数 学 年 刊
2016, 37A(4):397–404
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2016.0033

关于 Witt 代数基本子代数的一点注记*

王 晓 明[1]

提要 设 $\mathfrak{g}=W_1$ 是特征 $p>3$ 的代数闭域 k 上的 Witt 代数. 本文确定了 $\mathfrak{g}$ 的极大基本子代数. 进一步具体给出了最大维数的基本子代数的 G 共轭类, 这里 G 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构群. 从而证明了最大维数为 $\frac{p-1}{2}$ 的基本子代数射影簇 $\mathbb{E}(\frac{p-1}{2},\mathfrak{g})$ 是不可约的且是一维的. 更进一步, 证明了 $\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})$ 是不可约的, 具有维数 $p-2$, 而 $\mathbb{E}(2,\mathfrak{g})$ 是等维的, 共有 $\frac{p-3}{2}$ 个不可约分支, 且每个不可约分支的维数是 $p-4$. 而当 $3\leqslant r\leqslant \frac{p-3}{2}$ 时, $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 是可约的. 给出了 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ $\big(3\leqslant r\leqslant \frac{p-3}{2}\big)$ 维数的一个下界.

关键词 Witt 代数, 基本子代数, 簇, 维数
MR (2000) 主题分类 17B05, 17B08, 17B50
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2016)04-0397-008

1 引 言

设 $\mathfrak{g}$ 是特征 $p>0$ 的域上的一个有限维限制李代数. $\mathfrak{g}$ 的一个李子代数 ϵ 称为基本子代数, 如果 ϵ 是交换的, 且 ϵ 上的 $[p]$ 映射是平凡的. 从而, 如果 ϵ 是 r 维的, 则 $\epsilon\cong\mathfrak{g}_a^{\oplus r}$, 这里 $\mathfrak{g}_a$ 是一维加法群 $\mathbb{G}_a$ 的李代数. 对于一个不超过 $\dim\mathfrak{g}$ 的正整数 r, 设 $\mathrm{Gr}_r(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的所有 r 维子空间, 称为一个 Grassmann 簇. 利用 Plücker 嵌入, 可以证明 $\mathrm{Gr}_r(\mathfrak{g})$ 是一个 $r(\dim\mathfrak{g}-r)$ 维的射影簇. 设 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的所有 r 维基本子代数. 由文 [1, 命题 1.4], $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 是 Grassmann 簇 $\mathrm{Gr}_r(\mathfrak{g})$ 的一个闭子簇. $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 可等同于 $\mathfrak{g}$ 中的所有包含线性无关的互相交换的且 $[p]$ 映射是平凡的 r 元组在自然的 GL_r 作用下的轨道空间. 特别地, 当 $r=1$ 时, $\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})$ 是 $[p]$ 幂零锥 $\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})=\{x\in\mathfrak{g}\mid x^{[p]}=0\}$ 的射影化. 对于 $r=2$ 且 $\mathfrak{g}$ 是代数群 G 的李代数情形, Premet 关于幂零交换簇的工作给出了射影簇 $\mathbb{E}(2,\mathfrak{g})$ 的很多信息 [2]. 进一步, 值得指出的是射影簇 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 和 G 的 r 阶 Frobenius 核的上同调的极大理想谱有紧密的联系 [3–5]. 最近 Ngo[6] 研究了李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 的 r 维幂零交换簇的几何及代数性质.

本文是受最近 Carlson, Friedlander 和 Pevtsova[1] 的工作以及 Pevtsova 和 Stark[7] 的工作所启发. 他们确定了典型李代数的极大维数的基本子代数. 本文是确定 Cartan 型单李代数的基本子代数的第 1 步工作, 这类李代数不是来自于代数群. 作为开始的尝试, 我们在本文中研究最简单的 Cartan 型李代数, 即 $\mathfrak{g}=W_1$, Witt 代数的基本子代数. 完全确定了极大基本子代数. 进一步, 完全给出了最大维数的基本子代数在 $\mathfrak{g}$ 的自同构群作用下的共轭类. 从而, 证明了最大维数的基本子代数射影簇 $\mathbb{E}(\frac{p-1}{2},\mathfrak{g})$ 是不可约的且是一维的. 更进一步, 证明了 $\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})$ 是不可约的, 具有维数 $p-2$, $\mathbb{E}(2,\mathfrak{g})$ 是等维的, 共有 $\frac{p-3}{2}$ 个不可约分支, 且每个不可约分支的维数是 $p-4$. 而当 $3\leqslant r\leqslant\frac{p-3}{2}$ 时, $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 是可约的. 给出了 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ $\big(3\leqslant r\leqslant\frac{p-3}{2}\big)$ 维数的一个下界.

2 记号及预备知识

本文假设 k 是一个具有特征 $p>3$ 的代数闭域.

本文 2015 年 1 月 19 日收到, 2015 年 10 月 8 日收到修改稿.
[1]上海海洋大学信息学院, 上海 201306. E-mail: xmwang@shou.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11501359, No. 11271014) 的资助.

2.1 Witt 代数 W_1

设 $\mathfrak{A}=k[X]/(X^p)$ 是一个变量的截头多项式代数, 其中 (X^p) 表示 $k[X]$ 中由 X^p 生成的理想. 为简单起见, 将 X 在 $\mathfrak{A}$ 中的陪集也记为 X. 则 $\mathfrak{A}$ 有一个典范的基 $\{1,X,\cdots,X^{p-1}\}$. 设 D 是 $\mathfrak{A}$ 上的线性算子满足 $DX^i=iX^{i-1}, 0\leqslant i\leqslant p-1$. 令 W_1 是 $\mathfrak{A}$ 的导子代数, 即 Witt 代数. 以下除非特别说明, 总假设 $\mathfrak{g}=W_1$. 由文 [8, § 4.2], $\mathfrak{g}=\mathrm{span}_k\{X^iD\mid 0\leqslant i\leqslant p-1\}$. $\mathfrak{g}$ 上有一个自然的 $\mathbb{Z}$-阶化，即

$$\mathfrak{g}=\sum_{i=-1}^{p-2}\mathfrak{g}_{[i]},$$

其中 $\mathfrak{g}_{[i]}=kX^{i+1}D$, $-1\leqslant i\leqslant p-2$. 结合该阶化， $\mathfrak{g}$ 有以下自然的滤过：

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\supset\mathfrak{g}_0\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_{p-2}\supset 0,$$

其中

$$\mathfrak{g}_i=\sum_{j\geqslant i}\mathfrak{g}_{[j]},\quad -1\leqslant i\leqslant p-2.$$

该滤过在 $\mathfrak{g}$ 的自同构群 G 作用下不变 [9–11]. 进一步， $\mathfrak{g}$ 是一个限制李代数，其 $[p]$-映射即为导子的 p 次复合. 准确地说,

$$(X^iD)^{[p]}=\begin{cases}0, & 当\ i\neq 1\ 时,\\ XD, & 当\ i=1\ 时.\end{cases}$$

令 $\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})=\{x\in\mathfrak{g}\mid x^{[p]}=0\}$, 则 $\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个闭子簇，即为 $\mathfrak{g}$ 中的所有幂零元. 在文献中，通常称 $\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的幂零锥或幂零簇. 为之后使用，我们需要下面已知的结论.

引理 2.1 [11–12] 设 $\mathfrak{g}=W_1$ 是 Witt 代数， $G=\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构群. 则下面论断成立：

(i) G 是一个 $p-1$ 维的连通代数群.

(ii) $G\cdot D$ 是 $\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})$ 中的开且稠密轨道. 进一步， $G\cdot D=(\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{g}_0)\cap\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})$.

(iii) $\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})$ 有分解 $\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})=G\cdot D\cup\mathfrak{g}_1$.

(iv) 作为一个簇， $\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})$ 是不可约的，且 $\dim\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})=p-1$.

基于文 [13, 命题 3.3–3.4], 通过直接计算得到下面有用的结论.

引理 2.2 设 $\mathfrak{g}=W_1$ 是 Witt 代数. 对于 $x\in\mathfrak{g}$, 令 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)=\{y\in\mathfrak{g}\mid[x,y]=0\}$ 是 x 在 $\mathfrak{g}$ 中的中心化子. 则

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)=\begin{cases}kx, & 如果\ x\in G\cdot D,\\ kx\oplus\mathfrak{g}_{p-1-i}, & 如果\ x\in\mathfrak{g}_i\setminus\mathfrak{g}_{i+1},\ 1\leqslant i<\frac{p-1}{2},\\ \mathfrak{g}_{p-1-i}, & 如果\ x\in\mathfrak{g}_i\setminus\mathfrak{g}_{i+1},\ i\geqslant\frac{p-1}{2}.\end{cases}$$

特别地， $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)\subseteq\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})$, $x\in\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})$.

以下对于 $S\subseteq\mathfrak{g}$, 令 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(S)=\bigcap\limits_{x\in S}\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)$.

2.2 代数几何中的一个有用的结论

设 V 是一个 n 维的 k 向量空间， $r\leqslant n$ 是一个正整数， $\mathrm{Gr}_r(V)$ 是 V 中的所有 r 维子空间. 利用 Plücker 嵌入， $\mathrm{Gr}_r(V)$ 有一个射影簇的结构. 为之后使用，需要下面简单的观察.

引理 2.3　设 V 是 k 上的一个有限维向量空间. 设 V_1 和 V_2 是 V 的子空间, 且 $V_1 \subseteq V_2$, $\dim_k V_1 = m$, $\dim_k V_2 = m+2$. 令

$$\mathcal{W} = \{W \mid V_1 \subseteq W \subseteq V_2,\ \dim W = m+1\},$$

则 $\mathcal{W}$ 是 $\mathrm{Gr}_{m+1}(V)$ 中的一个一维不可约子簇.

证　根据文 [14, Lecture 6], 典范的投射 $V_2 \to V_2/V_1$ 诱导出下面的嵌入映射:

$$\phi:\ \mathrm{Gr}_1(V_2/V_1) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{m+1}(V_2) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{m+1}(V).$$

由于 $\mathrm{Gr}_1(V_2/V_1) \cong \mathbb{P}^1$, $\mathcal{W} = \phi(\mathrm{Gr}_1(V_2/V_1))$, 从而结论成立.

3　Witt 代数的基本子代数

作为群论中基本阿贝尔 p-群的一个对比，有如下限制李代数中的相应概念.

定义 3.1　设 $\mathfrak{g}$ 是一个限制李代数. 一个 r 维基本子代数 $\epsilon \subseteq \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中一个 r 维交换子代数，其上的 $[p]$ 映射是平凡的. 记 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 中所有 r 维基本子代数. 记 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})_{\max}$ 为 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 中的极大基本子代数，其中一个基本子代数称为极大子代数，如果它不真包含在任何其他基本子代数中.

下面一个结论断言 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 是一个射影簇.

引理 3.1 [1, 命题 1.4, 命题 3.21]　自然的嵌入 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_r(\mathfrak{g})$ 是一个闭浸入. 特别地, $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 有一个射影簇的结构. 进一步, $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})_{\max}$ 是 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 中的开集.

接下来总假设 $\mathfrak{g} = W_1$ 是 p 维 Witt 代数. 对于任何 $\mathbf{a} = (a_1,\cdots,a_{p-2}) \in k^{p-2}$, 令 $\widetilde{a}_1 = \frac{a_1}{2}$,

$$\widetilde{a}_i = \frac{1}{i+1}\Big(ia_i + \sum_{j=0}^{i-2}(2j+1-i)a_{j+1}\widetilde{a}_{i-1-j}\Big), \quad 2 \leqslant i \leqslant p-2. \tag{3.1}$$

令

$$x_{\mathbf{a}} = D + \sum_{i=1}^{p-2} a_i X^i D + \Big(\sum_{i=0}^{p-3} 2(i+1)a_{i+1}\widetilde{a}_{p-2-i}\Big)X^{p-1}D \tag{3.2}$$

以及 $\epsilon_{\mathbf{a}} = kx_{\mathbf{a}}$. 由文 [15, 定理 3.3],

$$G\cdot D = \bigcup_{\mathbf{a}\in k^{p-2}} \epsilon_{\mathbf{a}}. \tag{3.3}$$

对于 $1 \leqslant i < \frac{p-3}{2}$ 以及 $\mathbf{b} = (b_1,\cdots,b_{p-2-2i}) \in k^{p-2-2i}$, 令

$$x_{\mathbf{b}} = X^{i+1}D + \sum_{j=1}^{p-2-2i} b_j X^{i+j+1} D$$

以及

$$\epsilon_{\mathbf{b}} = kx_{\mathbf{b}} \oplus \mathfrak{g}_{p-1-i}.$$

对任何 $\mathbf{c} = (c_1,c_2) \in \mathbb{P}^1$, 令

$$x_{\mathbf{c}} = c_1 X^{\frac{p-1}{2}} D + c_2 X^{\frac{p+1}{2}} D$$

以及

$$\epsilon_{\mathbf{c}} = kx_{\mathbf{c}} \oplus \mathfrak{g}_{\frac{p+1}{2}}.$$

我们得到下面一个结论，其证明是直接的.

引理 3.2 保持以上记号，则下面结论成立：
(i) 设 $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in k^{p-2}$, 则 $\epsilon_{\mathbf{a}} = \epsilon_{\mathbf{a}'}$ 当且仅当 $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.
(ii) 设 $1 \leqslant i < \frac{p-3}{2}$, $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in k^{p-2-2i}$, 则 $\epsilon_{\mathbf{b}} = \epsilon_{\mathbf{b}'}$ 当且仅当 $\mathbf{b} = \mathbf{b}'$.
(iii) 设 $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbb{P}^1$, 则 $\epsilon_{\mathbf{c}} = \epsilon_{\mathbf{c}'}$ 当且仅当 $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$.
(iv) $\epsilon_{\mathbf{a}}, \epsilon_{\mathbf{b}}, \epsilon_{\mathbf{c}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大基本子代数，其中 $\mathbf{a} \in k^{p-2}$，$\mathbf{b} \in k^{p-2-2i}$，$\mathbf{c} \in \mathbb{P}^1$，$1 \leqslant i < \frac{p-3}{2}$.

接下来对于任何 $r \in \mathbb{N}$, 确定 $\mathbb{E}(r, \mathfrak{g})_{\max}$.

定理 3.1 设 $\mathfrak{g} = W_1$ 是 Witt 代数. 则

$$\Big\{\epsilon_{\mathbf{a}}, \epsilon_{\mathbf{b}}, \epsilon_{\mathbf{c}} \mid \mathbf{a} \in k^{p-2},\ \mathbf{c} \in \mathbb{P}^1,\ \mathbf{b} \in k^{p-2-2i},\ 1 \leqslant i < \frac{p-3}{2}\Big\}$$

穷举了 $\mathfrak{g}$ 的所有极大基本子代数. 从而

$$\mathbb{E}(1, \mathfrak{g})_{\max} = \{\epsilon_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in k^{p-2}\}, \quad \mathbb{E}\Big(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g}\Big)_{\max} = \{\epsilon_{\mathbf{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathbb{P}^1\}, \tag{3.4}$$

$$\mathbb{E}(r, \mathfrak{g})_{\max} = \{\epsilon_{\mathbf{b}} \mid \mathbf{b} \in k^{p-2r}\}, \quad 2 \leqslant r \leqslant \frac{p-3}{2} \tag{3.5}$$

以及

$$\mathbb{E}(r, \mathfrak{g})_{\max} = \emptyset, \quad r \geqslant \frac{p+1}{2}. \tag{3.6}$$

进一步， $\mathbb{E}(r, \mathfrak{g})_{\max} \cong \mathbb{A}^{p-2r}$，$1 \leqslant r \leqslant \frac{p-3}{2}$ 以及 $\mathbb{E}\big(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g}\big)_{\max} \cong \mathbb{P}^1$.

证 (1) 设 ϵ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个极大基本子代数. 令

$$i = \min\{j \mid \epsilon \cap (\mathfrak{g}_j \setminus \mathfrak{g}_{j+1}) \neq 0\}.$$

由于 ϵ 中所有元素都是 p-幂零的, 从而 $i \neq 0$. 进一步, 断言 $i \leqslant \frac{p-1}{2}$. 假设不真, 则 ϵ 真包含于基本子代数 $\mathfrak{g}_{\frac{p-1}{2}}$ 中. 这与 ϵ 作为基本子代数的极大性矛盾. 设 $0 \neq x \in \epsilon \cap (\mathfrak{g}_i \setminus \mathfrak{g}_{i+1})$. 以下分 4 种情形讨论.

情形 1 $i = -1$.

在这种情形下, 由引理 2.1(ii) 知 $x \in G \cdot D$. 进一步, 根据引理 2.2, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x) = kx$. 从而由 (3.3) 知, 存在 $\mathbf{a} \in k^{p-2}$, 使得 $\epsilon = kx = \epsilon_{\mathbf{a}}$.

情形 2 $1 \leqslant i < \frac{p-3}{2}$.

由引理 2.2 知 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x) = kx \oplus \mathfrak{g}_{p-1-i}$. 从而 $\epsilon \subseteq kx \oplus \mathfrak{g}_{p-1-i}$. 显然存在 $\mathbf{b} \in k^{p-2-2i}$, 使得 $kx \oplus \mathfrak{g}_{p-1-i} = \epsilon_{\mathbf{b}}$. 由引理 3.2 (iv) 以及 ϵ 作为基本子代数的极大性得到 $\epsilon = \epsilon_{\mathbf{b}}$.

情形 3 $i = \frac{p-3}{2}$.

类似于情形 2 的讨论可以得到 $\epsilon \subseteq kx \oplus \mathfrak{g}_{\frac{p+1}{2}}$. 由于 $kx \oplus \mathfrak{g}_{\frac{p+1}{2}}$ 可等同于 $\epsilon_{\mathbf{c}}$, 其中 $\mathbf{c} = (1, c) \in \mathbb{P}^1$, 从而根据 ϵ 的极大性得到 $\epsilon = \epsilon_{\mathbf{c}}$.

情形 4 $i = \frac{p-1}{2}$.

由引理 2.2 知 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x) = \mathfrak{g}_{\frac{p-1}{2}}$. 从而 $\epsilon \subseteq \mathfrak{g}_{\frac{p-1}{2}}$. 因此 $\epsilon = \mathfrak{g}_{\frac{p-1}{2}} = \epsilon_{\mathbf{c}'}$, 其中 $\mathbf{c}' = (0, 1) \in \mathbb{P}^1$.

总的来说,

$$\epsilon \in \Big\{\epsilon_{\mathbf{a}}, \epsilon_{\mathbf{b}}, \epsilon_{\mathbf{c}} \mid \mathbf{a} \in k^{p-2},\ \mathbf{c} \in \mathbb{P}^1,\ \mathbf{b} \in k^{p-2-2i},\ 1 \leqslant i < \frac{p-3}{2}\Big\}.$$

从而, 根据以上讨论以及引理 3.2 (iv) 得到第一个断言.

(2) 通过直接计算极大基本子代数 $\epsilon_{\mathbf{a}}, \epsilon_{\mathbf{b}}, \epsilon_{\mathbf{c}}$ 的维数, 得到 (3.4)–(3.6).

(3) 下面典范的态射

$$\Psi_1: \ \mathbb{A}^{p-2} \to \mathbb{E}(1, \mathfrak{g})_{\max},$$
$$\mathbf{a} \mapsto \epsilon_{\mathbf{a}},$$
$$\Psi_r: \ \mathbb{A}^{p-2r} \to \mathbb{E}(r, \mathfrak{g})_{\max},$$
$$\mathbf{b} \mapsto \epsilon_{\mathbf{b}}$$

以及

$$\Psi_{\frac{p-1}{2}}: \ \mathbb{P}^1 \to \mathbb{E}\Big(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g}\Big)_{\max},$$
$$\mathbf{c} \mapsto \epsilon_{\mathbf{c}}$$

给出了所需要的同构，其中 $2 \leqslant r \leqslant \frac{p-3}{2}$.

注 3.1 希望能类似地应用定理 3.1 中的方法确定一般的 Jacobson-Witt 代数 W_n 的极大基本子代数. 可是很遗憾，难以实现，因为 W_n 的幂零轨道结构要复杂得多. 事实上，定理 3.1 的证明依赖于 Witt 代数中幂零元的中心化子的结构.

作为定理 3.1 的一个推论，我们有如下推论 3.1.

推论 3.1 设 $\mathfrak{g} = W_1$ 是 Witt 代数， $G = \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构群，则以下论断成立：

(i) $\mathfrak{g}$ 中基本子代数的最大维数是 $\frac{p-1}{2}$.

(ii) 任何一个维数为 $\frac{p-1}{2}$ 的基本子代数在 G 的作用下共轭于 $\epsilon_{(0,1)}$ 或者 $\epsilon_{(1,0)}$.

(iii) $\mathbb{E}(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g})$ 是不可约的且 $\dim \mathbb{E}(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g}) = 1$.

证 (i) 可从定理 3.1 直接得到.

(ii) 设 ϵ 是一个维数为 $\frac{p-1}{2}$ 的基本子代数. 由定理 3.1, 存在 $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{P}^1$, 使得

$$\epsilon = \epsilon_{\mathbf{c}} = k(c_1 X^{\frac{p-1}{2}} D + c_2 X^{\frac{p+1}{2}} D) \oplus \mathfrak{g}_{\frac{p+1}{2}}.$$

如果 $c_1 = 0$, 则 $\epsilon = \mathfrak{g}_{\frac{p-1}{2}} = \epsilon_{(0,1)}$. 如果 $c_1 \neq 0$, 由文 [13, 推论 2.4] 知，存在 $\sigma \in G$, 使得

$$\sigma(X^{\frac{p-1}{2}} D) - (c_1 X^{\frac{p-1}{2}} D + c_2 X^{\frac{p+1}{2}} D) \in \mathfrak{g}_{\frac{p+1}{2}}.$$

因此 $\epsilon = \sigma(\epsilon_{(1,0)})$.

(iii) 可由 (i) 和定理 3.1 得到，因为 $\mathbb{E}(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g}) = \mathbb{E}(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g})_{\max}$. 这里，我们给出另外一个证明. 令 $U = G \cdot \epsilon_{(1,0)}$. 由 (ii) 可得

$$\mathbb{E}\Big(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g}\Big) = U \cup \{\mathfrak{g}_{\frac{p-1}{2}}\}.$$

进一步， $\mathbb{E}(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g})$ 可以如下刻画：

$$\mathbb{E}\Big(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g}\Big) = \{W \mid \mathfrak{g}_{\frac{p-3}{2}} \underset{\neq}{\subseteq} W \underset{\neq}{\subseteq} \mathfrak{g}_{\frac{p+1}{2}}\}.$$

由引理 2.3, $\mathbb{E}(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g})$ 是不可约的，且是一维的.

接下来我们刻画 $\mathbb{E}(r, \mathfrak{g})$, $1 \leqslant r \leqslant \frac{p-3}{2}$. 根据 (3.1)–(3.3)[15, 定理 3.3], 存在一个 $p-1$ 次的齐次多项式

$$f(t_{-1}, t_0, \cdots, t_{p-2}) = t_{p-2} t_{-1}^{p-2} - \sum_{i=0}^{p-3} (2i+1) t_i t_{-1}^i l_{p-2-i},$$

使得

$$G\cdot D=\Big\{\sum_{i=-1}^{p-2}\xi_iX^{i+1}D\Big|\xi_{-1}\neq 0 \text{ 且 } f(\xi_{-1},\xi_0,\cdots,\xi_{p-2})=0\Big\},$$

其中

$$l_1=\frac{t_0}{2},$$
$$l_s=\frac{1}{s+1}\Big(st_{s-1}t_{-1}^{s-1}+\sum_{j=0}^{s-2}(2j+1-s)t_jt_{-1}^jl_{s-1-j}\Big),\quad 2\leqslant s\leqslant p-2.$$

由 (3.4) 得到

$$\overline{\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})_{\max}}=\Big\{k\Big(\sum_{i=-1}^{p-2}\xi_iX^{i+1}D\Big)\Big|f(\xi_{-1},\xi_0,\cdots,\xi_{p-2})=0\Big\}$$

是不可约的，具有维数 $p-2$. 特别地， $\mathbb{E}(1,\mathfrak{g}_1)\subset\overline{\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})_{\max}}$. 根据引理 2.1 和 (3.3),

$$\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})=\overline{\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})_{\max}}\cup\mathbb{E}(1,\mathfrak{g}_1)=\overline{\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})_{\max}}.$$

因此 $\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})$ 是不可约的，且具有维数 $p-2$.

设

$$C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))=\{(x,y)\in\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})\times\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})\mid[x,y]=0\}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的幂零交换簇. 则

$$C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))^o=\{(x,y)\in C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))\mid x,y\,\text{线性无关}\}$$

是 $C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))$ 中的开集. 任何 $(x,y)\in C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))^o$ 对应于一个二维向量空间 $V_{(x,y)}=kx\oplus ky$. 显然 $V_{(x,y)}\in\mathbb{E}(2,\mathfrak{g})$, $\forall(x,y)\in C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))^o$. 进一步， $\mathbb{E}(2,\mathfrak{g})$ 中任何元素都形如 $V_{(x,y)}$, $(x,y)\in C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))^o$. 在 $C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))^o$ 中按如下方式定义一个 $GL_2(k)$ 作用：

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\cdot(x,y)=(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y),\quad\forall\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\in GL_2(k),\ (x,y)\in C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))^o.$$

从而得到如下满的簇同态

$$\begin{aligned}\Theta:\quad C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))^o&\to\mathbb{E}(2,\mathfrak{g}),\\(x,y)&\mapsto V_{(x,y)},\end{aligned}$$

其中每一个纤维是 $C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))^o$ 中的一个 $GL_2(k)$ 轨道.

设

$$C(i)=\{(x,y)\in C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))\mid x\in\mathfrak{g}_i\setminus\mathfrak{g}_{i+1}\},\quad 1\leqslant i\leqslant\frac{p-3}{2}$$

以及 $\mathfrak{C}(i)=\overline{C(i)}$, 即 $C(i)$ 在 $C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))$ 中的闭包. 令 $\mathfrak{C}(i)^o=\mathfrak{C}(i)\cap C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))^o$. 由文 [16], $\mathfrak{C}(i)^o$ 在 $GL_2(k)$ 作用下不变. 进一步，由文 [16, 定理 3.6] 知，可如下分解 $C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))^o$ 成不可约分支：

$$C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))^o=\bigcup_{i=1}^{\frac{p-3}{2}}\mathfrak{C}(i)^o.$$

从而得到 $\mathbb{E}(2,\mathfrak{g})$ 的不可约分解

$$\mathbb{E}(2,\mathfrak{g})=\bigcup_{i=1}^{\frac{p-3}{2}}\Theta(\mathfrak{C}(i)^o).$$

进一步，由文 [16, 引理 3.3] 可知

$$\dim\Theta(\mathfrak{C}(i)^o)=\dim\mathfrak{C}(i)^o-\dim GL_2(k)=p-4,\quad \forall 1\leqslant i\leqslant\frac{p-3}{2}.$$

从而 $\mathbb{E}(2,\mathfrak{g})$ 是等维的，具有 $\frac{p-3}{2}$ 个不可约分支，每个不可约分支具有维数 $p-4$.

设 $2\leqslant r\leqslant\frac{p-3}{2}$. 对任何 $\widetilde{\mathbf{b}}=(b_1,b_2,\cdots,b_{p+1-2r})\in\mathbb{P}^{p+1-2r}$, 令

$$\epsilon_{\widetilde{\mathbf{b}}}=k\Big(\sum_{j=1}^{p+1-2r}b_jX^{r+j-1}D\Big)\oplus\mathfrak{g}_{p-r}.$$

由定理 3.1 知

$$\overline{\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})_{\max}}=\{\epsilon_{\widetilde{\mathbf{b}}}\mid\widetilde{\mathbf{b}}\in\mathbb{P}^{p+1-2r}\}$$

以及

$$\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})=\overline{\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})_{\max}}\cup\Big(\bigcup_{r<i\leqslant\frac{p-1}{2}}\ \bigcup_{\epsilon_i\in\mathbb{E}(i,\,\mathfrak{g})_{\max}}\mathrm{Gr}_r(\epsilon_i)\Big).$$

进一步， $\epsilon\in\overline{\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})_{\max}}$ 当且仅当 $\mathfrak{g}_{p-r}\subset\epsilon$. 从而

$$\overline{\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})_{\max}}\subsetneqq\mathbb{E}(r,\mathfrak{g}).$$

由引理 3.1 知 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})_{\max}$ 是 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 中的开集，所以 $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 不是不可约的．进一步，

$$\dim\,\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})\geqslant\dim\,\mathrm{Gr}_r(\epsilon_{\frac{p-1}{2}})=r\Big(\frac{p-1}{2}-r\Big),\quad\forall\epsilon_{\frac{p-1}{2}}\in\mathbb{E}\Big(\frac{p-1}{2},\mathfrak{g}\Big)_{\max}.$$

总的来说，从以上讨论，我们得到如下结论.

定理 3.2　设 $\mathfrak{g}=W_1$ 是 Witt 代数．下面论断成立：

(i) $\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})=\overline{\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})_{\max}}$ 是不可约的，且 $\dim\,\mathbb{E}(1,\mathfrak{g})=p-2$.

(ii) $\mathbb{E}(2,\mathfrak{g})$ 是等维的，且具有 $\frac{p-3}{2}$ 个不可约分支，每个不可约分支具有维数 $p-4$. 特别地， $\dim\,\mathbb{E}(2,\mathfrak{g})=p-4$.

(iii) $\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})$ 是可约的，且 $\dim\,\mathbb{E}(r,\mathfrak{g})\geqslant r\big(\frac{p-1}{2}-r\big)$, $2\leqslant r\leqslant\frac{p-3}{2}$.

致谢 感谢审稿人的仔细审阅以及有益的建议.

参　考　文　献

[1] Carlson J, Friedlander E, Pevtsova J. Elementary subalgebras of Lie algebras [J]. *J Algebra*, 2015, 442:155–189.

[2] Premet A A. Nilpotent commuting varieties of reductive Lie algebras [J]. *Invent Math*, 2003, 154:653–683.

[3] Mcninch G. Abelian unipotent subgroups of reductive groups [J]. *J Pure Applied Algebra*, 2002, 167:269–300.

[4] Sobaje P. On exponentiation and infinitesimal one-parameter subgroups of reductive groups [J]. *J Algebra*, 2013, 385:14–26.

[5] Suslin A, Friedlander E, Bendel C. Infinitesimal 1-parameter subgroups and cohomology [J]. *J Amer Math Soc*, 1997, 10:693–728.

[6] Ngo N. Commuting varieties of r-tuples over Lie algebras [J]. *J Pure Applied Algebra*, 2014, 218(8):1400–1417.

[7] Pevtsova J, Stark J. Varieties of maximal elementary subalgebras of maximal dimension for modular Lie algebras [R]. arXiv:1503.01043 [math. RT], 2015.

[8] Strade H, Farnsteiner R. Modular Lie algebras and their representations [M]. New York: Marcel Dekker, 1988.

[9] Ree R. On generalized Witt algebras [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1956, 83:510–546.

[10] Chang H J. Uber Wittsche Lie-ringe [J]. *Abh Math Sem Univ Hamburg*, 1941, 14:151–184.

[11] Wilson R. Automorphisms of graded Lie algebra of Cartan type [J]. *Comm Algebra*, 1975, 3(7):591–613.

[12] Premet A A. The theorem on restriction of invariants and nilpotent elements in W_n [J]. *Math USSR Sbornik*, 1992, 73(1):135–159.

[13] Yao Y F, Shu B. Nilpotent orbits in the Witt algebra W_1 [J]. *Comm Algebra*, 2011, 39(9):3232–3241.

[14] Harris J. Algebraic geometry [M]. New York: Springer-Verlag, 1992.

[15] Yao Y F, Chang H. Borel subalgebras of the Witt algebra W_1 [J]. *Acta Math Sin*, 2015, 31(8):1348–1358.

[16] Yao Y F, Chang H. Nilpotent commuting varieties of the Witt algebra [J]. *J Pure Applied Algebra*, 2014, 218(10):1783–1791.

A Note on Elementary Subalgebras of the Witt Algebra

WANG Xiaoming[1]

[1]College of Information Technology, Shanghai Ocean University, Shanghai 201306, China. E-mail: xmwang@shou.edu.cn

Abstract Let $\mathfrak{g} = W_1$ be the Witt algebra over an algebraically closed field k of characteristic $p > 3$. Maximal elementary subalgebras of $\mathfrak{g}$ are determined. Moreover, G conjugacy classes of elementary subalgebras of maximal dimension under the automorphism group of $\mathfrak{g}$ are precisely given. As a consequence, the projective variety $\mathbb{E}\big(\frac{p-1}{2}, \mathfrak{g}\big)$ of elementary subalgebras of maximal dimension $\frac{p-1}{2}$ is shown to be irreducible and one-dimensional. Moreover, we show that $\mathbb{E}(1, \mathfrak{g})$ is irreducible and has dimension $p-2$, $\mathbb{E}(2, \mathfrak{g})$ is equidimensional and has $\frac{p-3}{2}$ irreducible components with the same dimension $p-4$. While $\mathbb{E}(r, \mathfrak{g})$ is reducible for $3 \leqslant r \leqslant \frac{p-3}{2}$. A lower bound for the dimension of $\mathbb{E}(r, \mathfrak{g})$ $\big(3 \leqslant r \leqslant \frac{p-3}{2}\big)$ is given.

Keywords Witt algebra, Elementary subalgebra, Variety, Dimension
2000 MR Subject Classification 17B05, 17B08, 17B50

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 37 No. 4, 2016
by ALLERTON PRESS, INC., USA