数 学 年 刊
2016, 37A(4):405–420
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2016.0034

带形上随机环境中随机游动的内蕴分枝结构*

洪文明[1]　　张美娟[2]

提要 揭示了带形上随机环境中随机游动的内蕴分枝结构—带移民的多物种分枝过程. 利用内蕴分枝结构, 可精确表达游动的首次击中时. 给出了内蕴分枝结构的如下两个应用: (1) 计算出首次击中时的均值, 给出游动大数定律速度的显示表达, (2) 得到从粒子角度看环境的马氏链不变测度的密度函数的显示表达, 进而可用另一种"站在粒子看环境"的方法直接证明游动的大数定律.

关键词 分枝结构, 带形上的随机游动, 随机环境, 击中时, 不变测度, 从粒子看环境
MR (2000) 主题分类 60J80, 60G50
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2016)04-0405-16

1 引　言

令 $\mathscr{D}=\{1,2,\cdots,d\}$, 其中正整数 $d\geqslant 1$. 考虑带形 $S=\mathbb{Z}\times\{1,2,\cdots,d\}$ 上随机环境中的随机游动. 此模型最初由 Bolthausen 和 Goldsheid[1] 提出, 在平稳遍历的环境中, 利用平稳正随机矩阵乘积的 Lyapunov 指数给出了常返暂留性的判别准则. Goldsheid[2] 通过构造扩大的随机环境, 讨论了带形上随机环境中随机游动击中时的极限性质, 证明了击中时的大数定律和中心极限定理; Roitershtein[3] 通过构造一个 "annealed" 测度证明了游动的强大数定律, 并且用"站在粒子看环境"的方法得到了 "annealed" 意义下的中心极限定理. Bolthausen 和 Goldsheid[4] 证明了在常返情形下, 游动的 "Sinai" 性质; Peterson[5] 研究了带形上随机环境中的随机游动在 "quenched" 和 "annealed" 意义下的大偏差.

本文的主要目标是揭示带形上随机环境中随机游动的内蕴分枝结构. 利用分枝结构, 可以精确表达首次击中时 T_1. 通过对分枝结构的分析, 计算出首次击中时的均值 $\mathbb{E}T_1$, 给出了游动大数定律速度的显式表达. Roitershtein[3, 定理 2.3] 发现对于带形上随机环境中暂留随机游动, 从粒子角度看环境的马氏链不变测度与环境空间概率测度的等价性. 作为内蕴分枝结构的第二个应用, 我们给出了从粒子角度看环境的马氏链不变测度的密度函数的显式表达, 进而用另一种"站在粒子看环境"的方法直接证明游动的大数定律.

随机环境中随机游动的内蕴分枝结构是研究随机游动极限性质的一个基础性的有力工具. 利用分枝结构, 可以精确表达首次击中时 T_1. 对于一维随机环境中紧邻随机游动 (简记为 RWRE), Kesten 等[6] 在证明稳定型极限定理这一著名理论中, 发现内蕴分枝结构是一个有力的工具. Dembo 等[7], Zeitouni[8], Greven 和 Hollander[9], Ganterta 和 Shi[10] 等同样利用内蕴分枝结构研究游动的概率性质. 对于跳幅有界的一维随机环境中的随机游动, Hong 和 Wang[11], Hong 和 Zhang[12], Hong 和 Wang[13] 分别揭示了 $(L,1)$-RWRE,

本文 2014 年 11 月 25 日收到, 2015 年 4 月 24 日收到修改稿.
[1]北京师范大学数学科学学院, 北京 100875. E-mail: wmhong@bnu.edu.cn
[2]中央财经大学统计与数学学院, 北京 100081. E-mail: zhangmeijuan1227@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11131003) 和中央财经大学 2016 年青年教师发展基金的资助.

$(1,R)$-RWRE, 以及 (L,R)-RWRE 的内蕴分枝结构. 作为内蕴分枝结构系列工作的一部分，本文研究带形上随机环境中的紧邻随机游动. 在这里特别指出，这一系列工作彼此互不覆盖 [11].

1.1 模型描述

沿用文 [1] 中关于模型的描述. 令 $\{(P_n,Q_n,R_n),\ n\in\mathbb{Z}\}$ 为由 $d\times d$ 维矩阵三元组构成的严格平稳遍历序列, 其中所含矩阵的每个元素都是非负的, 并且对任意的 n, $P_n+Q_n+R_n$ 为随机矩阵, 即 $(P_n+Q_n+R_n)\mathbf{1}=\mathbf{1}$, 其中 $\mathbf{1}$ 为各个元素均为 1 的列向量. 记 P_n 中各元素为 $P_n(i,j)$, $1\leqslant i,j\leqslant d$, 对 Q_n 和 R_n 中的各元素可类似定义. 令 $(\Omega,\mathscr{F},P,\theta)$ 为相应的动力系统，其中 Ω 为包含所有序列 $\omega:=\{\omega_n,\ n\in\mathbb{Z}\}=\{(P_n,Q_n,R_n),\ n\in\mathbb{Z}\}$ 的空间, $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的 Borel σ-代数， P 表示 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度. 给定 P, 随机环境 ω 就是 Ω 空间中以 P 为概率分布的随机元. θ 为 Ω 上的推移算子，满足 $(\theta\omega)_n=\omega_{n+1}$, $n\in\mathbb{Z}$. 如果分布 P 在推移算子 θ 的作用下是平稳遍历的，则称环境是平稳遍历的.

带形 $S=\mathbb{Z}\times\mathscr{D}=\mathbb{Z}\times\{1,2,\cdots,d\}$ 上的随机游动记作 $\{X_n,\ n\in\mathbb{Z}\}$, 其中

$$X_n=(\xi_n,Y_n),\quad \xi_n\in\mathbb{Z},\ Y_n\in\mathscr{D},$$

ξ_n 为游动 $\{X_n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ 的 $\mathbb{Z}$-轴坐标， Y_n 取值于 $\mathscr{D}=\{1,2,\cdots,d\}$.

对于给定环境下带形上随机游动的初分布，定义 $\mathcal{M}_d$:

$$\mathcal{M}_d=\{(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}:\mu_\omega\ \text{为}\ \mathscr{D}=\{1,2,\cdots,d\}\ \text{上的概率测度向量}\}.$$

给定环境 $\omega\in\Omega$ 以及初分布 $\mu=\mu_\omega\in\mathcal{M}_d$, 可以定义取值于 $\mathbb{Z}\times\{1,2,\cdots,d\}$ 的带形上的随机游动 X_n. 令转移概率 $\mathfrak{Q}_\omega(z,z_1)$ 为

$$\mathfrak{Q}_\omega(z,z_1)=\begin{cases}P_n(i,j), & \text{若}\ z=(n,i),\ z_1=(n+1,j),\\ R_n(i,j), & \text{若}\ z=(n,i),\ z_1=(n,j),\\ Q_n(i,j), & \text{若}\ z=(n,i),\ z_1=(n-1,j),\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

初分布为

$$P_\omega^\mu(\xi_0=0,\ Y_0=z_0)=\mu_\omega(z_0),\quad \text{对任意}\ z_0\in\mathscr{D}.$$

显然， $\{X_n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ 为时间齐次马氏链.

对任意初始点 $x_0=(0,y_0)\in S$ 以及任意的 $\omega\in(\Omega,\mathscr{F},P)$, 定义 “quenched” 概率 P_ω^μ:

$$P_\omega^\mu(X_0=x_0,X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n):=\mu_\omega(y_0)\mathfrak{Q}_\omega(x_0,x_1)\mathfrak{Q}_\omega(x_1,x_2)\cdots\mathfrak{Q}_\omega(x_{n-1},x_n).$$

定义 $\big(\Omega\times(\mathbb{Z}\times\mathscr{D})^{\mathbb{N}},\mathscr{F}\times\mathscr{G}\big)$ 上的概率测度 $\mathbb{P}^\mu=P\otimes P_\omega^\mu$:

$$\mathbb{P}^\mu(F\times G)=\int_F P_\omega^\mu(G)P(\mathrm{d}\omega),\quad F\in\mathscr{F},\ G\in\mathscr{G}.$$

若取 $F=\Omega$, 则称 $\mathbb{P}^\mu$ 为 “annealed” 概率. 定义 $\mathbb{P}^\mu$ 所对应的期望为 $\mathbb{E}^\mu$, P_ω^μ 所对应的期望为 E_ω^μ. 涉及 P_ω^μ 和 $\mathbb{P}^\mu$ 的称谓分别称作 “quenched” 和 “annealed”.

记号和假设 在本文中，记 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^d$, $\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^d$. 对任意 $1\leqslant i\leqslant d$, 令 $\mathbf{e}_i=\big(0,\cdots,\underset{i}{\underline{1}},\cdots,0\big)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的第 i 个标准基向量. 分别定义向

量 $\mathbf{x}=(x_j)$ 和矩阵 $A=(a(i,j))$ 的范数为

$$\|\mathbf{x}\|:=\max_j|x_j|,\quad \|A\|:=\max_i\sum_j|a(i,j)|.$$

如果矩阵 A 中所有元素均满足 $a(i,j)>0$, 则称 A 为严格正的 (记作 $A>0$). 如果矩阵 A 中所有元素均满足 $a(i,j)\geqslant 0$, 则称 A 为非负的 (记作 $A\geqslant 0$). 若 $d\times d$ 维实值矩阵 A 是非负的，则有 $\|A\|=\|A\mathbf{1}\|$. 使用记号 I_A 来表示集合 A 的示性函数. 对随机游动 $X_n=(\xi_n,Y_n)$, 通常使用记号

$$\lim_{n\to\infty}X_n=+\infty,\quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

来表示当 $n\to\infty$ 时， ξ_n 趋向于 $+\infty$, $\mathbb{P}$-a.s.

令 $L_n:=\{(n,j),1\leqslant j\leqslant d\}$. 击中时 T_n 定义为当游动从点 $z\in L_0$ 出发时，首次到达第 n 列的时间. 令 $T_0=0$, 并且对 $n\geqslant 1$ 定义

$$T_n:=\inf\{t:X_t\in L_n\},\quad \tau_n:=T_n-T_{n-1}. \tag{1.1}$$

约定空集的下确界为 $+\infty$, 并且 $\infty-\infty=\infty$.

下述条件 C 最初由 Bolthausen 和 Goldshied 在文 [1] 中提出.

条件 C (C1) 动力系统 $(\Omega,\mathscr{F},P,\theta)$ 是遍历的.

(C2)

$$E\log(1-\|R_n+P_n\|)^{-1}<\infty,\quad E\log(1-\|R_n+Q_n\|)^{-1}<\infty.$$

(C3) 对任意的 $j\in\{1,2,\cdots,d\}$ 和任意的 n, 有

$$\sum_{i=1}^d Q_n(i,j)>0,\quad \sum_{i=1}^d P_n(i,j)>0,\quad P\text{-a.s.}$$

(C4) 以 P-正概率，第 0 列在一个互通类中 (其中 $z\sim z_1$ 表示 z_1 可达 z, 并且 z 可达 z_1.)

已知结果 首先回顾带形上随机环境中随机游动的一些已知结果.

(1) 常返暂留性.

首先，对任意 $a\in\mathbb{Z}$, 以及任意的随机矩阵 ρ, 对 $n\geqslant a$, 递归地定义矩阵 $\psi_n=\psi_{n,a,\rho}$. $\psi_a:=\rho$, 而对 $n>a$ 定义 $\psi_n:=(I-R_n-Q_n\psi_{n-1})^{-1}P_n$. 当条件 C 成立时，文 [1, 定理 1] 证明了 $d\times d$ 维矩阵 $\zeta_n:=\lim\limits_{a\to-\infty}\psi_{n,a,\rho}$ 存在，并且 $\{\zeta_n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ 是唯一满足以下方程的随机矩阵序列:

$$\zeta_n=(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}P_n,\quad P\text{-a.s.},\ n\in\mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

显然，扩大的序列 $\{(P_n,Q_n,R_n,\zeta_n),\ n\in\mathbb{Z}\}$ 是平稳遍历的.

令

$$A_n:=(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}Q_n,\quad \mathbf{u}_n:=(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}\mathbf{1}. \tag{1.3}$$

定义

$$\lambda^+:=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|A_nA_{n-1}\cdots A_1\|.$$

文 [1, 定理 2] 给出了游动 $X_n=(\xi_n,Y_n)$ 的常返暂留性判别准则. 其中一种情形是

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=+\infty,\quad \mathbb{P}\text{-a.s.}\quad \text{当且仅当}\quad \lambda^+<0.$$

(2) 逃逸概率.

令 $\eta_n(i,j)$ 表示从位置 (n,i) 出发, 到达负无穷之前先到第 $n+1$ 列, 并且落在点 $(n+1,j)$ 的概率. 我们通常称之为逃逸概率. 如果随机游动右暂留, 则有 $\eta_n=\zeta_n$, P-a.s.[2, (1.15)]. 如果条件 C 满足, 则对 P-a.s. ω, 有 $\zeta_n>0$. 在本文中, 我们仅研究带形上右暂留随机游动.

(3) 概率向量 $\mathbf{y}_n$ 构成的平稳序列.

在条件 C 满足的假设之下, 对 P-a.s. ω, 下述极限是存在的[2, 引理 1]:

$$\mathbf{y}_n:=\lim_{a\to-\infty}\mathbf{u}_a\zeta_a(\omega)\zeta_{a+1}(\omega)\cdots\zeta_n(\omega),\tag{1.4}$$

其中 $\mathbf{u}_a$ 为各元素 $u_a(i)$ 均非负的行向量, 并且满足 $\sum\limits_{i=1}^{d}u_a(i)=1$. 注意到序列 $\{\mathbf{y}_n\}$ 是在概率向量中满足 $\mathbf{y}_n=\mathbf{y}_{n-1}\zeta_n$ 的唯一解; $\mathbf{y}_n>0$; $\mathbf{y}_n$ 为 $\mathscr{D}$ 上的概率向量, 其支撑为整个 $\mathscr{D}$; 概率向量 $\mathbf{y}_n=\mathbf{y}(\omega_{\leqslant n})$ 构成平稳序列.

1.2 主要结果

假设对 P-a.s. ω, 游动 $X_n=(\xi_n,Y_n)$ 以初分布 μ_ω 从第 0 列出发, 其中 $\mu_\omega\in\mathcal{M}_d$, $\mu_\omega(i)=P_\omega^{\mu}(\xi_0=0,Y_0=i)$. 假设条件 C 成立. 并且假设 $\lambda^+<0$, 即随机游动右暂留, $X_n\to+\infty$, $\mathbb{P}$-a.s., 那么对任意的正整数 k $(k\geqslant1)$, 有 $T_k<\infty$, $\mathbb{P}$-a.s., 并且 $T_0=0$. 我们试图利用内蕴分枝结构精确计算首次击中时 $T_1=\inf\{n:\xi_n\in L_1\}$. 对任意的 $n\leqslant1$, 定义 $\mathbf{U}_n=(U_n^1,U_n^2,\cdots,U_n^d)$, 其中 U_n^i $(1\leqslant i\leqslant d)$ 为时间 T_1 之前, 从第 n 列跳到第 $n-1$ 列, 并且落在 $(n-1,i)$ 点的步数.

$\mathbf{Z}_n=(Z_n^1,Z_n^2,\cdots,Z_n^d)$, 其中 Z_n^i $(1\leqslant i\leqslant d)$ 为时间 T_1 之前, 从第 n 列跳到第 n 列, 并且落在 (n,i) 点的步数.

令

$$|\mathbf{U}_n|:=\sum_{i=1}^{d}U_n^i=\mathbf{U}_n\mathbf{1},\quad |\mathbf{Z}_n|:=\sum_{i=1}^{d}Z_n^i=\mathbf{Z}_n\mathbf{1}.\tag{1.5}$$

$\mathbf{U}_n$ 和 $\mathbf{Z}_n$ 可用以表示时间 T_1 之前游动的所有步数. 由于 $X_n\to+\infty$, $\mathbb{P}$-a.s., 故若游动从第 n 列 $(n\leqslant0)$ 向左跳了一步, 则它最终必定会从第 $n-1$ 列返回到第 n 列. 因此

$$T_1=1+\sum_{n\leqslant0}\big(2|\mathbf{U}_n|+|\mathbf{Z}_n|\big).$$

下述定理揭示了带形上随机环境中随机游动的内蕴分枝结构, 说明了 $\{|\mathbf{U}_n|,\ |\mathbf{Z}_n|,\ n\leqslant1\}$ 是非齐次的带移民的多物种分枝过程. 逃逸概率矩阵 η_n 在其中起了很重要的作用, 并且注意到当 $X_n\to+\infty$, $\mathbb{P}$-a.s. 时, 有 $\eta_n=\zeta_n$, P-a.s.[2, (1.15)], 其中 ζ_n 在 (1.2) 中定义.

定理 1.1 假设条件 C 成立, 并且 $X_n\to+\infty$, $\mathbb{P}$-a.s. 假设对 P-a.s. ω, 游动以初分布 μ_ω 从第 0 列出发, 则

(1) 带形上随机环境中随机游动内蕴分枝结构的分枝机制可表述为，对 P-a.s. ω, 对任意的 $n \leqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant d$, 有

$$\begin{aligned} & P_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n| = m,\ |\mathbf{Z}_n| = K \mid \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{e}_i) \\ & = \mathbf{e}_i \sum_{k_0+k_1+\cdots+k_m=K} R_n^{k_0} Q_n \zeta_{n-1} R_n^{k_1} \cdots Q_n \zeta_{n-1} R_n^{k_m} P_n \mathbf{1} \end{aligned} \tag{1.6}$$

或

$$\begin{aligned} & P_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n| = m,\ |\mathbf{Z}_n| = K \mid \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{e}_i) \\ & = \mathbf{e}_i \sum_{m_0+m_1+\cdots+m_K=m} (Q_n\zeta_{n-1})^{m_0} R_n (Q_n\zeta_{n-1})^{m_1} \cdots R_n (Q_n\zeta_{n-1})^{m_K} P_n \mathbf{1}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

其中 $\zeta_n = \eta_n$ 为逃逸概率矩阵，而 ζ_n 在 (1.2) 中定义.

(2) 对 P-a.s. ω, $\{|\mathbf{U}_n|,\ n \leqslant 1\}$ 和 $\{|\mathbf{Z}_n|,\ n \leqslant 1\}$ 为非齐次的带移民的多物种分枝过程. 对任意的 $n \leqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant d$, 其后代分布为

$$P_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n| = m \mid \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i[(I - R_n)^{-1} Q_n \zeta_{n-1}]^m (I - R_n)^{-1} P_n \mathbf{1}, \tag{1.8}$$

$$P_\omega^\mu(|\mathbf{Z}_n| = K \mid \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i[(I - Q_n\zeta_{n-1})^{-1} R_n]^K (I - Q_n\zeta_{n-1})^{-1} P_n \mathbf{1}, \tag{1.9}$$

其移民分布为

$$P_\omega^\mu(\mathbf{U}_1 = \mathbf{e}_i) = \mu_\omega(i), \quad i \in \mathscr{D}, \tag{1.10}$$

其中 $\zeta_n = \eta_n$ 为逃逸概率矩阵.

(3) 首次击中时 T_1 可表示为

$$T_1 = 1 + \sum_{n \leqslant 0} (2|\mathbf{U}_n| + |\mathbf{Z}_n|). \tag{1.11}$$

注 1.1　(1) 在定理 1.1 中，我们仅讨论时间 $t \in [0, T_1]$ 内游动的轨道. 游动的所有步数均可被记录于 $\{|\mathbf{U}_n|,\ |\mathbf{Z}_n|,\ n \leqslant 1\}$ 之中，游动的内蕴分枝结构有如 (1.6)–(1.7) 所述的分枝机制. 而 $\{|\mathbf{U}_n|,\ n \leqslant 1\}$ 和 $\{|\mathbf{Z}_n|,\ n \leqslant 1\}$ 为带移民 (分布为 (1.10)) 的多物种分枝过程，其后代分布分别为 (1.8) 和 (1.9). 在时间 T_1 之后，游动 $\{X_t\}$ 的轨道也有类似的结构. 比如说，当讨论时间 $t \in [T_1, T_2]$ 内游动的轨道时，游动的所有步数均可被记录于 $\{|\mathbf{U}_n|,\ |\mathbf{Z}_n|,\ n \leqslant 2\}$ 之中，对 $n \leqslant 1$, 分枝机制同样为 (1.6)–(1.7), $\{|\mathbf{U}_n|,\ n \leqslant 2\}$ 和 $\{|\mathbf{Z}_n|,\ n \leqslant 2\}$ 也同样是后代分布为 (1.8) 和 (1.9) 的带移民分枝过程，只是所带移民为 $P_\omega^\mu\big(\mathbf{U}_2 = \mathbf{e}_i\big) = \mathbf{y}_{T_1}(i)$. 我们可以继续对时间 $t \in [T_2, T_3]$, $t \in [T_3, T_4], \cdots$ 内游动的轨道进行讨论.

(2) 事实上，在揭示游动的内蕴分枝结构的过程中，基本想法是将游动的位置与分枝过程的时间相对应. 比如，在对时间 $t \in [T_k, T_{k+1}]$ 内游动的轨道片段进行分析时， $|\mathbf{U}_n|$ 作为游动从第 n 列到第 $n-1$ 列的步数可被看作分枝过程第 $(k-n+1)$ 代的后代数.

(3) 注意到在揭示内蕴分枝结构的 (1.6)–(1.9) 之中，其 “父亲” 和 “孩子” 是 “非对称” 的. 这是因为只有 “$\mathbf{U}$”-类型的粒子才会当 “父亲” 产生 “孩子”. 关于这一点可以这样理解：我们关注于 “孩子” 的个数.

借助于上述定理中所揭示的内蕴分枝结构，作为其应用之一，我们可以精确计算首次击中时均值 $\mathbb{E}T_1$.

定理 1.2 假设条件 C 成立，并且 $X_n \to +\infty$, $\mathbb{P}$-a.s. 假设对 P-a.s. ω, 游动以初分布 μ_ω 从第 0 列出发．则

$$\mathbb{E}T_1 = E(\mu_\omega(\mathbf{u}_0 + A_0\mathbf{u}_{-1} + \cdots + A_0A_{-1}\cdots A_{-k}\mathbf{u}_{-k-1} + \cdots)), \tag{1.12}$$

其中 $A_n, \mathbf{u}_n$ 在 (1.3) 中定义．

带形上随机游动内蕴分枝结构的另一个应用是给出了“站在粒子角度看环境”马氏链不变测度密度函数的精确表达．回顾文 [3] 中第 4 节的讨论．对 $n \geqslant 0$, 令 $\overline{\omega}_n = \theta^{\xi_n}\omega$. 考虑定义于 $(\Omega\times\mathscr{D}, \mathscr{F}\otimes\mathscr{H})$ 上的过程 $Z_n := (\overline{\omega}_n, Y_n)$, 其中 $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{D}$ 上所有子集的集合．假设对 P-a.s. ω, 游动以初分布 $\mu_\omega = \mathbf{y}_{-1}$ 从第 0 列出发，其中 $\mathbf{y}_{-1}$ 在 (1.4) 中定义．$\{Z_n,\ n \geqslant 0\}$ 是 $\mathbb{P}^\mu$ 之下的马氏链，其转移核为

$$K(\omega, i; B, j) = P_0(i,j)I_B(\theta\omega) + R_0(i,j)I_B(\omega) + Q_0(i,j)I_B(\theta^{-1}\omega).$$

通常称 $Z_n = (\overline{\omega}_n, Y_n)$ 为辅助马氏链．

当 $\mathbb{E}T_1 < \infty$ 时，令 $v_p = \frac{1}{\mathbb{E}T_1}$. 对任意的 $B \in \mathscr{F}$, 以及任意的 $i \in \mathscr{D}$, 定义 $(\Omega\times\mathscr{D}, \mathscr{F}\otimes\mathscr{H})$ 上的概率测度 Q 如下：

$$Q(B, i) := v_p\mathbb{E}\Big(\sum_{n=0}^{T_1-1} I_B(\overline{\omega}_n)I_{Y_n}(i)\Big), \tag{1.13}$$

则 $Q(\cdot)$ 为马氏转移核 K 下的不变测度[3, 性质 4.1].

现在定义一个 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的概率测度 $\overline{Q}(\cdot)$ 如下：

$$\overline{Q}(B) := Q(B, \mathscr{D}), \quad B \in \mathscr{F}.$$

对任意的 $B \in \mathscr{F}$, 定义 $Q_i(B) := Q(B, i)$, 则 $Q_i(\cdot)$ 和 $\overline{Q}(\cdot)$ 均关于 P 绝对连续[3, 性质 4.1]. 但文 [3] 中仅证明了 $\overline{Q}$ 关于 P 绝对连续密度函数的上界．本文利用内蕴分枝结构这一工具，在下述定理中完整地给出 Q_i 和 $\overline{Q}$ 关于 P 绝对连续密度函数的精确表达．

定理 1.3 假设条件 C 成立，并且 $X_n \to +\infty$, $\mathbb{P}$-a.s. 假设对 P-a.s. ω, 游动以初分布 $\mu_\omega = \mathbf{y}_{-1}$ 从第 0 列出发．另外假设 $v_p > 0$, 则 $Q_i(\cdot)$ 关于 P 绝对连续，并且 $\overline{Q}(\cdot)$ 也关于 P 绝对连续．其绝对连续不变测度的密度函数可分别显式表述为

$$\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}P} = \Lambda_\omega^{(i)}, \tag{1.14}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Lambda_\omega^{(i)} = v_p[\mu_\omega(\widetilde{u}_0 + \zeta_0A_1\widetilde{u}_0 + \zeta_0\zeta_1A_2A_1\widetilde{u}_0 + \cdots)](i);\\ &\frac{\mathrm{d}\overline{Q}}{\mathrm{d}P} = \Lambda_\omega,\end{aligned} \tag{1.15}$$

其中

$$\Lambda_\omega = v_p[\mu_\omega(\widetilde{u}_0 + \zeta_0A_1\widetilde{u}_0 + \zeta_0\zeta_1A_2A_1\widetilde{u}_0 + \cdots)]\mathbf{1},$$

这里 $\widetilde{u}_n := (I - Q_n\zeta_{n-1} - R_n)^{-1}$.

注 1.2 (1) 定理 1.3 的第 1 部分已在文 [3,性质4.1]中得到，这里仅关注“密度函数”这一部分．

(2) 可以用两种不同的方法证明游动的大数定律．方法 1, 如果令 $\mu_\omega = \mathbf{y}_{-1}$, 则 (1.1) 中所定义的 $\{\tau_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是一列平稳遍历随机变量序列[3, 引理3.2]. 因此，由遍历性定理，

再结合定理 1.2 中 $\mathbb{E}T_1$ 的显示表达，可很快得到大数定律．方法 2, 有 “密度函数” 这一工具，不难再次从 “站在粒子看环境” 的角度得到大数定律．其证明思想类似于对 $\mathbb{Z}$ 上紧邻随机环境中随机游动的证明[8]．这里省略证明的细节.

推论 1.1　假设条件 C 成立，并且 $X_n \to +\infty$, $\mathbb{P}$-a.s. 假设对 P-a.s. ω, 游动以初分布 $\mu_\omega = \mathbf{y}_{-1}$ 从第 0 列出发，并且假设 $v_p > 0$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{T_n}\\ &= \frac{1}{E\big(\mathbf{y}_{-1}(\mathbf{u}_0 + A_0\mathbf{u}_{-1} + \cdots + A_0A_{-1}\cdots A_{-k}\mathbf{u}_{-k-1} + \cdots)\big)}, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \qquad (1.16)\end{aligned}$$

2　主要结果的证明

2.1　内蕴分枝结构 — 定理 1.1 的证明

假设条件 C 成立，并且对 P-a.s. ω, 游动从第 0 列出发，其初始分布为 μ_ω, 其中 $\mu_\omega(i) = P_\omega^\mu(\xi_0 = 0, Y_0 = i)$, $1 \leqslant i \leqslant d$. 假设 $X_n \to +\infty$, $\mathbb{P}$-a.s., 则对任意的正整数 $k \geqslant 1$, 有 $T_k < \infty$, $\mathbb{P}$-a.s. 我们仅分析游动从第 0 列到第 1 列的第 1 个游程的轨道性质，也就是说，我们首先考虑游动 X_k 在 $k \in [0, T_1]$ 的轨道．对 $n \leqslant 0$, 定义

$$\begin{aligned}\alpha_{n,0} &= \min\{k \leqslant T_1:\ X_k \in L_n\},\\ \beta_{n,0} &= \min\{\alpha_{n,0} < k \leqslant T_1:\ X_{k-1} \in L_n,\ X_k \in L_{n-1}\}.\end{aligned}$$

对 $b \geqslant 1$, 定义

$$\begin{aligned}\alpha_{n,b} &= \min\{\beta_{n,b-1} < k \leqslant T_1:\ X_k \in L_n\},\\ \beta_{n,b} &= \min\{\alpha_{n,b} < k \leqslant T_1:\ X_{k-1} \in L_n,\ X_k \in L_{n-1}\}.\end{aligned}$$

约定空集的下确界为 $+\infty$.

称游动在时间区间 $[\beta_{n+1,b-1},\ \alpha_{n+1,b}]$ 内的轨道为游动从第 n 列到第 $n+1$ 列的第 b 个游程．对任意的 $b \geqslant 0$, $n \leqslant 0$ 和 $i \in \{1, 2, \cdots, d\}$, 定义

$$\begin{aligned}U_{n,b}^i &:= \sharp\{k \geqslant 0 : X_{k-1} \in L_n,\ X_k = (n-1, i),\ \beta_{n+1,b} < k < \alpha_{n+1,b+1}\},\\ Z_{n,b}^i &:= \sharp\{k \geqslant 0 : X_{k-1} \in L_n,\ X_k = (n, i),\ \beta_{n+1,b} < k < \alpha_{n+1,b+1}\},\end{aligned}$$

则 $U_{n,b}^i$ 为在从第 n 列到第 $n+1$ 列的第 $(b+1)$ 个游程中，游动从第 n 列跳到 $(n-1, i)$ 的步数；　$Z_{n,b}^i$ 为在相同游程中，游动从第 n 列跳到 (n, i) 的步数.

对任意的 $n \leqslant 0$ 和 $i \in \{1, 2, \cdots, d\}$, 定义 $U_n^i := \sum_{b\geqslant 0} U_{n,b}^i$, 则 U_n^i 为在时间 T_1 之前，从第 n 列跳到第 $n-1$ 列，并且落在 $(n-1, i)$ 的步数．我们可以同样定义 $Z_n^i := \sum_{b\geqslant 0} Z_{n,b}^i$. 令 $\mathbf{U}_n = (U_n^1, U_n^2, \cdots, U_n^d)$, $|\mathbf{U}_n| = \sum_{i=1}^d U_n^i = \mathbf{U}_n\mathbf{1}$, 以及 $\mathbf{Z}_n = (Z_n^1, Z_n^2, \cdots, Z_n^d)$, $|\mathbf{Z}_n| = \sum_{i=1}^d Z_n^i = \mathbf{Z}_n\mathbf{1}$, 其中 $\mathbf{U}_n$, $|\mathbf{U}_n|$ 以及 $\mathbf{Z}_n$, $|\mathbf{Z}_n|$ 的定义与 (1.5) 中的定义一致.

由马氏性知，对 P-a.s. ω, 对任意的 $n\leqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant d$, 有

$$\begin{aligned} &P_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n|=m,\ |\mathbf{Z}_n|=K\mid \mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{e}_i)\\ &=\mathbf{e}_i\sum_{k_0+k_1+\cdots+k_m=K}R_n^{k_0}Q_n\zeta_{n-1}R_n^{k_1}\cdots Q_n\zeta_{n-1}R_n^{k_m}P_n\mathbf{1}, \end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 $\zeta_n=\eta_n$ 为逃逸概率矩阵[2, (1.15)].

(2.1) 中所表述的游动的轨道是这样的：在给定 $\mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{e}_i$ 的条件下，游动从第 n 列出发，在第 n 列共跳了 $|\mathbf{Z}_n|=K$ 步 (每步跳的概率均为 R_n), 从第 n 列到第 $n-1$ 列跳动了 $|\mathbf{U}_n|=m$ 步 (但是从轨道的角度而言，每一个以概率 Q_n “向下跳” 的步子一定连接着一个以概率 ζ_{n-1} 从第 $n-1$ 列最终返回到第 n 列的轨道), 而最后一步是以概率 P_n 从第 n 列跳到第 $n+1$ 列.

(2.1) 所蕴含的思想是我们仅关注于 “孩子” 的数目，这导致了 “非对称性”. 注意到只有 “$\mathbf{U}$”-类型的粒子产生 “孩子”, 由类似的思想，分枝机制也可被表述为

$$\begin{aligned} &P_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n|=m,|\mathbf{Z}_n|=K\mid \mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{e}_i)\\ &=\mathbf{e}_i\sum_{m_0+m_1+\cdots+m_K=m}(Q_n\zeta_{n-1})^{m_0}R_n(Q_n\zeta_{n-1})^{m_1}\cdots R_n(Q_n\zeta_{n-1})^{m_K}P_n\mathbf{1}. \end{aligned}\tag{2.2}$$

下面将分别推导出 $|\mathbf{U}_n|$ 和 $|\mathbf{Z}_n|$ 的边际分布. 我们首先来讨论 $|\mathbf{U}_n|$ 的边际分布. 在 (2.1) 中对 K 求和，可得

$$\begin{aligned} &P_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n|=m\mid \mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{e}_i)\\ &=\sum_{K=0}^{+\infty}P_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n|=m,|\mathbf{Z}_n|=K|\mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{e}_i)\\ &=\mathbf{e}_i\Big[\sum_{K=0}^{+\infty}\sum_{k_0+k_1+\cdots+k_m=K}R_n^{k_0}Q_n\zeta_{n-1}R_n^{k_1}\cdots Q_n\zeta_{n-1}R_n^{k_m}P_n\mathbf{1}\Big]. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\sum_{K=0}^{+\infty}\sum_{k_0+k_1+\cdots+k_m=K}R_n^{k_0}Q_n\zeta_{n-1}R_n^{k_1}\cdots Q_n\zeta_{n-1}R_n^{k_m}\\ &=(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}(I-R_n)^{-1}\cdots Q_n\zeta_{n-1}(I-R_n)^{-1}\\ &=[(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^m(I-R_n)^{-1}, \end{aligned}$$

从而可推导出 $|\mathbf{U}_n|$ 的边际分布为

$$P_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n|=m\mid \mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{e}_i)=\mathbf{e}_i[(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^m(I-R_n)^{-1}P_n\mathbf{1}.$$

类似地，在 (2.2) 中，对 m 求和，可得到 $|\mathbf{Z}_n|$ 的边际分布

$$\begin{aligned} &P_\omega^\mu(|\mathbf{Z}_n|=K\mid \mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{e}_i)\\ &=\mathbf{e}_i\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{m_0+m_1+\cdots+m_K=m}(Q_n\zeta_{n-1})^{m_0}R_n(Q_n\zeta_{n-1})^{m_1}\cdots R_n(Q_n\zeta_{n-1})^{m_K}P_n\mathbf{1}\\ &=\mathbf{e}_i(I-Q_n\zeta_{n-1})^{-1}R_n(I-Q_n\zeta_{n-1})^{-1}\cdots R_n(I-Q_n\zeta_{n-1})^{-1}P_n\mathbf{1}\\ &=\mathbf{e}_i[(I-Q_n\zeta_{n-1})^{-1}R_n]^K(I-Q_n\zeta_{n-1})^{-1}P_n\mathbf{1}. \end{aligned}$$

从而完成了定理 1.1 中 (1)–(2) 的证明，而 (3) 的结论易得.

注 2.1 通过 (1.8) 所得到的 $|\mathbf{U}_n|$ 的边际分布，可以反过来检验定理 1.1 中所构造的分枝机制的正确性. 事实上,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{+\infty} P_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n| = m \mid \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{e}_i) \\
&= \mathbf{e}_i \Big[\sum_{m=0}^{+\infty} [(I - R_n)Q_n\zeta_{n-1}]^m \Big] (I - R_n)^{-1} P_n \mathbf{1} \\
&= \mathbf{e}_i [I - (I - R_n)Q_n\zeta_{n-1}]^{-1} (I - R_n)^{-1} P_n \mathbf{1} \\
&= \mathbf{e}_i [(I - R_n) - Q_n\zeta_{n-1}]^{-1} P_n \mathbf{1} \\
&= \mathbf{e}_i \zeta_n \mathbf{1} = 1.
\end{aligned}$$

2.2 $\mathbb{E}T_1$—定理 1.2 的证明

假设对 P-a.s. ω, 随机游动 $X_n = (\xi_n, Y_n)$ 从第 0 列以初分布 μ_ω 出发，其中 $\mu_\omega(i) = P_\omega^\mu(\xi_0 = 0, Y_0 = i)$, $1 \leqslant i \leqslant d$. 借助于得到的内蕴分枝结构，可以计算首次击中时 T_1 的均值 $\mathbb{E}T_1$. 我们分 4 步进行讨论.

第 1 步 计算 $E_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n| \mid \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{e}_i)$ 和 $E_\omega^\mu(|\mathbf{Z}_n| \mid \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{e}_i)$.

由定理 1.1 中的 (1.8) 知，对 P-a.s. ω, 对任意的 $n \leqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant d$, 有

$$\begin{aligned}
E_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n| \mid \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{e}_i) &= \sum_{m=0}^{+\infty} m P_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n| = m \mid \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{e}_i) \\
&= \mathbf{e}_i \sum_{m=1}^{+\infty} m[(I - R_n)^{-1} Q_n\zeta_{n-1}]^m (I - R_n)^{-1} P_n \mathbf{1}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

在计算过程中需要下述引理.

引理 2.1 如果 $I - B$ 是非退化矩阵，那么

$$\sum_{m=1}^{+\infty} mB^m = B(I - B)^{-2}.$$

证 由于

$$\sum_{m=1}^{+\infty} mB^m = (B + 2B^2 + 3B^3 + \cdots) = B(I + 2B + 3B^2 + \cdots),$$

并且

$$\begin{aligned}
(I - B)^{-2} = ((I - B)^{-1})^2 &= \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} B^m \Big)^2 = \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} B^m \Big) \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} B^m \Big) \\
&= (I + 2B + 3B^2 + 4B^3 \cdots).
\end{aligned}$$

因此可得

$$\sum_{m=1}^{+\infty} mB^m = B(I - B)^{-2}.$$

下面继续进行对定理 1.2 的证明. 在引理 2.1 中，令 $B=(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}$, 则 (2.3) 等于

$$\begin{aligned}&E_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n|\mid \mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{e}_i)\\&=\mathbf{e}_i(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}[I-(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^{-2}(I-R_n)^{-1}P_n\mathbf{1}\\&=\mathbf{e}_i(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}\zeta_n\mathbf{1}=\mathbf{e}_iA_n\mathbf{1},\end{aligned}\tag{2.4}$$

其中第 2 个等式是依据一系列关于矩阵的计算，其具体的计算过程详见附录， A_n，$\mathbf{u}_n$ 在 (1.3) 中定义.

通过类似的讨论可得

$$\begin{aligned}E_\omega^\mu(|\mathbf{Z}_n|\mid \mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{e}_i)&=\sum_{K=0}^{+\infty}\mathbf{e}_iK[(I-Q_n\zeta_{n-1})^{-1}R_n]^K(I-Q_n\zeta_{n-1})^{-1}P_n\mathbf{1}\\&=\mathbf{e}_i(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}R_n\zeta_n\mathbf{1}\\&=\mathbf{e}_i(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}R_n\mathbf{1},\end{aligned}$$

因此

$$E_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n|\mid \mathbf{U}_{n+1})=\mathbf{U}_{n+1}A_n\mathbf{1},\tag{2.5}$$

$$E_\omega(|\mathbf{Z}_n|\mid \mathbf{U}_{n+1})=\mathbf{U}_{n+1}(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}R_n\mathbf{1}.\tag{2.6}$$

第 2 步 计算访问第 n 列的步数 $|\mathbf{N}_n|$ 的均值 $E_\omega^\mu(|\mathbf{N}_n|)$.

对任意 $n\leqslant 0$, 定义

$$N_n^i=\sharp\{k\in[0,T_1):X_k=(n,i)\},\tag{2.7}$$

那么 N_n^i 是游动在时间 T_1 之前, 访问 (n,i) 的步数. 令 $\mathbf{N}_n:=(N_n^1,N_n^2,\cdots,N_n^d)$ 且 $|\mathbf{N}_n|:=\sum\limits_{i=1}^{d}N_n^i=\mathbf{N}_n\mathbf{1}$.

定义一个向量值随机变量 $\mathbf{U'}_n=(\mathbf{U'}_n^1,\mathbf{U'}_n^2,\cdots,\mathbf{U'}_n^d)$, 其中对任意 $1\leqslant i\leqslant d$, $\mathbf{U'}_n^i$ 为从第 $n-1$ 列跳到第 n 列，并且落在 (n,i) 的步数. 那么

$$|\mathbf{N}_n|=|\mathbf{U'}_n|+|\mathbf{Z}_n|+|\mathbf{U}_{n+1}|,\quad \mathbb{P}\text{-a.s.}\tag{2.8}$$

从另外一个角度看，有 $T_1=\sum\limits_{n\leqslant 0}(|\mathbf{N}_n|)$, $\mathbb{P}$-a.s. 注意到 $X_n\to+\infty$, $\mathbb{P}$-a.s. 如果对任意的 $n\leqslant 0$, 游动从任意第 n 列向左跳了一步到第 $n-1$ 列，那么游动最终一定会从第 $n-1$ 列跳回到第 n 列. 因此 $|\mathbf{U}_n|=|\mathbf{U'}_n|$, $\mathbb{P}$-a.s. 由 (2.8) 知

$$\begin{aligned}E_\omega^\mu(|\mathbf{N}_n|)&=E_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n|+|\mathbf{Z}_n|+|\mathbf{U}_{n+1}|)\\&=E_\omega^\mu[E_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n|\mid \mathbf{U}_{n+1})+E_\omega^\mu(|\mathbf{Z}_n|\mid \mathbf{U}_{n+1})+E_\omega^\mu(|\mathbf{U}_{n+1}|\mid \mathbf{U}_{n+1})].\end{aligned}$$

再根据 (2.5)–(2.6), 可以计算 $|\mathbf{N}_n|$ 在 “quenched” 意义下的期望 $E_\omega^\mu(|\mathbf{N}_n|)$:

$$\begin{aligned}E_\omega^\mu(|\mathbf{N}_n|)&=E_\omega^\mu[\mathbf{U}_{n+1}A_n\mathbf{1}+\mathbf{U}_{n+1}(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}R_n\mathbf{1}+\mathbf{U}_{n+1}\mathbf{1}]\\&=E_\omega^\mu[\mathbf{U}_{n+1}(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}(Q_n\zeta_{n-1}+R_n+I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)\mathbf{1}]\\&=E_\omega^\mu(\mathbf{U}_{n+1})\ (I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}\mathbf{1}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

第 3 步 计算 $E_\omega^\mu(\mathbf{U}_{n+1})$.

定义概率矩阵 B_m, 其中 $B_m(i,j)$ 为游动从 $(n+1,i)$ 出发，向左侧的第 n 列跳了至少 m 步，并且第 m 步正好落在 (n,j) 的概率.　$B_m(i,j)$ 可由定理 1.1 所揭示的内蕴分枝结构，得到

$$\begin{aligned}
&B_m(i,j)\\
&=\mathbf{e}_i\Big[\sum_{\overline{K}=0}^{+\infty}\sum_{k_0+k_1+\cdots+k_{m-1}=\overline{K}}R_{n+1}^{k_0}Q_{n+1}\zeta_nR_{n+1}^{k_1}Q_{n+1}\zeta_nR_{n+1}^{k_2}\cdots Q_{n+1}\zeta_nR_{n+1}^{k_{m-1}}Q_{n+1}\Big]\mathbf{e}_j\\
&=\mathbf{e}_i[(I-R_{n+1})Q_{n+1}\zeta_n]^{m-1}(I-R_{n+1})^{-1}Q_{n+1}\mathbf{e}_j. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

令 $\widetilde{P}_{i,j}^m:=B_m(i,j)-B_{m+1}(i,j)$, 那么 $\widetilde{P}_{i,j}^m$ 的概率意义为游动从 $(n+1,i)$ 出发，第 m 步是向左跳的，并且恰好落在 (n,j) 的概率，因此

$$E_\omega^\mu(U_{n+1}^j\mid\mathbf{U}_{n+2}=\mathbf{e}_i)=\sum_{m=1}^{+\infty}m\widetilde{P}_{i,j}^m=\mathbf{e}_i\sum_{m=1}^{+\infty}m(B_m-B_{m+1})\mathbf{e}_j=\mathbf{e}_i\sum_{m=1}^{+\infty}B_m\mathbf{e}_j.$$

由 (2.10) 知

$$\begin{aligned}
E_\omega^\mu(\mathbf{U}_{n+1}\mid\mathbf{U}_{n+2})&=\mathbf{U}_{n+2}\sum_{m=1}^{+\infty}B_m\\
&=\mathbf{U}_{n+2}\sum_{m=1}^{+\infty}[(I-R_{n+1})^{-1}Q_{n+1}\zeta_n]^{m-1}(I-R_{n+1})^{-1}Q_{n+1}\\
&=\mathbf{U}_{n+2}(I-Q_{n+1}\zeta_n-R_{n+1})^{-1}Q_{n+1}=\mathbf{U}_{n+2}A_{n+1}.
\end{aligned}$$

因此

$$E_\omega^\mu(\mathbf{U}_{n+1})=E_\omega^\mu[E_\omega^\mu(\mathbf{U}_{n+1}\mid\mathbf{U}_{n+2})]=E_\omega^\mu(\mathbf{U}_{n+2})A_{n+1}.$$

通过递推的方法，可得

$$\begin{aligned}
E_\omega^\mu(\mathbf{U}_{n+1})&=E_\omega^\mu(\mathbf{U}_{n+3})A_{n+2}A_{n+1}\\
&=\cdots\\
&=E_\omega^\mu(\mathbf{U}_1)A_0A_{-1}A_{-2}\cdots A_{n+2}A_{n+1}. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

第 4 步　计算 $\mathbb{E}(T_1)$.

注意到 $\mathbb{E}(T_1)=E(E_\omega(T_1))=E\big(\sum_{n\leqslant0}E_\omega(|\mathbf{N}_n|)\big)$. 由第 2 步中得到的 (2.9) 和第 3 步中得到的 (2.11), 可知

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_1)&=E\Big(\sum_{n\leqslant0}E_\omega(\mathbf{U}_{n+1})(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}\mathbf{1}\Big)\\
&=E\Big(\sum_{n\leqslant0}E_\omega(\mathbf{U}_1)A_0A_{-1}A_{-2}\cdots A_{n+2}A_{n+1}(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}\mathbf{1}\Big)\\
&=E(E_\omega^\mu(\mathbf{U}_1)(\mathbf{u}_0+A_0\mathbf{u}_{-1}+\cdots+A_0A_{-1}\cdots A_{-k}\mathbf{u}_{-k-1}+\cdots))\\
&=E(\mu_\omega(\mathbf{u}_0+A_0\mathbf{u}_{-1}+\cdots+A_0A_{-1}\cdots A_{-k}\mathbf{u}_{-k-1}+\cdots)),
\end{aligned}$$

其中 $A_n,\mathbf{u}_n$ 在 (1.3) 中定义.

因此定理 1.2 得证.

2.3 绝对连续不变测度的密度函数 — 定理 1.3 的证明

回顾文 [3] 中第 4 节关于过程 $\{Z_n,\ n\geqslant 0\}$ 的讨论. 从 "站在粒子看环境" 的角度, 对 $n\geqslant 0$, 令 $\overline{\omega}_n=\theta^{\xi_n}\omega$. 考虑定义于 $(\Omega\times\mathscr{D},\mathscr{F}\otimes\mathscr{H})$ 的过程 $Z_n:=(\overline{\omega}_n,Y_n)$, 其中 $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{D}$ 上所有子集的集合. 假设对 P-a.s. ω, 游动以初分布 $\mu_\omega=\mathbf{y}_{-1}$ 从第 0 列出发, 其中 $\mathbf{y}_{-1}$ 在 (1.4) 中定义, 假设游动右暂留. $\{Z_n,\ n\geqslant 0\}$ 是 $\mathbb{P}^\mu$ 之下的马氏链, 其转移核为

$$K(\omega,i;B,j)=P_0(i,j)I_B(\theta\omega)+R_0(i,j)I_B(\omega)+Q_0(i,j)I_B(\theta^{-1}\omega).$$

通常称 $Z_n=(\overline{\omega}_n,Y_n)$ 为辅助马氏链.

当 $\mathbb{E}T_1<\infty$ 时, 令 $v_p=\frac{1}{\mathbb{E}T_1}$. 对任意的 $B\in\mathscr{F}$, 以及任意的 $i\in\mathscr{D}$, 定义 $(\Omega\times\mathscr{D},\mathscr{F}\otimes\mathscr{H})$ 上的概率测度 Q 如下:

$$\begin{aligned}Q(B,i)&:=v_p\mathbb{E}\Big(\sum_{n=0}^{T_1-1}I_B(\overline{\omega}_n)I_{Y_n}(i)\Big)\\&=v_p\sum_{j\in\mathscr{D}}E_p\Big(\mu_\omega(j)E_\omega^j\Big(\sum_{n=0}^{T_1-1}I_B(\theta^{\xi_n}\omega)I_{Y_n}(i)\Big)\Big),\end{aligned}$$

则 $Q(\cdot)$ 为马氏转移核 K 下的不变测度[3, 性质 4.1].

现在定义 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一个概率测度 $\overline{Q}(\cdot)$ 如下:

$$\overline{Q}(B):=Q(B,\mathscr{D}),\quad B\in\mathscr{F}.$$

对任意的 $B\in\mathscr{F}$, 定义 $Q_i(B):=Q(B,i)$, 则 $Q_i(\cdot)$ 和 $\overline{Q}(\cdot)$ 均关于 P 绝对连续[3, 性质 4.1]. 但文 [3] 中仅证明了 $\overline{Q}$ 关于 P 绝对连续密度函数的上界. 这一节中将利用分枝结构这一工具, 在下文中完整地给出 Q_i 和 $\overline{Q}$ 关于 P 绝对连续密度函数的精确表达.

对任意的 $m\leqslant 0$ 和 $i\in\mathscr{D}$, N_m^i 的定义与 (2.7) 中的相同,

$$N_m^i=\{\sharp n\in[0,T_1):\xi_n=m,\ Y_n=i\}.$$

注意到对任意有界可测函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 和任意 $i\in\mathscr{D}$, 有

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\omega)Q(\mathrm{d}\omega,i)&=v_p\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}^\mu(f(\overline{\omega}_n);\ Y_n=i,\ T_1>n)\\&=v_p\sum_{m\leqslant 0}\mathbb{E}^\mu(f(\theta^m\omega)N_m^i)\\&=v_pE\Big(\sum_{k\in\mathscr{D}}\mu_\omega(k)\sum_{m\leqslant 0}(f(\theta^m\omega)E_\omega^kN_m^i)\Big)\\&=v_pE\Big(f(\omega)\sum_{k\in\mathscr{D}}\sum_{m\leqslant 0}\mu_{\theta^{-m}\omega}(k)E_{\theta^{-m}\omega}^kN_m^i\Big).\end{aligned}$$

因此, Q_i 关于 P 绝对连续, 并且 $\overline{Q}$ 也关于 P 绝对连续, 其密度函数分别为

$$\Lambda_\omega^{(i)}:=\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}P}=v_p\sum_{k\in\mathscr{D}}\sum_{m\leqslant 0}\mu_{\theta^{-m}\omega}(k)E_{\theta^{-m}\omega}^k(N_m^i),$$

$$\Lambda_\omega:=\frac{\mathrm{d}\overline{Q}}{\mathrm{d}P}=v_p\sum_{k\in\mathscr{D}}\sum_{m\leqslant 0}\mu_{\theta^{-m}\omega}(k)E_{\theta^{-m}\omega}^k(\mathbf{N}_m\mathbf{1}).$$

下面试图通过游动的内蕴分枝结构，分别给出密度函数 $\Lambda_\omega^{(i)}$ 和 Λ_ω 的显式表达．注意到对 P-a.s. ω, $\mu_\omega = \mathbf{y}_{-1}$, 并且 $\zeta_{-n} = \eta_{-n}$ 为逃逸概率．因此

$$\begin{aligned}\mu_{\theta\omega} &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{e}_i \zeta_{-n}(\theta\omega)\cdots\zeta_{-2}(\theta\omega)\zeta_{-1}(\theta\omega)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{e}_i \zeta_{-n+1}(\omega)\cdots\zeta_{-1}(\omega)\zeta_0(\omega)\\ &= \mu_\omega\zeta_0(\omega),\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{k\in\mathscr{D}} \mu_{\theta\omega}(k) E_{\theta\omega}^k(N_{-1}^i) = \sum_{k\in\mathscr{D}} \mu_{\theta\omega}(k) E_\omega^k(N_0^i) = \sum_{k\in\mathscr{D}} \mu_\omega\zeta_0(k) E_\omega^k(N_0^i).$$

通过类似的讨论可以证明对任意的 $m \leqslant 0$ 和 $i \in \mathscr{D}$, 有

$$\sum_{k\in\mathscr{D}} \mu_{\theta^{-m}\omega}(k) E_{\theta^{-m}\omega}^k(N_m^i) = \sum_{k\in\mathscr{D}} \mu_\omega\zeta_0\zeta_1\cdots\zeta_{-m-1}(k) E_\omega^k(N_0^i). \tag{2.12}$$

下述引理及其证明类似于定理 1.2 的证明的第 2 步和第 3 步.

引理 2.2　对任意的 $n < 0$,

$$E_\omega^\mu(\mathbf{N}_n) = \mu_\omega A_0 A_{-1}\cdots A_{n+1}\widetilde{u}_n, \tag{2.13}$$

其中 $\widetilde{u}_n := (I - Q_n\zeta_{n-1} - R_n)^{-1}$.

证　由 $\mathbf{N}_n$, $\mathbf{U}'_n$, $\mathbf{Z}_n$ 和 $\mathbf{U}_{n+1}$ 的定义可知

$$\mathbf{N}_n = \mathbf{U}'_n + \mathbf{Z}_n + \mathbf{U}_{n+1}.$$

借助于游动的内蕴分枝结构，通过类似于定理 1.2 的证明，可得

$$\begin{aligned}E_\omega^\mu(\mathbf{U}'_n) &= \mathbf{U}_{n+1}\sum_{m=1}^{+\infty}\big((I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}\big)^{m-1}(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}\\ &= \mathbf{U}_{n+1}(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1} = \mathbf{U}_{n+1}A_n\zeta_{n-1},\\ E_\omega^\mu(\mathbf{Z}_n) &= \mathbf{U}_{n+1}\sum_{K=0}^{+\infty}\big((I-Q_n\zeta_{n-1})^{-1}R_n\big)^K(I-Q_n\zeta_{n-1})^{-1}R_n\\ &= \mathbf{U}_{n+1}\big(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n\big)^{-1}R_n.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}E_\omega^\mu(\mathbf{N}_n \mid \mathbf{U}_{n+1}) &= E_\omega^\mu(\mathbf{N}_n \mid \mathbf{U}_{n+1})\\ &= E_\omega^\mu(\mathbf{U}'_n \mid \mathbf{U}_{n+1}) + E_\omega(\mathbf{Z}_n \mid \mathbf{U}_{n+1}) + E_\omega(\mathbf{U}_{n+1} \mid \mathbf{U}_{n+1})\\ &= E_\omega^\mu(\mathbf{U}_{n+1}[(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}\\ &\quad + (I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}R_n + I])\\ &= E_\omega^\mu(\mathbf{U}_{n+1})(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}.\end{aligned}$$

由于

$$E_\omega^\mu(\mathbf{U}_{n+1}) = \mathbf{U}_{n+2}A_{n+1},$$

于是

$$\begin{aligned}E_\omega^\mu(\mathbf{N}_n)&=\mu_\omega A_0A_{-1}\cdots A_{n+1}(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}\\&=\mu_\omega A_0A_{-1}\cdots A_{n+1}\widetilde{u}_n,\end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{u}_n=(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}.$$

由此证得引理 2.2.

由 (2.12) 和引理 2.2, 可知

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathscr{D}}\mu_{\theta^{-m}\omega}(k)E_{\theta^{-m}\omega}^k(N_m^i)&=\sum_{k\in\mathscr{D}}\mu_\omega\zeta_0\zeta_1\cdots\zeta_{-m-1}(k)E_\omega^k(N_0^i)\\&=\mu_\omega[\zeta_0\zeta_1\cdots\zeta_{-m-1}A_{-m}A_{-m-1}\cdots A_2A_1\widetilde{u}_0](i),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\Lambda_\omega^{(i)}=\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}P}&=v_p\sum_{k\in\mathscr{D}}\sum_{m\leqslant 0}\mu_{\theta^{-m}\omega}(k)E_{\theta^{-m}\omega}^k(N_m^i)\\&=v_p\sum_{m\leqslant 0}[\mu_\omega\zeta_0\zeta_1\cdots\zeta_{-m-1}A_{-m}A_{-m-1}\cdots A_2A_1\widetilde{u}_0](i)\\&=v_p[\mu_\omega(\widetilde{u}_0+\zeta_0A_1\widetilde{u}_0+\zeta_0\zeta_1A_2A_1\widetilde{u}_0+\cdots)](i)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overline{Q}}{\mathrm{d}P}=\Lambda_\omega&=v_p\sum_{k\in\mathscr{D}}\sum_{m\leqslant 0}\mu_{\theta^{-m}\omega}(k)E_{\theta^{-m}\omega}^k(\mathbf{N}_m\mathbf{1})\\&=v_p\sum_{m\leqslant 0}[\mu_\omega\zeta_0\zeta_1\cdots\zeta_{-m-1}A_{-m}A_{-m-1}\cdots A_2A_1\widetilde{u}_0]\mathbf{1}\\&=v_p[\mu_\omega(\widetilde{u}_0+\zeta_0A_1\widetilde{u}_0+\zeta_0\zeta_1A_2A_1\widetilde{u}_0+\cdots)]\mathbf{1}.\end{aligned}$$

从而可知定理成立.

3 附 录

(2.4) 需要一系列计算才可得到，下述为关于矩阵计算的细节：

$$\begin{aligned}&\mathbf{e_i}(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}[I-(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^{-2}(I-R_n)^{-1}P_n\mathbf{1}\\
=&\mathbf{e_i}(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}[I-(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^{-1}\\
&\cdot[I-(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^{-1}(I-R_n)^{-1}P_n\mathbf{1}\\
=&\mathbf{e_i}\{[I-(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}][(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^{-1}\}^{-1}[I-(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^{-1}\\
&\cdot(I-R_n)^{-1}P_n\mathbf{1}\\
=&\mathbf{e_i}\{[(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^{-1}-I\}^{-1}[I-(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^{-1}(I-R_n)^{-1}P_n\mathbf{1}\\
=&\mathbf{e_i}\{[I-(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}][[(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^{-1}-I]\}^{-1}(I-R_n)^{-1}P_n\mathbf{1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{e_i}\{(I-R_n)[I-(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}][[(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^{-1}-I]\}^{-1}P_n\mathbf{1}\\
&= \mathbf{e_i}\{[(I-R_n)-Q_n\zeta_{n-1}][[(I-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}]^{-1}-I]\}^{-1}P_n\mathbf{1}\\
&= \mathbf{e_i}\{[(I-R_n)-Q_n\zeta_{n-1}][(Q_n\zeta_{n-1})^{-1}(I-R_n)-I]\}^{-1}P_n\mathbf{1}\\
&= \mathbf{e_i}\{[(I-R_n)-Q_n\zeta_{n-1}][(Q_n\zeta_{n-1})^{-1}](I-R_n-Q_n\zeta_{n-1})\}^{-1}P_n\mathbf{1}\\
&= \mathbf{e_i}[(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)(Q_n\zeta_{n-1})^{-1}(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)]^{-1}P_n\mathbf{1}\\
&= \mathbf{e_i}(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}P_n\mathbf{1}\\
&= \mathbf{e_i}(I-Q_n\zeta_{n-1}-R_n)^{-1}Q_n\zeta_{n-1}\zeta_n\mathbf{1}\\
&= \mathbf{e_i}A_n\zeta_{n-1}\zeta_n\mathbf{1}\\
&= \mathbf{e_i}A_n\mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

致谢 作者在此感谢孙鸿雁、王华明、张琳、周珂关于此项研究的深入讨论和建议.

参 考 文 献

[1] Bolthausen E, Goldsheid I. Recurrence and transience of random walks in random environments on a strip [J]. *Commun Math Phys*, 2000, 214:429–447.

[2] Goldsheid I. Linear and sub-linear growth and the CLT for hitting times of a random walk in random environments on a strip [J]. *Prob Theory Relat Fields*, 2008, 141:471–511.

[3] Roitershtein A. Transient random walks on a strip in a random environment [J]. *Ann Prob*, 2008, 36:2354–2387.

[4] Bolthausen E, Goldsheid I. Lingering random walks in random environment on a strip [J]. *Commun Math Phys*, 2008, 278:253–288.

[5] Peterson J. Large deviations for random walk in a random environment on a strip [J]. *ALEA Lat Am J Prob Math Stat*, 2014, 11(1):1–41.

[6] Kesten H, Kozlov M V, Spitzer F. A limit law for random walk in a random environment [J]. *Comp Math*, 1975, 30:145–168.

[7] Dembo A, Peres Y, Zeitouni O. Tail estimates for one-dimensional random walk in random environment [J]. *Commun Math Phys*, 1996, 181:667–683.

[8] Zeitouni O. Random walks in random environment [M]. LNM 1837, J Picard (ed), Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004, 189–312.

[9] Greven A, den Hollander F. Large deviations for a random walk in random environment [J]. *Ann Prob*, 1994, 22:1381–1428.

[10] Ganterta N, Shi Z. Many visit to a single site by a transient random walk in random environment [J]. *Stoch Process Appl*, 2002, 99:159–176.

[11] Hong W M, Wang H M. Branching structure for a random walk in random environment with bounded jumps and its applications [J]. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 2013, 16(1):1350006 (14 pages).

[12] Hong W M, Zhang L. Branching structure for the transient $(1, R)$-random walk in random environment and its applications [J]. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 2010, 13:589–618.

[13] Hong W M, Wang H M. Intrinsic branching structure within random walk on $\mathbb{Z}$ [J]. *Theory Prob Appl*, 2014, 58(4):640–659.

The Intrinsic Branching Structure for the Random Walk on a Strip in a Random Environment

HONG Wenming[1] ZHANG Meijuan[2]

[1]School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China. E-mail: wmhong@bnu.edu.cn
[2]School of Statistics and Mathematics, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China. E-mail: zhangmeijuan1227@163.com

Abstract An intrinsic branching structure within the random walk on a strip in a random environment is revealed, which is a multi-type branching process with immigration. By the intrinsic branching structure, the authors give an explicit expression for the first hitting time. Two of its applications are obtained as follows. (1) Calculate the mean of the hitting time, and then give an explicit expression for the drift of the law of large numbers. (2) Use the branching structure to specify the density of the absolutely continuous invariant measure for the Markov chain of “environments viewed from the particle”. Then the law of large numbers are reproved by the method of “the environment viewed from particles”.

Keywords Branching structure, Random walk on a strip, Random environment, Hitting time, Invariant measure, Environments viewed from the particle

2000 MR Subject Classification 60J80, 60G50

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 37 No. 4, 2016
by ALLERTON PRESS, INC., USA