) - \int_{\tau_1}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad (2.3)$$

$$\overrightarrow{JFJ}: u = u_0 - \sqrt{-\frac{p_1-p_0}{\tau_1-\tau_0}}(\tau_1-\tau_0) - \int_{\tau_1}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx - \sqrt{-p'_{\tau y}}(\tau-y), \quad (2.4)$$

$$p'_{10} = \frac{p(\tau_1) - p(\tau_0)}{\tau_1 - \tau_0}, \quad p'_{\tau y} = \frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}.$$

简称为前向 jump-fan 和前向 jump-fan-jump. 其他非经典基本波的代表法可类似得到.

2 对于 $U_0 = (\tau_0, u_0), U = (\tau, u) \in D_0$, 有 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 因此 $U = (\tau, u) \in D_0$ 能被一个特征速度是零的波连接, 称为静止的跳跃, 并且使用 \vec{J} 表示,

$$\vec{J}: u = u_0.$$

对于 $U_0 = (\tau_0, u_0) \in D_0, U = (\tau, u) \in D_\alpha \cup D_\beta$ 能被激波、扇形波或接触间断连接.

下面我们给出连接 $U_0 = (\tau_0, u_0)$ 与 $U = (\tau, u)$ 的前向波在 (x, t) 平面的示意图像, 为了区别连续解和间断解, 我们用粗线来表示激波或接触间断 (如图 3).

为了构造方程 (1.1) 的广义波线, 我们先将 (τ, u) 平面分为几个区域, 这个分法由左状态的位置决定. 方程 (1.1) 的广义波线由激波、扇形波和跳跃的组合构成, 该组合由右状态位于所在区域的位置所决定. 因此, 下一步我们首先将 (τ, u) 平面分为 $b < \tau_0 < c, c < \tau_0 < \alpha, \alpha < \tau_0 < \beta, \beta < \tau_0 < \gamma, \gamma < \tau_0 < d$ 和 $\tau_0 > d$ 这 6 个区域, 这里 c 和 d 满足 $p'(c) = p'(d) = \frac{p(c)-p(d)}{c-d}$, 再给出基本波线的图像.

我们称 $u \geq u_0$ 的半支波线为膨胀波线, 用 $\overleftarrow{E}(U_0)$ ($\overrightarrow{E}(U_0)$) 表示后向 (前向) 膨胀波线, 称 $u \leq u_0$ 的半支波线为压缩波线, 用 $\overleftarrow{C}(U_0)$ ($\overrightarrow{C}(U_0)$) 表示后向 (前向) 压缩波线.

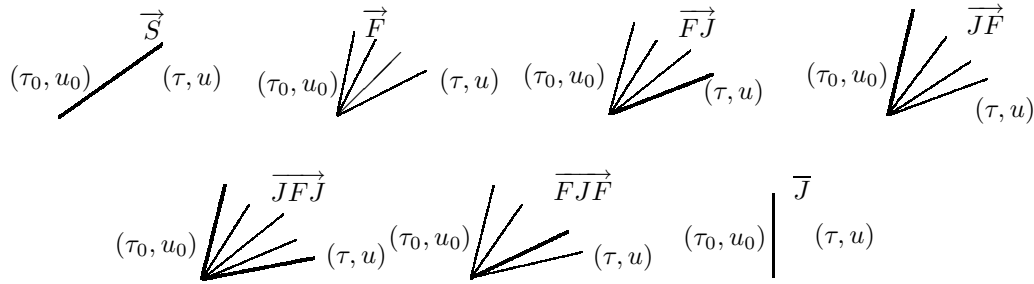


图 3 连接 $U_0 = (\tau_0, u_0)$, $U = (\tau, u)$ 前向波

2.1 情形 $b < \tau_0 < c$

为了画出情形 $b < \tau_0 < c$ 时的基本波线, 我们分别考虑从 τ_0 发出的前向波线和后向波线.

2.1.1 前向波线

取 $b < \tau_0 < c$, 从 $(\tau_0, p(\tau_0))$ 画出一条切线与 $p(\tau)$ 相切于 $(\tau_1, p(\tau_1))$, 相交于另一点 $(\tau_2, p(\tau_2))$, τ_1, τ_2 满足

$$P'(\tau_1) = p'_{10} = \frac{p(\tau_1) - p(\tau_0)}{\tau_1 - \tau_0} = \frac{p(\tau_1) - p(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2} = p'_{12}.$$

这里 $\beta < \tau_1 < \gamma$, $\tau_2 > d$. 下文出现的所有 τ_1, τ_2 定义与这里相同, 不再一一说明.

(1) 当 $b < \tau < \tau_0$ 时, $\lambda_2(\tau)$ 随着 τ 的减小而增大, 从 (τ_0, u_0) 可以通过前向扇形波连接到 (τ, u) ,

$$\overrightarrow{F}(U_0, \tau) : u = u_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad b < \tau < \tau_0.$$

记 $\overrightarrow{E}(U_0) = \overrightarrow{F}(U_0, \tau)$.

(2) 当 $\tau_0 < \tau < \tau_1$ 时, 有

$$\lambda_2(\tau) < \sigma_2 < \lambda_2(\tau_0), \quad \sigma_2 = \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}.$$

因此, (τ_0, u_0) 必须通过激波连接到 (τ, u) , 即

$$\overrightarrow{S}(U_0, \tau, \tau_1) : u = u_0 - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \tau_0 < \tau < \tau_1.$$

(3) 当 $\tau_1 < \tau < \gamma$ 时, 从 (τ_1, u_1) 到 (τ, u) 再通过扇形波连接, 有 $\overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \gamma)$:

$$u = u_1 - \int_{\tau_1}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx = u_0 - \sqrt{-p'_{10}}(\tau_1 - \tau_0) - \int_{\tau_1}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \tau_1 < \tau < \gamma.$$

这个解在扇形波的左边从 (τ_0, u_0) 直接跳跃到 (τ_1, u_1) , 然后连续变化到 (τ, u) .

(4) 当 $\gamma < \tau < \tau_2$ 时, 我们不能继续用扇形波来连接. 此时存在一个 $y = y(\tau)$, 使得

$$\frac{p(y) - p(\tau)}{y - \tau} = p'(y), \quad \tau_1 < y < \gamma.$$

我们能够从 $(\tau_1, u(\tau_1))$ 构造一个扇形波, 连接到 $(y, u(y))$, 然后从 $(y, u(y))$ 到 $(\tau, u(\tau))$ 通过一个接触间断连接 (τ, u) , 有 $\overrightarrow{JFJ}(U_0, \tau, \tau_2)$:

$$\begin{aligned} u &= u(y) - \sqrt{-p'_{\tau y}} (\tau - y) = u(\tau_1) - \int_{\tau_1}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx - \sqrt{-p'_{\tau y}} (\tau - y) \\ &= u_0 - \sqrt{-p'_{10}} (\tau_1 - \tau_0) - \int_{\tau_1}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx - \sqrt{-p'_{\tau y}} (\tau - y), \quad b < \tau < \tau_2. \end{aligned}$$

(5) 当 $\tau > \tau_2$ 时, $\lambda_2(\tau) < \sigma_2 < \lambda_2(\tau_0)$, 因此

$$\overrightarrow{S}(U_0, \tau, \tau_2): \quad u = u_0 - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}} (\tau - \tau_0), \quad \tau > \tau_2.$$

综上所述, $\overrightarrow{C}(U_0)$ 为 $\overrightarrow{S}(U_0, \tau, \tau_1)$ 或 $\overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \gamma)$ 或 $\overrightarrow{JFJ}(U_0, \tau, \tau_2)$ 或 $\overrightarrow{S}(U_0, \tau, \tau_2)$, 我们简记为 (如图 4):

$$\overrightarrow{C}(U_0) = \overrightarrow{S}(U_0, \tau, \tau_1) \cup \overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \gamma) \cup \overrightarrow{JFJ}(U_0, \tau, \tau_2) \cup \overrightarrow{S}(U_0, \tau, \tau_2).$$

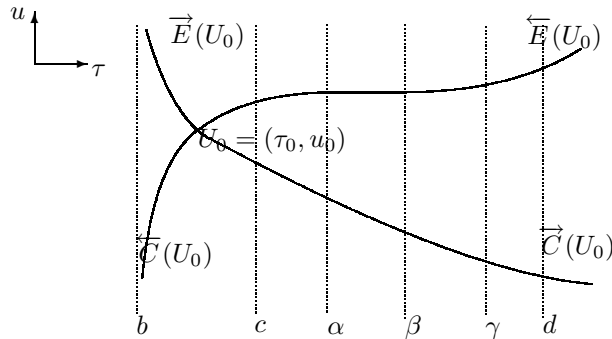


图 4 $b < \tau_0 < c$ 情形

2.1.2 后向波线

(1) 当 $b < \tau < \tau_0$ 时, 从 (τ_0, u_0) 到 (τ, u) , $\lambda_1(\tau) < \sigma_1 < \lambda_1(\tau_0)$, $\sigma_1 = -\sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}$, 因此 (τ_0, u_0) 可以通过后向激波连接到 (τ, u) ,

$$\overleftarrow{S}(U_0, \tau): \quad u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}} (\tau - \tau_0), \quad b < \tau < \tau_0.$$

记 $\overleftarrow{C}(U_0) = \overleftarrow{S}(U_0, \tau)$.

(2) 当 $\tau_0 < \tau < \alpha$, $\lambda_1(\tau)$ 随着 τ 的增大而增大, 从 (τ_0, u_0) 可以通过后向扇形波连接到 (τ, u) ,

$$\overleftarrow{F}(U_0, \tau, \alpha): \quad u = u_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad c < \tau < \alpha.$$

(3) 当 $\alpha < \tau < \beta$, 因为 $\lambda_1(\tau) = 0$, 不能随着 τ 的增大而增大, 从 $(\alpha, u(\alpha))$ 可以通过一个静止的跳跃连接到 (τ, u) ,

$$\overleftarrow{FJ}(U_0, \alpha, \beta): u = u_0 + \int_{\tau_0}^{\alpha} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \alpha < \tau < \beta.$$

这个解通过后向扇形波连续变化到 $(\alpha, u(\alpha))$, 在扇形波的右边从 $(\alpha, u(\alpha))$ 直接跳跃到 (τ, u) .

(4) 当 $\beta < \tau < d$ 时, 从 (τ_0, u_0) 可以先通过后向扇形波连接到 $(\tau_3, u(\tau_3))$, 再通过跳跃连接到 (τ, u) , 其中 $c < \tau_3 < \alpha$ 满足 $p'(\tau_3) = \frac{p(\tau) - p(\tau_3)}{\tau - \tau_3}$,

$$\overleftarrow{FJ}(U_0, \tau, \beta): u = u_0 + \int_{\tau_0}^{\tau_3} \sqrt{-p'(x)} dx + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_3)}{\tau - \tau_3}} (\tau - \tau_3), \quad \beta < \tau < d.$$

(5) 当 $\tau > d$ 时, $\lambda_1(\tau)$ 随着 τ 的增大而增大, 因此从 (τ_0, u_0) 可以先通过后向扇形波连接到 $(c, u(c))$, 再直接跳跃到 $(d, u(d))$, 最后通过后向扇形波连接到 (τ, u) ,

$$\overleftarrow{FJF}(U_0, \tau, d): u = u_0 + \int_{\tau_0}^c \sqrt{-p'(x)} dx + \sqrt{-\frac{p(d) - p(c)}{d - c}} (d - c) + \int_d^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \tau > d.$$

综上所述, 简记为 (如图 4)

$$\overleftarrow{E}(U_0) = \overleftarrow{F}(U_0, \tau, \alpha) \cup \overleftarrow{FJ}(U_0, \alpha, \beta) \cup \overleftarrow{FJ}(U_0, \tau, \beta) \cup \overleftarrow{FJF}(U_0, \tau, d).$$

根据以上分析画出当 $b < \tau_0 < c$ 时的广义波线图, 其他情形可以通过类似的分析得到, 这里不再详细描述.

2.2 情形 $c < \tau_0 < \alpha$

此时, 同样可取 τ_1, τ_2 . 类似上述情形的讨论, 可以将前向波线和后向波线简单做如下表示.

2.2.1 前向波线 (见图 5)

(1) 当 $b < \tau < \tau_0$ 时, 有

$$\overrightarrow{F}(U_0, \tau): u = u_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad b < \tau < \tau_0.$$

简记为 $\overrightarrow{E}(U_0) = \overrightarrow{F}(U_0)$ (如图 5).

(2) 当 $\tau_0 < \tau < \tau_1$ 时, 有

$$\overrightarrow{S}(U_0, \tau, \tau_1): u = u_0 - \sqrt{-\frac{p - p_0}{\tau - \tau_0}} (\tau - \tau_0), \quad \tau_0 < \tau < \tau_1.$$

(3) 当 $\tau_1 < \tau < \gamma$ 时, 有

$$\overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \gamma): u = u_0 - \sqrt{-p'_{10}} (\tau_1 - \tau_0) - \int_{\tau_1}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \tau_1 < \tau < \gamma.$$

(4) 当 $\gamma < \tau < \tau_2$ 时, 有 $\overrightarrow{JFJ}(U_0, \tau, \tau_2)$:

$$u = u_0 - \sqrt{-p'_{10}} (\tau_1 - \tau_0) - \int_{\tau_1}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx - \sqrt{-p'_{\tau y}} (\tau - y), \quad b < \tau < \tau_2.$$

(5) 当 $\tau > \tau_2$ 时, 有

$$\vec{S}(U_0, \tau, \tau_2): u = u_0 - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \tau > \tau_2.$$

简记为 (如图 5)

$$\vec{C}(U_0) = \vec{S}(U_0, \tau, \tau_1) \cup \overleftarrow{J\vec{F}}(U_0, \tau, \gamma) \cup \overleftarrow{JFJ}(U_0, \tau, \tau_2) \cup \vec{S}(U_0, \tau, \tau_2).$$

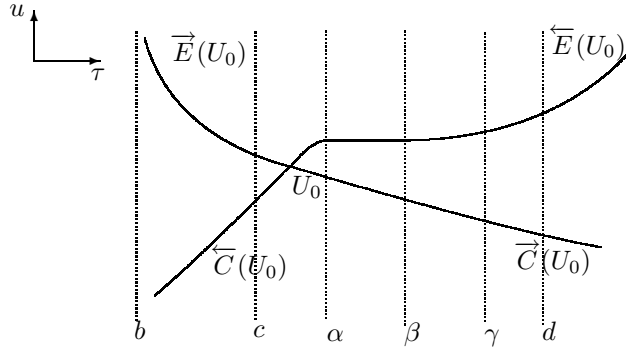


图 5 情形 $c < \tau_0 < \alpha$

2.2.2 后向波线 (见图 5)

此时, 我们取 τ_3, τ_4 , 满足

$$p'(\tau_0) = \frac{p(\tau_3) - p(\tau_0)}{\tau_3 - \tau_0}, \quad p'(\tau_4) = \frac{p(\tau_4) - p(\tau_0)}{\tau_4 - \tau_0}.$$

下文出现的所有 τ_3, τ_4 的定义也与这里相同, 我们不再一一说明. 类似地, 有

(1) 当 $b < \tau < \tau_0$ 时, 有

$$\overleftarrow{S}(U_0, \tau): u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad b < \tau < \tau_0.$$

简记为 $\overleftarrow{C}(U_0) = \overleftarrow{S}(U_0)$.

(2) 当 $\tau_0 < \tau < \alpha$ 时, 有

$$\overleftarrow{F}(U_0, \tau, \alpha): u = u_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \tau_0 < \tau < \alpha.$$

(3) 当 $\alpha < \tau < \beta$ 时, 有

$$\overleftarrow{FJ}(U_0, \alpha, \beta): u = u_0 + \int_{\tau_0}^{\alpha} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \alpha < \tau < \beta.$$

(4) 当 $\beta < \tau < \tau_3$ 时, 存在 $y(\tau) \in (\tau_0, \alpha)$, 满足

$$p'(y(\tau)) = \frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}.$$

可得 $\overleftarrow{FJ}(U_0, \tau, \tau_3)$:

$$u = u_0 + \int_{\tau_0}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y(\tau))}{\tau - y(\tau)}}(\tau - y(\tau)), \quad \beta < \tau < \tau_3.$$

(5) 当 $\tau_3 < \tau < \tau_4$ 时, 有

$$\overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_4): u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \tau_3 < \tau < \tau_4.$$

(6) 当 $\tau > \tau_4$ 时, 有

$$\overleftarrow{JF}(U_0, \tau, \tau_4): u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau_4) - p(\tau_0)}{\tau_4 - \tau_0}}(\tau_4 - \tau_0) + \int_{\tau_4}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \tau > \tau_4.$$

简记为 (如图 5)

$$\overleftarrow{E}(U_0) = \overleftarrow{F}(U_0, \tau, \alpha) \cup \overleftarrow{FJ}(U_0, \alpha, \beta) \cup \overleftarrow{FJ}(U_0, \tau, \tau_3) \cup \overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_4) \cup \overleftarrow{JF}(U_0, \tau, \tau_4).$$

2.3 情形 $\alpha < \tau_0 < \beta$

当 $\alpha < \tau_0 < \beta$ 时, 从 (τ_0, u_0) 通过静止的跳跃连接到 (τ, u) , 有

$$\overrightarrow{J}(U_0, \alpha, \beta): u = u(\tau_0), \quad \alpha < \tau < \beta.$$

2.3.1 前向波线 (见图 6)

(1) 当 $c < \tau < \alpha$ 时, 从 (τ_0, u_0) 先通过静止的跳跃连接到 $(\alpha, u(\alpha))$, 再通过前向扇形波连接到 (τ, u) ,

$$\overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \alpha): u = u_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad c < \tau < \alpha.$$

简记为 $\overrightarrow{E}(U_0) = \overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \alpha)$ (如图 6).

(2) 当 $\beta < \tau < \gamma$ 时, 有

$$\overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \beta): u = u_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \beta < \tau < \gamma.$$

(3) 当 $\tau > \gamma$ 时, 存在 $y(\tau) \in (\beta, \gamma)$, 有

$$\overrightarrow{JFJ}(U_0, \tau, \gamma): u = u_0 - \int_{\tau_0}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}}(\tau - y), \quad \tau > \gamma.$$

简记为 (如图 6)

$$\overrightarrow{C}(U_0) = \overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \beta) \cup \overrightarrow{JFJ}(U_0, \tau, \gamma).$$

2.3.2 后向波线 (见图 6)

(1) 当 $b < \tau < \alpha$ 时, 有

$$\overleftarrow{S}(U_0, \tau, \alpha): u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad b < \tau < \alpha.$$

简记为 $\overleftarrow{C}(U_0) = \overleftarrow{S}(U_0, \tau, \alpha)$ (如图 6).

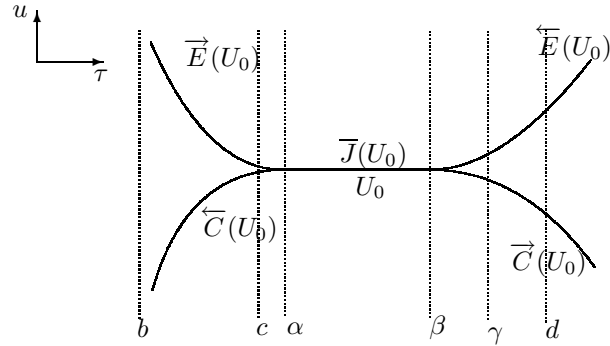


图 6 情形 $\alpha < \tau_0 < \beta$

(2) 当 $\beta < \tau < \tau_4$ 时, 有

$$\overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_4): \quad u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \beta < \tau < \tau_4.$$

(3) 当 $\tau > \tau_4$ 时, 有

$$\overleftarrow{JF}(U_0, \tau, \tau_4): \quad u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau_4) - p(\tau_0)}{\tau_4 - \tau_0}}(\tau_4 - \tau_0) + \int_{\tau_4}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \tau > \tau_4.$$

简记为

$$\overleftarrow{E}(U_0) = \overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_4) \cup \overleftarrow{JF}(U_0, \tau, \tau_4).$$

2.4 情形 $\beta < \tau_0 < \gamma$

2.4.1 前向波线 (见图 7)

(1) 当 $b < \tau < \tau_4$ 时, 有

$$\overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \tau_4): \quad u = u_0 - \sqrt{-\frac{p(\tau_4) - p_0}{\tau_4 - \tau_0}}(\tau_4 - \tau_0) - \int_{\tau_4}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad b < \tau < \tau_4.$$

(2) 当 $\tau_4 < \tau < \tau_0$ 时, 有

$$\overrightarrow{S}(U_0, \tau): \quad u = u_0 - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \tau_4 < \tau < \tau_0.$$

简记为 (如图 7)

$$\overrightarrow{E}(U_0) = \overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \tau_4) \cup \overrightarrow{S}(U_0, \tau).$$

(3) 当 $\tau_0 < \tau < \gamma$ 时, 有

$$\overrightarrow{F}(U_0, \tau, \gamma): \quad u = u_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \tau_0 < \tau < \gamma.$$

(4) 当 $\gamma < \tau < \tau_3$ 时, 存在 $y = y(\tau) \in (\tau_0, \gamma)$, 有

$$\overrightarrow{FJ}(U_0, \tau, \tau_3): u = u_0 - \int_{\tau_0}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}}(\tau - y), \quad \gamma < \tau < \tau_3.$$

(5) 当 $\tau > \tau_3$ 时, 有

$$\overrightarrow{S}(U_0, \tau, \tau_3): u = u_0 - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \tau > \tau_3.$$

简记为

$$\overrightarrow{C}(U_0) = \overrightarrow{F}(U_0, \tau, \gamma) \cup \overrightarrow{FJ}(U_0, \tau, \tau_3) \cup \overrightarrow{S}(U_0, \tau, \tau_3).$$

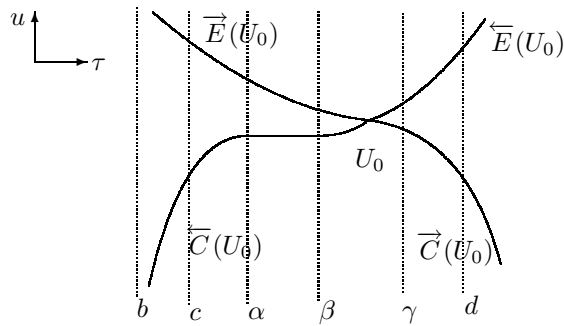


图 7 情形 $\beta < \tau_0 < \gamma$

2.4.2 后向波线 (见图 7)

(1) 当 $b < \tau < \tau_3$ 时, 有

$$\overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_3): u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p_0}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad b < \tau < \tau_3.$$

(2) 当 $\tau_3 < \tau < \beta$ 时, 存在 $y(\tau) \in (\beta, \tau_0)$, 有

$$\overleftarrow{FJ}(U_0, \tau, \tau_3): u = u_0 + \int_{\tau_0}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}}(\tau - y), \quad \tau_3 < \tau < \alpha.$$

(3) 当 $\beta < \tau < \tau_0$ 时, 有

$$\overleftarrow{F}(U_0, \tau, \beta): u = u_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \beta < \tau < \tau_0.$$

简记为

$$\overleftarrow{C}(U_0) = \overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_3) \cup \overleftarrow{FJ}(U_0, \tau, \tau_3) \cup \overleftarrow{F}(U_0, \tau, \beta).$$

(4) 当 $\tau_0 < \tau < \tau_4$ 时, 有

$$\overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_4): u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p_0}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \tau_0 < \tau < \tau_4.$$

(5) 当 $\tau > \tau_4$ 时, 有

$$\overleftarrow{JF}(U_0, \tau, \tau_4) : u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau_4) - p_0}{\tau_4 - \tau_0}}(\tau - \tau_0) + \int_{\tau_4}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \tau > \tau_4.$$

简记为

$$\overleftarrow{E}(U_0) = \overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_4) \cup \overleftarrow{JF}(U_0, \tau, \tau_4).$$

2.5 情形 $\gamma < \tau_0 < d$

2.5.1 前向波线 (见图 8)

(1) 当 $b < \tau < \tau_4$ 时, 有

$$\overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \tau_4) : u = u_0 - \sqrt{-\frac{p(\tau_4) - p_0}{\tau_4 - \tau_0}}(\tau - \tau_0) - \int_{\tau_4}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad b < \tau < \tau_4.$$

(2) 当 $\tau_4 < \tau < \tau_3$ 时, 有

$$\overrightarrow{S}(U_0, \tau, \tau_3) : u = u_0 - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \tau_4 < \tau < \tau_3.$$

(3) 当 $\tau_3 < \tau < \gamma$ 时, 存在 $y(\tau) \in (\gamma, \tau_0)$, 有

$$\overrightarrow{FJ}(U_0, \tau, \gamma) : u = u_0 - \int_{\tau_0}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}}(\tau - y), \quad \tau_3 < \tau < \gamma.$$

(4) 当 $\gamma < \tau < \tau_0$ 时, 有 $\overrightarrow{F}(U_0, \tau, \gamma) : u = u_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \gamma < \tau < \tau_0$. 简记为 $\overrightarrow{E}(U_0) = \overrightarrow{JF}(U_0, \tau, \tau_4) \cup \overrightarrow{S}(U_0, \tau, \tau_3) \cup \overrightarrow{FJ}(U_0, \tau, \gamma) \cup \overrightarrow{F}(U_0, \tau, \gamma)$ (如图 8).

(5) 当 $\tau > \tau_0$ 时, 有

$$\overrightarrow{S}(U_0, \tau) : u = u_0 - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \tau > \tau_0.$$

简记为 $\overrightarrow{C}(U_0) = \overrightarrow{S}(U_0, \tau)$ (如图 8).

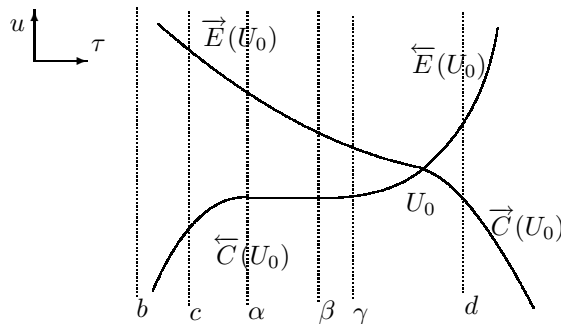


图 8 情形 $\gamma < \tau_0 < d$

2.5.2 后向波线 (见图 8)

(1) 当 $b < \tau < \tau_2$ 时, 有

$$\overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_2): \quad u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p_0}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad b < \tau_0 < \tau_2.$$

(2) 当 $\tau_2 < \tau < \beta$ 时, 存在 $y(\tau) \in (\beta, \gamma)$, 有 $\overleftarrow{JFJ}(U_0, \tau, \beta)$:

$$u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau_1) - p(\tau_0)}{\tau_1 - \tau_0}}(\tau_1 - \tau_0) + \int_{\tau_1}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx \\ + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}}(\tau - y), \quad \tau_2 < \tau < \beta.$$

(3) 当 $\beta < \tau < \tau_1$ 时, 有

$$\overleftarrow{JF}(U_0, \tau, \beta): \quad u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau_1) - p_0}{\tau_1 - \tau_0}}(\tau_1 - \tau_0) + \int_{\tau_1}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \beta < \tau < \tau_1.$$

(4) 当 $\tau_1 < \tau < \tau_0$ 时, 有

$$\overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_1): \quad u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p_0}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \tau_1 < \tau < \tau_0.$$

简记为 (如图 8).

$$\overleftarrow{C}(U_0) = \overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_2) \cup \overleftarrow{JFJ}(U_0, \tau, \beta) \cup \overleftarrow{JF}(U_0, \tau, \beta) \cup \overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_1).$$

(5) 当 $\tau > \tau_0$ 时,

$$\overleftarrow{F}(U_0, \tau): \quad u = u_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \tau > \tau_0.$$

简记为 (如图 8)

$$\overleftarrow{E}(U_0) = \overleftarrow{F}(U_0, \tau).$$

2.6 情形 $\tau_0 > d$

2.6.1 前向波线 (见图 9)

(1) 当 $b < \tau < c$ 时, 有 $\overrightarrow{FJF}(U_0, \tau, c)$:

$$u = u_0 - \int_{\tau_0}^d \sqrt{-p'(x)} dx - \sqrt{-\frac{p(d) - p(c)}{d - c}}(d - c) - \int_c^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad b < \tau < c.$$

(2) 当 $c < \tau < \gamma$ 时, 存在 $y(\tau) \in (\gamma, d)$, 有

$$\overrightarrow{FJ}(U_0, \tau, c): \quad u = u_0 - \int_{\tau_0}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}}(\tau - y), \quad c < \tau < \gamma.$$

(3) 当 $\gamma < \tau < \tau_0$ 时, 有

$$\overrightarrow{F}(U_0, \tau, \gamma): \quad u = u_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \gamma < \tau < \tau_0.$$

简记为 (如图 9)

$$\vec{E}(U_0) = \overleftarrow{FJF}(U_0, \tau, c) \cup \overleftarrow{FJ}(U_0, \tau, c) \cup \overleftarrow{F}(U_0, \tau, \gamma).$$

(4) 当 $\tau > \tau_0$ 时,

$$\vec{S}(U_0, \tau) : u = u_0 - \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \tau > \tau_0.$$

简记为 $\vec{C}(U_0) = \vec{S}(U_0, \tau)$ (如图 9).

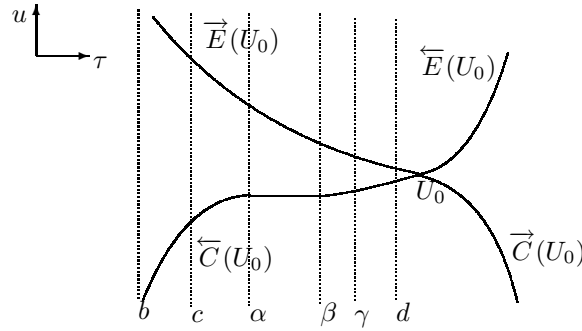


图 9 情形 $\tau_0 > d$

2.6.2 后向波线 (见图 9)

(1) 当 $b < \tau < \tau_2$ 时, 有

$$\overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_2) : u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p_0}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad b < \tau < \tau_2.$$

(2) 当 $\tau_2 < \tau < \beta$ 时, 存在 $y(\tau) \in (\beta, \gamma)$, 有 $\overleftarrow{JFJ}(U_0, \tau, \tau_2)$:

$$u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau_1) - p(\tau_0)}{\tau_1 - \tau_0}}(\tau_1 - \tau_0) + \int_{\tau_1}^{y(\tau)} \sqrt{-p'(x)} dx \\ + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}}(\tau - y), \quad \tau_2 < \tau < \beta.$$

(3) 当 $\beta < \tau < \tau_1$ 时, 有

$$\overleftarrow{JF}(U_0, \tau, \beta) : u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau_1) - p_0}{\tau_1 - \tau_0}}(\tau_1 - \tau_0) + \int_{\tau_1}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \beta < \tau < \tau_1.$$

(4) 当 $\tau_1 < \tau < \tau_0$ 时, 有

$$\overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_1) : u = u_0 + \sqrt{-\frac{p(\tau) - p_0}{\tau - \tau_0}}(\tau - \tau_0), \quad \tau_1 < \tau < \tau_0.$$

简记为 (如图 9)

$$\overleftarrow{C}(U_0) = \overleftarrow{S}(U_0, \tau) \cup \overleftarrow{JFJ}(U_0, \tau, \tau_2) \cup \overleftarrow{JF}(U_0, \tau, \beta) \cup \overleftarrow{S}(U_0, \tau, \tau_1).$$

(5) 当 $\tau > \tau_0$ 时, 有

$$\overleftarrow{F}(U_0, \tau): u = u_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \quad \tau > \tau_0.$$

简记为 $\overleftarrow{E}(U_0) = \overleftarrow{F}(U_0, \tau)$ (如图 9).

3 Riemann 问题

这一部分, 我们构造方程 (1.1) 带有以下 Riemann 初值的解

$$(\tau, u)(x, 0) = \begin{cases} U_- = (\tau_-, u_-), & x < 0, \\ U_+ = (\tau_+, u_+), & x > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

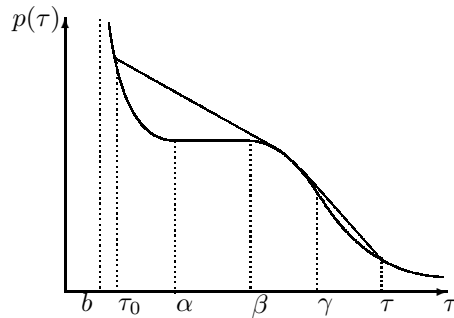
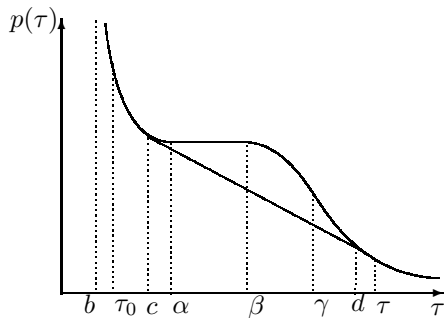


图 10 λ_1 对应的凸包 $p = g(x; \tau_0, \tau)$ 图 11 λ_2 对应的凸包 $p = g(x; \tau_0, \tau)$

我们分别用 $\overleftarrow{W}(\tau_-, u_-)$ 和 $\overrightarrow{W}(\tau_+, u_+)$ 表示 $\{(\tau, u) \mid u = u_{\pm} + \int_{\tau_{\pm}}^{\tau} \sqrt{-g'(x; \tau_{\pm}, \tau)} dx\}$, 这里 $p = g(x; \tau_0, \tau)$ 是 $p(\tau)$ 的凸包 (图 11-12), 满足

$$g'(x; \tau_0, \tau) = \begin{cases} p'(x), & \lambda_i(\tau) \geq \lambda_i(\tau_0), \\ \frac{p(\tau) - p(\tau_0)}{\tau - \tau_0}, & \lambda_i(\tau) < \lambda_i(\tau_0), \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

可以证明 $\overleftarrow{W}(\tau_-, u_-)$ 和 $\overrightarrow{W}(\tau_+, u_+)$ 的交点是唯一的^[6], 因此方程 (1.1) Riemann 问题的解可以用如下形式表示:

$$(\tau, u) = \begin{cases} (\tau_-, u_-), & -\infty < \xi \leq -\sqrt{-g'(\tau_-; \tau_-, \tau_0)}, \\ \begin{cases} \xi = -\sqrt{-g'(\tau; \tau_-, \tau)}, \\ u = u_- + \int_{\tau_-}^{\tau} \sqrt{-g'(x; \tau_-, \tau)} dx, \end{cases} & -\sqrt{-g'(\tau_-; \tau_-, \tau_0)} \leq \xi \leq -\sqrt{-g'(\tau_0; \tau_-, \tau_0)}, \\ (\tau_0, u_0), & -\sqrt{-g'(\tau_0; \tau_-, \tau_0)} \leq \xi \leq \sqrt{-g'(\tau_0; \tau_+, \tau_0)}, \\ \begin{cases} \xi = -\sqrt{-g'(\tau; \tau_+, \tau)}, \\ u = u_+ - \int_{\tau_+}^{\tau} \sqrt{-g'(x; \tau_+, \tau)} dx, \end{cases} & \sqrt{-g'(\tau_0; \tau_+, \tau_0)} \leq \xi \leq \sqrt{-g'(\tau_+; \tau_+, \tau_0)}, \\ (\tau_+, u_+), & \sqrt{-g'(\tau_+; \tau_+, \tau_0)} \leq \xi < \infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

给定一个负状态 (τ_-, u_-) , 我们能在 (τ, u) 平面中分别画出曲线 $\overleftarrow{E}(\tau_-, u_-)$, $\overrightarrow{E}(\tau_-, u_-)$, $\overleftarrow{C}(\tau_-, u_-)$, $\overrightarrow{C}(\tau_-, u_-)$ 的图像, 从而得到从负状态发出的波线图. 这些曲线将区域 $\Omega =$

$\{(\tau, u) \mid \tau > 0\}$ 分成如下 4 块 (如图 12(左)):

$$\begin{aligned} \text{I}(\tau_-, u_-) &= \{(\tau, u) \mid (\tau, u) \in \overrightarrow{E}(\overline{\tau}, \overline{u}), (\overline{\tau}, \overline{u}) \in \overleftarrow{E}(\tau_-, u_-)\}, \\ \text{II}(\tau_-, u_-) &= \{(\tau, u) \mid (\tau, u) \in \overrightarrow{C}(\overline{\tau}, \overline{u}), (\overline{\tau}, \overline{u}) \in \overleftarrow{E}(\tau_-, u_-)\}, \\ \text{III}(\tau_-, u_-) &= \{(\tau, u) \mid (\tau, u) \in \overrightarrow{C}(\overline{\tau}, \overline{u}), (\overline{\tau}, \overline{u}) \in \overleftarrow{C}(\tau_-, u_-)\}, \\ \text{IV}(\tau_-, u_-) &= \{(\tau, u) \mid (\tau, u) \in \overrightarrow{E}(\overline{\tau}, \overline{u}), (\overline{\tau}, \overline{u}) \in \overleftarrow{C}(\tau_-, u_-)\}. \end{aligned}$$

类似地, 如果我们固定正状态 (τ_+, u_+) , 可得到从正状态发出的波线图 (图 12(右)). 我们可以证明 $\overleftarrow{C}(\overleftarrow{E})$, $\overrightarrow{C}(\overrightarrow{E})$ 是单调的^[6]. 因为方程 (1.1) 的波线图与 p 系统的波线图没有本质的区别, 所不同的是后向波线 u 值在 $\alpha < \tau < \beta$ 不变, 但是波线仍然是单调的. 因此, 对于给定的 (τ_-, u_-) 和 (τ_+, u_+) , 带有初值 (3.1) 的方程 (1.1) 的 Riemann 问题解可以由 $\overleftarrow{C}(U_-)$ ($\overleftarrow{E}(U_-)$) 和 $\overrightarrow{C}(U_+)$ ($\overrightarrow{E}(U_+)$) 的组合构成, 该组合由 (τ_+, u_+) 位于所在区域的位置决定. 中间状态是前向波和后向波的交点.

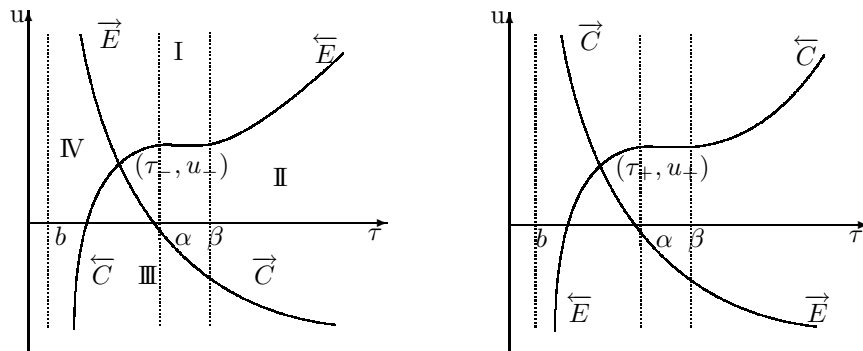


图 12 固定负 (左)、正 (右) 状态相平面图

作为例子, 我们选取一种情形讨论 (见图 13). 若 $(\tau_+, u_+) \in \text{II}(\tau_-, u_-)$, 则中间状态是 $\overleftarrow{E}(U_-)$ 和 $\overrightarrow{C}(U_+)$ 的交点. 假设 $b < \tau_- < c$, $\tau_+ > d$, 则 $\overleftarrow{E}(U_-) = \overleftarrow{F}(U_-, \tau, \alpha) \cup \overleftarrow{FJ}(U_-, \alpha, \beta) \cup \overleftarrow{FJ}(U_-, \tau, \beta) \cup \overleftarrow{FJF}(U_-, \tau, d)$, $\overrightarrow{C}(U_+) = \overrightarrow{S}(U_+, \tau)$. $\overleftarrow{E}(U_-)$ 和 $\overrightarrow{C}(U_+)$ 的交点是 $(\overline{\tau}, \overline{u}) \in \overleftarrow{FJF}(U_-, \tau, d)$, 则 Riemann 问题的解由波 $\overleftarrow{FJF}(U_-, \tau, d)$ 和 $\overrightarrow{S}(U_+, \tau)$ 构成. 因此, 构造性地得到 Riemann 问题的解是存在的.

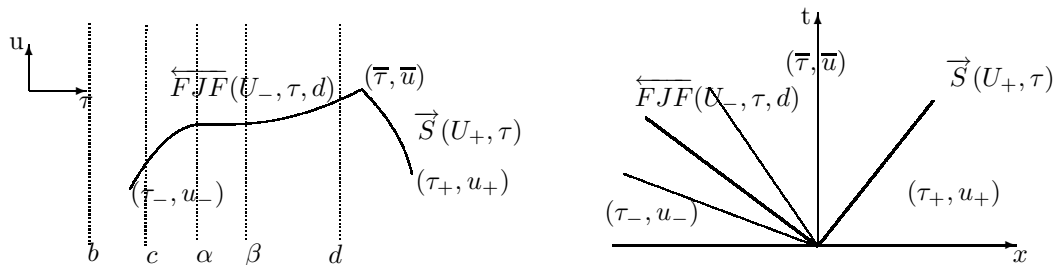


图 13 $(\tau_+, u_+) \in \text{II}(\tau_-, u_-)$ 的 Riemann 解

4 波的相互作用

我们将波的相互作用分为波的相互碰撞和追赶. 本文讨论波的相互碰撞. 我们考虑激波与其他波的碰撞, 包括与经典的基本波和非经典的基本波的相互碰撞. 按如下分类叙述:

- (1) $\overrightarrow{S}\overleftarrow{S}, \overleftarrow{F}\overleftarrow{S}, \overleftarrow{S}\overleftarrow{F}, \overleftarrow{S}\overleftarrow{J}.$
- (2) $\overleftarrow{F}\overleftarrow{J}\overleftarrow{S}, \overleftarrow{S}\overleftarrow{F}\overleftarrow{J}, \overleftarrow{J}\overleftarrow{F}\overleftarrow{S}, \overleftarrow{S}\overleftarrow{J}\overleftarrow{F}.$
- (3) $\overleftarrow{J}\overleftarrow{F}\overleftarrow{J}\overleftarrow{S}, \overleftarrow{S}\overleftarrow{J}\overleftarrow{F}\overleftarrow{J}, \overleftarrow{F}\overleftarrow{J}\overleftarrow{F}\overleftarrow{S}, \overleftarrow{S}\overleftarrow{F}\overleftarrow{J}\overleftarrow{F}.$

情形 1 激波与激波的碰撞: $\overleftarrow{S}\overleftarrow{S} : b < \tau_l < \tau_m < \alpha, b < \tau_r < \tau_m < \alpha.$

如图 14 所示, 这里 $\textcircled{1} = (\tau_l, u_l), \textcircled{II} = (\tau_m, u_m), \textcircled{r} = (\tau_r, u_r).$ 此时 $\lambda_2(\tau_l) > \sigma_2(\tau_l, \tau_m) > \lambda_2(\tau_m), \lambda_1(\tau_m) > \sigma_1(\tau_m, \tau_r) > \lambda_1(\tau_r),$ 因此, 在 $t = 0$ 附近有前向激波 \overleftarrow{S} 和后向激波 \overrightarrow{S} 形成. 很明显两个激波在有限的时间内会发生相互碰撞, 从而形成一个新的 Riemann 问题. 为了阐述清楚 Riemann 问题解的构造, 我们讨论 $\textcircled{1}$ 和 \textcircled{r} 在相平面 (τ, u) 的相对位置.

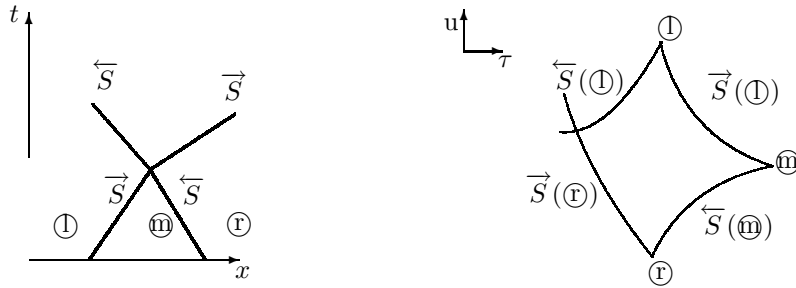


图 14 激波与激波的碰撞

从假设中我们可知 $\textcircled{II} \in \overleftarrow{S}(\textcircled{1})$ 和 $\textcircled{r} \in \overleftarrow{S}(\textcircled{II}),$ 画出 $\overleftarrow{S}(\textcircled{1})$ 的图像, 我们可以证明 $\overleftarrow{S}(\textcircled{1})$ 和 $\overleftarrow{S}(\textcircled{II})$ 不可能相交^[1]. 因此 $\textcircled{r} \in \textcircled{III}(\textcircled{1}), \overleftarrow{S}(\textcircled{1})$ 与 $\overleftarrow{S}(\textcircled{r})$ 相交, 这表明这个新的 Riemann 问题的解包含两个激波 \overleftarrow{S} 和 $\overrightarrow{S}.$ 这意味着激波与激波在相互碰撞后, 互相穿过彼此形成新的激波, 这个事实用以下符号来表示 $\overleftarrow{S}\overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{S}\overrightarrow{S}.$

情形 2 激波和扇形波的碰撞: $\overleftarrow{F}\overleftarrow{S} : b < \tau_r < \tau_m < \tau_l < \alpha.$

如图 15 所示, 在这种情形中, $\lambda_2(\tau_l) < \lambda_2(\tau_m), \lambda_1(\tau_m) > \sigma_1(\tau_m, \tau_r) > \lambda_1(\tau_r).$ 此时, 在 $t = 0$ 附近有 \overleftarrow{F} 和 \overleftarrow{S} 形成. 我们用 (x_1, t_1) 表示激波与扇形波的第一个碰撞点, 当 $t > t_1$ 时, \overleftarrow{F} 和 \overleftarrow{S} 相互穿过. 在贯穿过程中, 贯穿激波线 $x = x(t)$ 由下式决定:

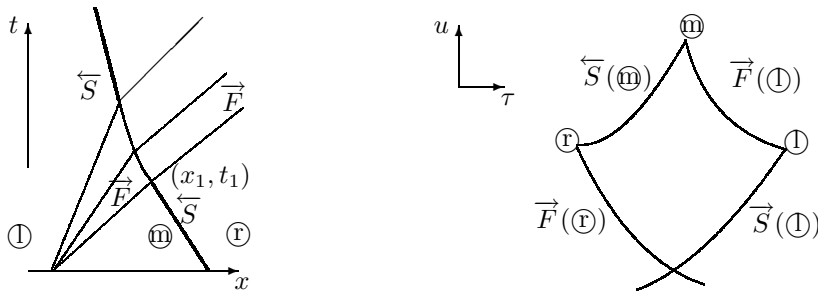


图 15 激波和扇形波的碰撞

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{p(\tau_2) - p(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}}, \\ u_2 = u_1 + \sqrt{\frac{p(\tau_2) - p(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}}(\tau_2 - \tau_1), \\ x(t_1) = x_1, \\ \frac{x}{t} = \sqrt{-p'(\tau_1)}, \quad \sqrt{-p'_l} \leq \frac{x}{t} \leq \sqrt{-p'_m}, \\ du_1 = -\sqrt{-p'(\tau_1)}d\tau_1, \quad (\tau_1, u_1) = (\tau_m, u_m), \\ du_2 = -\sqrt{-p'(\tau_2)}d\tau_2, \quad (\tau_2, u_2) = (\tau_r, u_r), \end{cases} \quad (4.1)$$

这里 $(\tau_1, u_1), (\tau_2, u_2)$ 分别表示贯穿激波线 $x = x(t)$ 左边的数据和右边的数据. 我们知道 $\textcircled{m} \in \overrightarrow{F}(\textcircled{l}), \textcircled{r} \in \overleftarrow{S}(\textcircled{l})$, 根据假设, 且 $\overleftarrow{S}(\textcircled{l})$ 和 $\overleftarrow{S}(\textcircled{m})$ 不会相交^[1]. 因此 $\textcircled{r} \in \text{IV}(\textcircled{l}), \overleftarrow{S}(\textcircled{l})$ 和 $\overrightarrow{F}(\textcircled{r})$ 在 (τ, u) 平面有一个唯一的交点, 这表明在有限的时间段内, 激波必须完全穿过扇形波. 激波右边的前向扇形波由解下面的方程决定:

$$\begin{cases} s_t + \lambda_2(\tau, u)s_x = 0, \\ ds = du - \sqrt{-p'(\tau)}d\tau, \\ s(x, t) = s_2(x(t), t), \quad \lambda_2(\tau, u) = \sqrt{-p'(\tau)}. \end{cases} \quad (4.2)$$

总而言之, 前向扇形波 \overrightarrow{F} 和后向激波 \overleftarrow{S} 在有限的时间内互相穿过, 并且除了 \overrightarrow{F} 和 \overleftarrow{S} 没有新的类型的波出现. 这个事实可以通过以下符号表示 $\overrightarrow{F}\overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{S}\overrightarrow{F}$.

\overleftarrow{S} 和 \overleftarrow{F} 的碰撞类似, 简单表述为 $\overleftarrow{S}\overleftarrow{F} \rightarrow \overleftarrow{F}\overleftarrow{S}$.

情形 3 激波和静止的跳跃的碰撞: $\overleftarrow{S}\overrightarrow{J}: b < \tau_l < \alpha, \alpha < \tau_m, \tau_r < \beta$.

如图 16 所示, 此时 $\lambda_2(\tau_l) > \sigma_2(\tau_l, \tau_m) \geq \lambda_2(\tau_m), \lambda_{1,2}(\tau_m) = \lambda_{1,2}(\tau_r) = 0$. 因此, 在 $t = 0$ 附近有前向激波和静止的跳跃形成, $\overleftarrow{S}\overrightarrow{J}$ 在有限的时间 $t = t_1$ 时相互碰撞, 当中间状态 \textcircled{m} 消失且一个新的 Riemann 问题形成时. 为了构造这个 Riemann 问题的解, 我们在相平面讨论 \textcircled{l} 和 \textcircled{r} 的相对位置. 从假设中可知, $\textcircled{m} \in \overleftarrow{S}(\textcircled{l})$ 和 $\textcircled{r} \in \overrightarrow{J}(\textcircled{m})$. 根据波线图, $u_m = u_r$. \textcircled{r} 可以在 \textcircled{m} 的左边或右边 (这里我们不妨假设 $\tau_r < \tau_m$), 但是无论 \textcircled{r} 在 \textcircled{m} 的左边还是右边, $\overleftarrow{S}(\textcircled{l})$ 和 $\overleftarrow{S}(\textcircled{r})$ 都会相交, 这表明这个 Riemann 问题的解包含两个激波 \overleftarrow{S} 和 \overleftarrow{S} . 这意味着 \overleftarrow{S} 和 \overrightarrow{J} 在碰撞后相互穿过, 形成新的前向激波和后向激波, 这个事实由以下符号表示: $\overleftarrow{S}\overrightarrow{J} \rightarrow \overleftarrow{S}\overleftarrow{S}$.

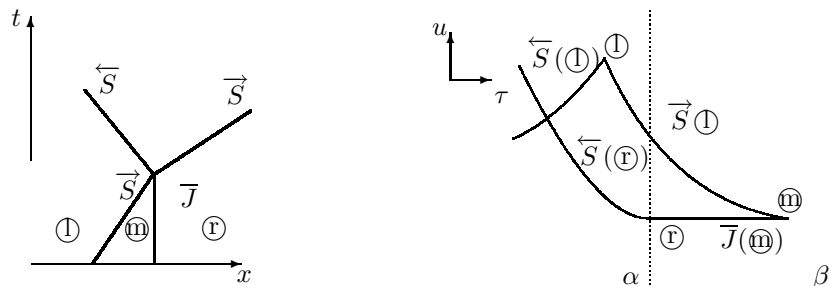


图 16 激波和静止的跳跃的碰撞

情形 4 Fan-jump 和激波的碰撞: $\overrightarrow{F}\overleftarrow{S}$.

如图 17, 此时 $\beta < \tau_l < \gamma, \gamma < \tau_m < \tau_3, b < \tau_r < \tau_2$, 其中 τ_3 和 τ_2 分别满足

$$\begin{cases} p'(\tau_l) = \frac{p(\tau_l) - p(\tau_3)}{\tau_l - \tau_3}, & \tau_3 > \gamma, \\ p'(\tau_1) = \frac{p(\tau_1) - p(\tau_m)}{\tau_1 - \tau_m} = \frac{p(\tau_1) - p(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2}, & b < \tau_2 < \alpha, \beta < \tau_1 < \gamma, \end{cases}$$

则在 $t = 0$ 附近有前向 fan-jump $\overrightarrow{FJ}(U_l, \tau, \tau_3)$ 和后向激波 $\overleftarrow{S}(U_m, \tau, \tau_2)$ 形成, 首先 \overrightarrow{J} 和 \overleftarrow{S} 在 (x_1, t_1) 首次碰撞, 新的 Riemann 问题形成. 由情形 1, \overrightarrow{J} 和 \overleftarrow{S} 碰撞后立即相互穿过. 然后当 $t > t_1$ 时, 根据情形 2, \overrightarrow{F} 和 \overleftarrow{S} 相互穿过. 综上所述, 这个事实用以下符号表示 $\overrightarrow{FJ}\overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{SFJ}$.

\overleftarrow{SFJ} 的碰撞类似, 通过以下符号表示 $\overleftarrow{SFJ} \rightarrow \overrightarrow{FJS}$.

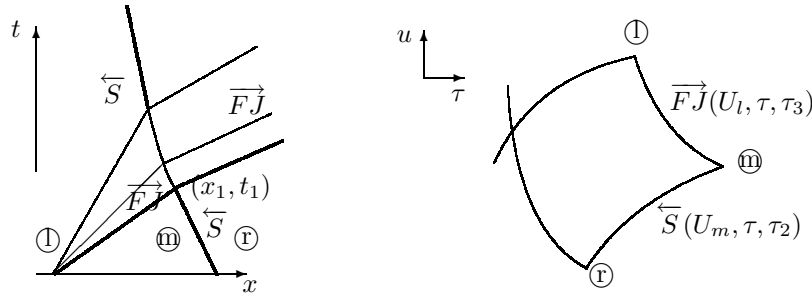


图 17 Fan-jump 和激波的碰撞

情形 5 Jump-fan 和激波的碰撞: $\overrightarrow{JF}\overleftarrow{S}$.

如图 18, 此时 $b < \tau_l < \alpha, \tau_l < \tau_m < \tau_r < \gamma$, 其中 τ_1 满足

$$p'(\tau_1) = \frac{p(\tau_1) - p(\tau_l)}{\tau_1 - \tau_l} = \frac{p(\tau_1) - p(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2}, \quad \beta < \tau_1 < \gamma, \tau_2 > \gamma,$$

则在 (x, t) 平面上 $t = 0$ 处有 $\overrightarrow{JF}(U_l, \tau, \gamma)$ 和 $\overleftarrow{S}(U_m, \tau)$ 形成, 由情形 2, 首先当 $t > t_1$ 时, \overrightarrow{F} 和 \overleftarrow{S} 互相穿过. 根据情形 1, 在 \overrightarrow{J} 和 \overleftarrow{S} 碰撞后, 立即相互穿过, 综上所述, 这个事实由以下符号表示 $\overrightarrow{JF}\overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{SJF}$. \overleftarrow{SJF} 与 \overrightarrow{FJ} 的碰撞也是类似的, $\overleftarrow{SJF} \rightarrow \overrightarrow{JFS}$.

情形 6 Jump-fan-jump 和激波的碰撞: $\overrightarrow{JFJ}\overleftarrow{S}$

如图 19, 此时 $b < \tau_l < c, \gamma < \tau_r < \tau_m < \tau_2$, 其中 τ_1, τ_2 的定义与情形 5 相同. 则在 $t = 0$ 附近有 $\overrightarrow{JFJ}(U_l, \tau, c)$ 和 $\overleftarrow{S}(U_m, \tau)$ 形成, 根据情形 1, 首先 \overrightarrow{J} 和 \overleftarrow{S} 在他们碰撞后立即相互穿过, 当 $t > t_1$ 时, 根据情形 2, \overrightarrow{F} 和 \overleftarrow{S} 相互穿过. \overrightarrow{J} 和 \overleftarrow{S} 在他们再次碰撞后也相互穿过. 综上所述, 这个事实用以下符号表示: $\overrightarrow{JFJ}\overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{SJFJ}$. \overleftarrow{SJFJ} 和 \overrightarrow{FJ} 的碰撞是类似的, $\overleftarrow{SJFJ} \rightarrow \overrightarrow{FJFS}$.

情形 7 Fan-jump-fan 和激波的碰撞: $\overrightarrow{FJF}\overleftarrow{S}$

如图 20, 此时 $\tau_l > d, b < \tau_r < \tau_m < c$, 则在 $t = 0$ 附近, 有 $\overrightarrow{FJF}(U_l, \tau, c)$ 和 $\overleftarrow{S}(U_m, \tau)$, 根据情形 2, 当时间 $t > t_1$ 时, \overrightarrow{FS} 相互穿过. 根据情形 1, \overrightarrow{J} 和 \overleftarrow{S} 在他们碰撞后立即相互穿过. \overrightarrow{F} 和 \overleftarrow{S} 又再次相互穿过. 综上所述, 这个事实可以由以下符号表示: $\overrightarrow{FJF}\overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{SFJF}$. \overleftarrow{SFJF} 和 \overrightarrow{FJF} 的碰撞是类似的, $\overleftarrow{SFJF} \rightarrow \overrightarrow{FJFS}$.

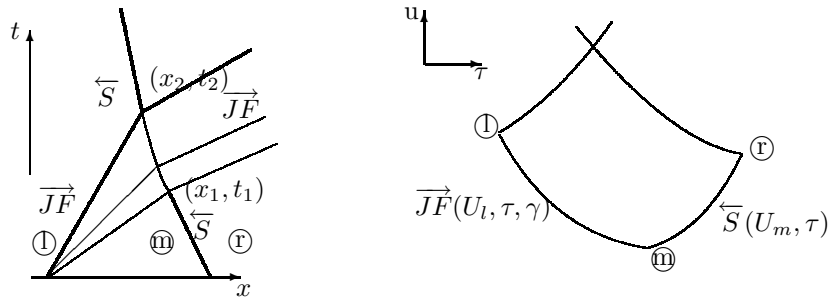


图 18 Jump-fan 和激波的碰撞

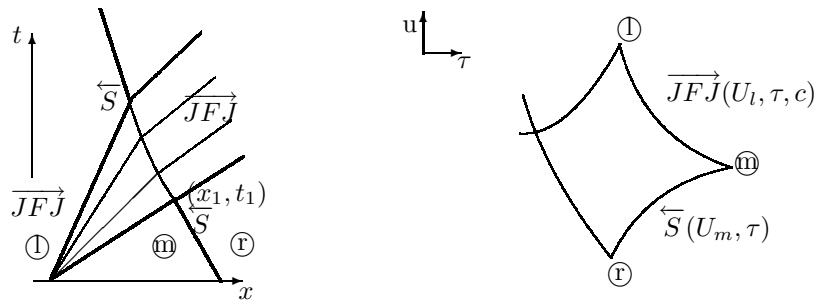


图 19 Jump-fan-jump 和激波的碰撞

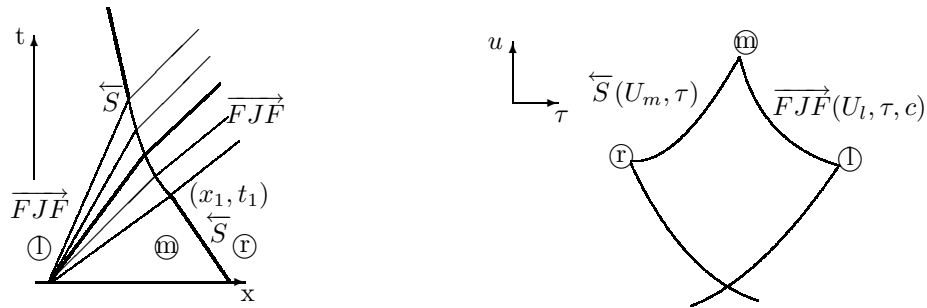


图 20 Fan-jump-fan 和激波的碰撞

致谢 感谢赖耕博士的热情帮助.

参 考 文 献

- [1] Wendroff B. The Riemann problem for materials with nonconvex equations of state I: Isentropic flow [J]. *Journal of Mathematical Analysis And Applications*, 1972, 38:454–466.
- [2] Shearer M. The Riemann problem for a class of conservation laws of mixed type [J]. *Journal of Differential Equations*, 1982, 46:426–433.

- [3] Yanagi S. The Riemann problem for a class of conservation laws of Van der Waals fluid [J]. *Japan J Indust Appl Math*, 1992, 9:239–268.
- [4] Hattori H. The Riemann problem for a Vander Waals fluid with entropy rate admissibility criterion-isother case [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1986, 92:247–263.
- [5] Chang T, Hsiao L. The Riemann problem and interaction of waves in gas dynamics [M]//Essex (England): Longman Scientific and Technical, 1989:38–60.
- [6] Liu F L, Sheng W C. Interaction of elementary waves for relativistic Euler equations [J]. *Journal Shanghai Univ (Engl Ed)*, 2010, 14(6):405–409.

Riemann Problem and Interaction of Elementary Waves to the Euler Equations for Van der Waals Gas

SHENG Wancheng¹ WANG Bin²

¹Corresponding author. College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China. E-mail: mathwvsheng@t.shu.edu.cn

²College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China.
E-mail: binwangshu@gmail.com

Abstract This paper deals with the Riemann problem for the Euler equations and the interaction of elementary waves for isentropic modified Van der Waals gas. The authors modify the state equation of Van der Waals gas to agree with the reality by the area equal principle, which Maxwell constructed. Then the system is transformed from mixed type into hyperbolic type. By the characteristic analysis methods, the authors get the Riemann solutions constructively. Furthermore, the collisions of shock and another elementary waves are shown.

Keywords Euler equations, Van der Waals gas, Riemann problem, Interaction of elementary waves

2000 MR Subject Classification 35A09, 76N10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol.37 No.4, 2016
by ALLERTON PRESS, INC., USA