数 学 年 刊
2016, 37A(4):421–432
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2016.0035

非交换微分及可积系统的统一零曲率表示*

白永强[1]　付会娟[2]　裴　明[2]

提要 基于导数的微分在非交换几何、非交换规范理论和可积系统中都有十分重要的作用. 本文从一类基于导数的微分出发给出了联络和曲率形式. 利用这一理论, 作者给出了连续、半离散和离散可积系统的统一零曲率表示.

关键词 零曲率, 非交换微分, 可积性, 联络
MR (2000) 主题分类 46L87, 37K10
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2016)04-0421-12

1 引　言

非交换微分几何 [1–2] 和其它的非交换微分由于在弦理论、规范理论、量子场理论、黑格斯场模型、矩阵理论 [2–5] 等方面的许多应用而引起了大家的广泛兴趣. 联络和曲率理论是经典微分几何中的重要内容, 它们在规范场理论、广义相对论、可积系统中都起着重要的作用. 从数学的角度看, 自然界的力其实就是某种纤维丛的曲率. 近来, 这些理论都有了一些非交换形式 [1–2,4,6–15], 而这些非交换形式都和所考虑的微分具有紧密的联系. 这些非交换微分的理论基础都是 Koszul 在讨论微分几何时所用的代数方法 [16]. 一般情形下, 经典微分的非交换推广并不唯一, 实际上从交换形式向非交换形式的推广不是直接的. 在该推广过程中, 要考虑到具体例子和实际应用, 否则该形式只是格式上的一种推广, 而并无实际意义.

在文 [16] 中, Koszul 用交换的结合代数 $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{C}$-模和定义在这些模上的联络等代数形式描述了微分几何. 在经典微分几何应用中, $\mathcal{C}$ 是定义在流形上的光滑函数, $\mathcal{C}$-模是流形上光滑向量丛的截面, 经典微分几何具有的这些代数公式是非交换微分几何思想的起源.

在非交换几何中, 我们将交换的结合代数 $\mathcal{C}$ 更换为一个结合而不一定交换的代数 $\mathcal{A}$. 外微分 Ω 用一个定义在 $\mathcal{A}$ 上的微分来替换, 该微分带有一个微分算子 d, 并且满足: $\Omega^0 = \mathcal{A}$.

在文 [14] 中, 作者类似于连续时的情形给出了一种离散纤维丛、联络和曲率理论. 我们将说明该理论实际上是基于形变导数的非交换微分的一种具体实现, 并给出了一个更一般的微分-差分理论, 进而讨论这一理论在连续和离散可积系统中的应用.

本文的结构组成如下: 在第 2 节中, 简单综述了非交换微分几何理论. 在第 3–4 节中, 给出了非交换联络和曲率理论的一个具体实现. 在第 5 节中, 讨论这一理论在可积系统中的应用, 以 3 个重要的可积方程为例. 最后, 在第 6 节中, 给出一些结论和展望.

本文 2014 年 9 月 22 日收到, 2016 年 1 月 15 日收到修改稿.
[1]河南大学现代数学研究所, 河南　开封 475004; 河南大学数学与统计学院, 河南　开封 475004.
E-mail: byqiang2005@yeah.net
[2]河南大学数学与统计学院, 河南　开封 475004. E-mail: f06021020@163.com; pm@henu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 10801045) 和河南省科技厅项目 (No. 152300410062) 的资助.

2 非交换微分几何

在本节中，我们将简单综述非交换微分理论、本文所需的非交换微分性质. 具体细节可参看文 [15, 17–18].

2.1 结合代数 $\mathcal{A}$ 上的微分

设 $\mathcal{A}$ 是一个含有单位元 **1** 的结合复代数 (不一定交换), 记 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 为代数 $\mathcal{A}$ 的中心.

定义 2.1 代数 $\mathcal{A}$ 的导数向量空间为

$$\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \{\mathfrak{X} : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \mid \mathfrak{X} \text{ 是线性的，且满足 } \mathfrak{X}(ab) = \mathfrak{X}(a)b + a\mathfrak{X}(b)\}. \tag{2.1}$$

在李括号 $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]a = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}a - \mathfrak{Y}\mathfrak{X}a$ 下， $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ 构成一个李代数. 在乘积 $(b\mathfrak{X})a = b(\mathfrak{X}a)$, $b \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 下， $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ 是一个 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-模.

由该定义以及空间 $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ 的性质，可得代数 $\mathcal{A}$ 上的分次微分.

记 $\underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ 为从 $\mathrm{Der}(\mathcal{A})^n = \underbrace{\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \times \cdots \times \mathrm{Der}(\mathcal{A})}_{n\ \text{个}}$ 到 $\mathcal{A}$ 的 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-多重反对称线性映射构成的集合，其中 $\underline{\Omega}^0_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, 并记

$$\underline{\Omega}^\bullet_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}), \tag{2.2}$$

则在以下外乘定义下：

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta)(\mathfrak{X}_1, \cdots, \mathfrak{X}_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} &(-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} \omega(\mathfrak{X}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathfrak{X}_{\sigma(p)}) \\ &\cdot \eta(\mathfrak{X}_{\sigma(p+1)}, \cdots, \mathfrak{X}_{\sigma(p+q)}),\end{aligned} \tag{2.3}$$

空间 $\underline{\Omega}^\bullet_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ 构成一个 $\mathbb{N}$-分次代数.

定义 2.2 设 $(\underline{\Omega}^\bullet_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}), \wedge)$ 为一个分次代数，满足 $\underline{\Omega}^0_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, 类似于 Koszul 的公式定义其上的微分算子 d,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(\mathfrak{X}_1, \cdots, \mathfrak{X}_{n+1}) = &\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \mathfrak{X}_i \omega(\mathfrak{X}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{X}}_i, \cdots, \mathfrak{X}_{n+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_j], \cdots, \widehat{\mathfrak{X}}_i, \cdots, \widehat{\mathfrak{X}}_j, \cdots, \mathfrak{X}_{n+1}),\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $\widehat{\mathfrak{X}}_i$ 表示将第 i 个元 $\mathfrak{X}_i$ 去掉.

由这一定义可知算子 d 的度为 1, 且可以得到代数 $\mathcal{A}$ 上的微分 $(\underline{\Omega}^\bullet_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}), \mathrm{d})$.

2.2 非交换联络和曲率

非交换联络论实质上依赖于基于导数的微分，形式上与正常的联络十分相似. 每一种联络论依赖结合代数上的模，一般情形下，我们考虑左、右投射模或者双模.

定义 2.3 设 $\mathcal{A}$ 是一个结合代数， $(\underline{\Omega}^\bullet_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}), \mathrm{d})$ 是定义在 $\mathcal{A}$ 上的微分， $\mathcal{M}$ 为一个左 $\mathcal{A}$-模，则定义 $\mathcal{M}$ 上的一个左 Ω-联络为一个线性映射

$$\mathcal{D} : \mathcal{M} \to \underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$$

满足

$$\mathcal{D}(am)=a\mathcal{D}(m)+\mathrm{d}(a)\otimes_{\mathcal{A}} m \tag{2.5}$$

对任意的 $a\in\mathcal{A},\ m\in\mathcal{M}$ 成立.

我们可以定义

$$\mathcal{D}(\omega\otimes_{\mathcal{A}} m)=(-1)^n\omega\mathcal{D}(m)+\mathrm{d}(\omega)\otimes_{\mathcal{A}} m,\quad \omega\in\underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}),\ m\in\mathcal{M}, \tag{2.6}$$

而将 $\mathcal{D}$ 扩充到 $\underline{\Omega}^\bullet_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$.

定义 2.4 联络 $\mathcal{D}$ 的曲率为 $\mathcal{D}^2$ 在 $\mathcal{M}$ 上的限制：

$$\mathcal{D}^2:\mathcal{M}\to\underline{\Omega}^2_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}. \tag{2.7}$$

在非交换的情形下，也可以定义双模联络[15,17].

定义 2.5 $\mathcal{A}$-双模 $\mathcal{M}$ 上的一个双模联络是一个三元组 $(\mathcal{M},\mathcal{D},\sigma)$, 其中 $\mathcal{D}:\mathcal{M}\to\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$ 是一个左 $\mathcal{A}$-联络， $\sigma:\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{A}}\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})\to\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$ 是一个满足性质

$$\mathcal{D}(ma)=\mathcal{D}(m)a+\sigma(m\otimes da),\quad \forall m\in\mathcal{M},\ a\in\mathcal{A} \tag{2.8}$$

的双模映射.

3　代数 $C^\infty(L^p\times\mathbb{R}^q)$ 上的具体实现

在本节中，将给出第 2 节中所讨论的基于导数的非交换联络和曲率论的一个具体实现. 记 L^p 为 p 维单位等距格子空间，考虑代数 $\mathcal{A}=C^\infty(L^p\times\mathbb{R}^q)$.

3.1　对应的 N-分次代数 $\Omega^\bullet$

记 N 为半离散空间 $N=L^p\times\mathbb{R}^q$, 其中 L^p 是 p 维格子空间， $\mathbb{R}^q$ 是 q 维欧式空间. 为方便起见，记 N 为

$$N=L^p\times\mathbb{R}^q=\{(\vec{n},\vec{x})=(n^1,\cdots,n^p,x^1,\cdots,x^q)\mid n^\mu\in\mathbb{Z},\ x^i\in\mathbb{R},1\leqslant\mu\leqslant p,1\leqslant i\leqslant q\},$$

$$\mathcal{A}=C^\infty(N)=C^\infty(L^p\times\mathbb{R}^q).$$

定义 3.1 代数 $\mathcal{A}$ 中任意一个函数 $f(\vec{n},\vec{x})\in\mathcal{A}$, 其沿 μ-方向 $(1\leqslant\mu\leqslant p)$ 的差分为

$$\triangle_\mu f(\vec{n},\vec{x})=(E_\mu-\mathrm{id})f, \tag{3.1}$$

其中 E_μ 是沿 μ-方向的前移位算子

$$E_\mu f(\vec{n},\vec{x})=f(\vec{n}+\widehat{\mu},\vec{x}),\quad \widehat{\mu}=(\underbrace{0,\cdots,\overbrace{1}^{\mu},\cdots,0}_{p}). \tag{3.2}$$

类似于连续情形，可以定义半离散情形时的微分形式和外微分算子.

定义 3.2 设 $(\vec{n},\vec{x})$ 为半离散空间 $N=L^p\times\mathbb{R}^q$ 中任意一点， Δ_μ 是以上定义的差分算子， ∂_i 是通常的微分算子. 点 $(\vec{n},\vec{x})$ 上的切空间 $T_{(\vec{n},\vec{x})}(N)$ 为

$$T_{(\vec{n},\vec{x})}(N)=\mathrm{Span}\{\Delta_1,\cdots,\Delta_p,\partial_1,\cdots,\partial_q\}.$$

注 3.1 对于 $N=L^p\times\mathbb{R}^q$ 中任意两个函数 $f(\vec{n},\vec{x})$, $g(\vec{n},\vec{x})$, 切空间 $T_{(\vec{n},\vec{x})}(N)$ 的生成元 ∂_i,Δ_μ 具有下列性质：

$$\partial_i(fg)=\partial_i(f)g+f\partial_i(g),\quad i=1,\cdots,q, \tag{3.3}$$

$$\Delta_\mu(fg)=\Delta_\mu(f)E_\mu g+f\Delta_\mu(g),\quad \mu=1,\cdots,p. \tag{3.4}$$

由 (3.4) 可知，切空间或导数空间是形变的．生成元 ∂_i 遵循莱布尼兹公式，而生成元 Δ_μ 却遵循一个形变的莱布尼兹公式.

定义 3.3 点 $(\vec{n},\vec{x})$ 上的余切空间 $T^*_{(\vec{n},\vec{x})}(N)$ 为切空间 $T_{(\vec{n},\vec{x})}(N)$ 的对偶空间,

$$T^*_{(\vec{n},\vec{x})}(N)=\mathrm{Span}\{\mathrm{d}n^1,\cdots,\mathrm{d}n^\mu,\cdots,\mathrm{d}n^p,\mathrm{d}x^1,\cdots,\mathrm{d}x^i,\cdots,\mathrm{d}x^q\},$$

满足下列性质：

$$\begin{cases}\langle \mathrm{d}n^\mu,\Delta_\nu\rangle=\delta^\mu_\nu,\\ \langle \mathrm{d}n^\mu,\partial_j\rangle=0,\\ \langle \mathrm{d}x^j,\Delta_\mu\rangle=0,\\ \langle \mathrm{d}x^j,\partial_i\rangle=\delta^j_i,\\ \mathrm{d}n^\mu\wedge\mathrm{d}n^\mu=0,\\ \mathrm{d}n^\mu\wedge\mathrm{d}n^\nu=-\mathrm{d}n^\nu\wedge\mathrm{d}n^\mu,\quad \mu\neq\nu,\\ \mathrm{d}n^\mu\wedge\mathrm{d}x^i=-\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}n^\mu,\\ \mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^i=0,\\ \mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j=-\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i,\quad i\neq j,\\ [\mathrm{d}x^i,f(\vec{n},\vec{x})]=0,\quad i=1,\cdots,q,\\ [\mathrm{d}n^\mu,f(\vec{n},\vec{x})]=\triangle_\mu f(\vec{n},\vec{x})\mathrm{d}n^\mu,\quad \mu=1,\cdots,p.\end{cases} \tag{3.5}$$

由此定义 $N=L^p\times\mathbb{R}^q$ 上的切丛和余切丛分别为

$$T(N):=\bigcup_{(\vec{n},\vec{x})\in N}T_{(\vec{n},\vec{x})}(N) \tag{3.6}$$

和

$$T^*(N):=\bigcup_{(\vec{n},\vec{x})\in N}T^*_{(\vec{n},\vec{x})}(N). \tag{3.7}$$

由 (3.5) 可知, 左 $\mathcal{A}$-模 Ω^* 和右 $\mathcal{A}$-模 Ω^* 是不同的, 我们将仅考虑左 $\mathcal{A}$-模 Ω^*. 然而, 当基空间 $N=L^p\times\mathbb{R}^q$, 代数 $\mathcal{A}=C^\infty(N)$ 时, 代数的中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 为自己本身, 即 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})=\mathcal{A}$. 如果用 $\Omega^*_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ 来记 $\underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ 在零次时由 $\mathcal{A}$ 生成的子分次微分代数，则 $\Omega^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ 中任意元是形如微分 $f\mathrm{d}n^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}n^p\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^q$, $p+q=n$, $f\in C^\infty(N)$ 之和的形式．在这一情形下，可得 $\Omega^*_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})=\underline{\Omega}^*_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})=\Omega^*(\mathcal{A})$.

由此可以在 $T^*(N)$ 上构造整体微分代数 $\Omega^*=\bigoplus\limits_{m\in Z}\Omega^m$, 其生成元为

$$\underbrace{1}_{0\text{-形式}},\underbrace{\mathrm{d}n^\mu,\mathrm{d}x^i}_{1\text{-形式}},\underbrace{\mathrm{d}n^\mu\wedge\mathrm{d}n^\nu,\mathrm{d}n^\mu\wedge\mathrm{d}x^i,\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j}_{2\text{-形式}},\cdots,\underbrace{\mathrm{d}n^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}n^p\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^q}_{(p+q)\text{-形式}}.$$

如果 $\omega\in\Omega^r(\mathcal{A})$ 是一个 r-形式 $(0\leqslant r\leqslant p+q)$, 则 ω 可写作

$$\begin{aligned}\omega=&\sum_{\substack{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k i_1 i_2\cdots i_l\\ k\leqslant p,l\leqslant q,k+l=r}}f_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k i_1 i_2\cdots i_l}(\vec{n},\vec{x})\\ &\cdot\mathrm{d}n^{\mu_1}\wedge\mathrm{d}n^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}n^{\mu_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_l}.\end{aligned}$$

为方便起见，将 ω 简记为

$$\omega=\sum_{IJ} f_{IJ}\mathrm{d}n^I\wedge \mathrm{d}x^J.$$

现定义半离散的微分算子 d 如下，由此可得 $\Omega^*(\mathcal{A})$ 构成一个分次微分代数.

定义 3.4 对于微分代数 $\Omega^*(\mathcal{A})$, 其上的半离散微分算子 d 为

$$\mathrm{d}:\Omega^r(\mathcal{A})\to\Omega^{r+1}(\mathcal{A}).$$

(1) 若 $f(\vec{n},\vec{x})\in\Omega^0(\mathcal{A})=\mathcal{A}$, 则 $\mathrm{d}f=\mathrm{d}_Df+\mathrm{d}_Cf$, 其中的 d_Df, d_Cf 分别定义为

$$\mathrm{d}_Df=\sum_{\mu=1}^{p}\Delta_\mu f\mathrm{d}n^\mu,$$

$$\mathrm{d}_Cf=\sum_{i=1}^{q}\partial_i f\mathrm{d}x^i.$$

(2) 若

$$\omega=\sum_{IJ} f_{IJ}\chi^I\wedge \mathrm{d}x^J\in\Omega^r(\mathcal{A}),$$

则

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{IJ}\mathrm{d}f_{IJ}\wedge\chi^I\wedge\mathrm{d}x^J. \tag{3.8}$$

为方便起见，分别称 $\mathrm{d}_D,\mathrm{d}_C$ 为离散和连续微分算子. 易知半离散的微分算子 d 是离散微分算子 d_D 和连续微分算子 d_C 之和，即

$$\mathrm{d}=\mathrm{d}_D+\mathrm{d}_C. \tag{3.9}$$

由此可得

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}n^\mu)=0,\quad \mathrm{d}(\mathrm{d}x^j)=0.$$

命题 3.1 若 d 是一个半离散微分算子，则它具有下列性质：

(1) $\mathrm{d}(\omega\wedge\tau)=(\mathrm{d}\omega)\wedge\tau+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge d\tau$,

(2) $\mathrm{d}^2=0$,

(3) $(\mathrm{d}f)(v)=v(f),\ \forall f\in\Omega^0(\mathcal{A}),\ v\in T(N)$.

显然 $\Omega^*(\mathcal{A})$ 是一个分次微分代数，可以表示为

$$\Omega^*(\mathcal{A})=\bigoplus_{r=0}^{p+q}\Omega^r(\mathcal{A}),$$

其中 $\Omega^r(\mathcal{A})$ 是由定义在 $L^p\times\mathbb{R}^q$ 上的 r-形式构成， $\Omega^0(\mathcal{A})=\mathcal{A}$.

3.2 半离散复形及其正和性

类似于连续情形，在半离散空间 $N=L^p\times\mathbb{R}^q$ 中，仍然可以得到一个正和复形.

命题 3.2 复形

$$0\to\mathbb{R}\xrightarrow{\mathrm{i}}\Omega^0(\mathcal{A})\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^1(\mathcal{A})\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^2(\mathcal{A})\xrightarrow{\mathrm{d}}\cdots\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^{p+q}(\mathcal{A})\to 0$$

是正和的.

证 详见文 [19–21].

4 非交换半离散联络和曲率

本节将用文 [14] 中类似的记号得到半离散的丛、联络和曲率.

4.1 半离散丛和截面

如果 $(P,\mathfrak{p},M,G)$ 是一个定义在 $(p+q)$-维基流形 M, 结构群为 G 的主 G-丛. 假设基流形 M 被离散化为 $M\simeq N=L^p\times\mathbb{R}^q$, 则对于 N 中任意一点 $(\vec{n},\vec{x})$, 对应的纤维 $\mathfrak{p}^{-1}(\vec{n},\vec{x})$ 同构于结构群 G. 半离散主丛 $Q(N,G)$ 定义为所有这些纤维的并

$$Q(N,G)=\bigcup_{(\vec{n},\vec{x})\in N}\mathfrak{p}^{-1}(\vec{n},\vec{x}).\tag{4.1}$$

如果结构群 G 是一个线性矩阵群 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$, 可得到伴随向量丛 $V=V(N,\mathbb{R}^m,\mathrm{GL}(m,\mathbb{R}))$. 此时, 对于 N 中任意一点 $(\vec{n},\vec{x})$, 对应纤维 $F_{(\vec{n},\vec{x})}=\mathfrak{p}^{-1}(\vec{n},\vec{x})$ 同构与线性空间 $\mathbb{R}^m$, 且 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ 右作用于它. 半离散向量丛 $V(N,\mathrm{GL}(m,\mathbb{R}))$ 定义为

$$V(N,\mathrm{GL}(m,\mathbb{R}))=\bigcup_{(\vec{n},\vec{x})\in N}\mathfrak{p}^{-1}(\vec{n},\vec{x}).\tag{4.2}$$

半离散主丛上的半离散截面是如下的一个映射 s:

$$s:N=L^p\times\mathbb{R}^q=\{(\vec{n},\vec{x})\}\to Q(N,G),\quad s(\vec{n},\vec{x})\in G.\tag{4.3}$$

类似地, 半离散向量丛上的一个半离散截面 s 为如下映射:

$$s:N=L^p\times\mathbb{R}^q=\{(\vec{n},\vec{x})\}\to V(N,\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})),\quad s(\vec{n},\vec{x})\in\mathbb{R}^m.\tag{4.4}$$

分别用 $\Gamma(Q)$ 和 $\Gamma(V)$ 记主丛和向量丛上的截面集.

在第 3.1 节中定义的切丛和余切丛是空间 $N=L^p\times\mathbb{R}^q$ 上两个半离散向量丛的例子. 余切丛 T^*N 在以后定义联络和曲率时将起着十分重要的作用.

4.2 非交换半离散联络

定义 4.1 一个左 $\mathcal{A}$-模差分-微分联络或协变差分-微分导数是如下的一个线性映射:

$$\mathcal{D}:\Gamma(V)\to\Gamma(T^*N)\otimes\Gamma(V),\tag{4.5}$$

满足下列性质:

$$\mathcal{D}(s_1+s_2)=\mathcal{D}(s_1)+\mathcal{D}(s_2),\tag{4.6}$$

$$\mathcal{D}(fs)=f\mathcal{D}s+\mathrm{d}f\otimes\mathcal{D}s,\tag{4.7}$$

对于任意 $s,s_1,s_2\in\Gamma(V),f\in\mathcal{A}=C^\infty(N)$ 成立.

我们将局部地考虑所有的几何量. 设 $\{s_\alpha,1\leqslant\alpha\leqslant m\}$ 是线性空间 $\Gamma(V)$ 的基, 则 $\{\mathrm{d}n^\mu\otimes s_\alpha,\mathrm{d}x^i\otimes s_\beta,1\leqslant\mu\leqslant p,1\leqslant i\leqslant q,1\leqslant\alpha,\beta\leqslant m\}$ 为截面空间 $\Gamma(T^*N)\otimes\Gamma(V)$ 的一组基. 因此左 $\mathcal{A}$-模协变差分-微分算子局部可写作

$$\mathcal{D}(s_\alpha)=-(B_{D,\mu})_\alpha^\beta\mathrm{d}n^\mu\otimes s_\beta-(B_{C,i})_\alpha^\gamma\mathrm{d}x^i\otimes s_\gamma.\tag{4.8}$$

在重复上下指标时, 我们使用爱因斯坦求和约定. 以上的系数 $B_{D,\mu}, B_{C,i}$ 都是矩阵取值, $B = B_{D,\mu}\mathrm{d}n^\mu + B_{C,i}\mathrm{d}x^i$ 是半离散联络 1-形式, 作为文 [14] 的一个推广. 特别地, 系数 $B_{D,\mu}$ 定义在环路 $(\vec{n},\vec{x}) \leftrightarrow (\vec{n}+\widehat{\mu},\vec{x})$ 上, 且可被写作

$$B_{D,\mu}((\vec{n},\vec{x}),(\vec{n}+\widehat{\mu},\vec{x})), \tag{4.9}$$

或简记为

$$B_{D,\mu}(\vec{n},\vec{n}+\widehat{\mu},\vec{x}). \tag{4.10}$$

对于任意截面 $s = f^\alpha s_\alpha$, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{D}s &= \mathrm{d}f^\alpha \otimes s_\alpha + f^\alpha \mathcal{D}s_\alpha \\ &= (\mathrm{d}_D + \mathrm{d}_C)f^\alpha \otimes s_\alpha + f^\alpha[-(B_{D,\mu})^\beta_\alpha \mathrm{d}n^\mu \otimes s_\beta - (B_{C,i})^\gamma_\alpha \mathrm{d}x^i \otimes s_\gamma], \\ &= \Delta_\mu f^\alpha \mathrm{d}n^\mu \otimes s_\alpha + \partial_i f^\alpha \mathrm{d}x^i \otimes s_\alpha \\ &\quad - f^\alpha (B_{D,\mu})^\beta_\alpha \mathrm{d}n^\mu \otimes s_\beta - f^\alpha (B_{C,i})^\gamma_\alpha \mathrm{d}x^i \otimes s_\gamma \\ &= (\Delta_\mu f^\beta - f^\alpha (B_{D,\mu})^\beta_\alpha)\mathrm{d}n^\mu \otimes s_\beta + (\partial_i f^\beta - f^\alpha (B_{C,i})^\beta_\alpha)\mathrm{d}x^i \otimes s_\beta \\ &= \mathcal{D}_{D_\mu} f^\beta \mathrm{d}n^\mu \otimes s_\beta + \mathcal{D}_{C_i} f^\beta \mathrm{d}x^i \otimes s_\beta.\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 $\mathcal{D}_{D_\mu} f^\beta$ 和 $\mathcal{D}_{C_i} f^\beta$ 分别为

$$\mathcal{D}_{D_\mu} f^\beta = \Delta_\mu f^\beta - f^\alpha (B_{D,\mu})^\beta_\alpha \tag{4.12}$$

和

$$\mathcal{D}_{C_i} f^\beta = \partial_i f^\beta - f^\alpha (B_{C,i})^\beta_\alpha, \tag{4.13}$$

它们分别是向量 f^α 的离散和连续协变导数. 类似地, 可得向量 f^α 的半离散外协变导数为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}f^\beta &= \mathcal{D}_{D_\mu} f^\beta \mathrm{d}n^\mu + \mathcal{D}_{C_i} f^\beta \mathrm{d}x^i \\ &= (\Delta_\mu f^\beta - f^\alpha (B_{D,\mu})^\beta_\alpha)\mathrm{d}n^\mu + (\partial_i f^\beta - f^\alpha (B_{C,i})^\beta_\alpha)\mathrm{d}x^i.\end{aligned} \tag{4.14}$$

此时也可以考虑 $\mathcal{A}$-双模 $\Gamma(V)$ 上的双模联络.

命题 4.1 若 $\sigma: \Gamma(V)\otimes\Gamma(T^*N) \to \Gamma(T^*N)\otimes\Gamma(V)$ 是一个 $\mathcal{A}$ 双模映射且满足下列性质:

$$\sigma(s_\alpha \otimes \mathrm{d}f^\alpha) = \mathrm{d}f^\alpha \otimes s_\alpha + \Delta_\mu f^\beta (B_{D,\mu})^\alpha_\beta \mathrm{d}n^\mu \otimes s_\alpha,$$

$\mathcal{D}: \Gamma(V) \to \Gamma(T^*N)\otimes\Gamma(V)$ 是一个左 $\mathcal{A}$-模联络, 则 $(\Gamma(V),\mathcal{D},\sigma)$ 是一个 $\mathcal{A}$-双模 $\Gamma(V)$ 上的双模联络.

证 设 $\{s_\alpha, 1 \leqslant \alpha \leqslant m\}$ 为线性空间 $\Gamma(V)$ 的一组基, $f^\alpha \in \mathcal{A}$, 则有

$$\begin{aligned}\sigma(s_\alpha \otimes \mathrm{d}f^\alpha) &= \mathrm{d}f^\alpha \otimes s_\alpha + \Delta_\mu f^\beta (B_{D,\mu})^\alpha_\beta \mathrm{d}n^\mu \otimes s_\alpha \\ &= [\Delta_\mu f^\beta \mathrm{d}n^\mu + \partial_i f^\beta \mathrm{d}x^i] \otimes s_\beta + [f^\alpha(\vec{n}+\widehat{\mu},\vec{x}) \\ &\quad - f^\alpha(\vec{n},\vec{x})](B_{D,\mu})^\beta_\alpha \mathrm{d}n^\mu \otimes s_\beta,\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}s_\alpha \cdot f^\alpha &= [-(B_{D,\mu})^\beta_\alpha \mathrm{d}n^\mu \otimes s_\beta - (B_{C,i})^\gamma_\alpha \mathrm{d}x^i \otimes s_\gamma]\cdot f^\alpha \\ &= -f^\alpha(\vec{n}+\widehat{\mu},\vec{x})(B_{D,\mu})^\beta_\alpha \mathrm{d}n^\mu \otimes s_\beta - f^\alpha (B_{C,i})^\gamma_\alpha \mathrm{d}x^i \otimes s_\gamma,\end{aligned} \tag{4.16}$$

由此可得

$$\mathcal{D}s_\alpha \cdot f^\alpha + \sigma(s_\alpha \otimes \mathrm{d}f^\alpha) = f^\alpha \mathcal{D}s_\alpha + \mathrm{d}f^\alpha \otimes s_\alpha, \tag{4.17}$$

$$\mathcal{D}(s_\alpha \cdot f^\alpha) = \mathcal{D}s_\alpha \cdot f^\alpha + \sigma(s_\alpha \otimes \mathrm{d}f^\alpha). \tag{4.18}$$

所以 $(\Gamma(V), \mathcal{D}, \sigma)$ 是 $\mathcal{A}$-双模 $\Gamma(V)$ 上的一个双模联络.

虽然我们得到了 $\mathcal{A}$-双模 $\Gamma(V)$ 上的双模联络，在本文中将只用左 $\mathcal{A}$-模联络 $\mathcal{D}$.

4.3 非交换半离散曲率

在本小节中，我们将根据定义 2.4 得到非交换的半离散曲率.

由定义 4.1 可知，一个非交换差分-微分联络

$$\mathcal{D} : \Gamma(V) \to \Gamma(T^*N) \otimes \Gamma(V)$$

有下列形式：

$$\mathcal{D}s = (\Delta_\mu f^\beta - f^\alpha (B_{D,\mu})^\beta_\alpha)\mathrm{d}n^\mu \otimes s_\beta + (\partial_i f^\beta - f^\alpha (B_{C,i})^\beta_\alpha)\mathrm{d}x^i \otimes s_\beta.$$

由定义 2.4, 可得曲率 2-形式：

$$\mathcal{D}^2 : \Gamma(V) \to \Omega^2(N) \otimes \Gamma(V).$$

定理 4.1 如果 $s = f^\alpha s_\alpha \in \Gamma(V)$ 是半离散向量丛 $V(N, \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}))$ 的一个截面，则曲率 $\mathcal{D}^2$ 具有下形式：

$$\mathcal{D}^2 s = -\frac{1}{2}[f^\alpha (F_{\mu,\nu})^t_\alpha \mathrm{d}n^\mu \wedge \mathrm{d}n^\nu + f^\alpha (F_{i,j})^t_\alpha \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + 2f^\alpha (F_{\mu,i})^t_\alpha \mathrm{d}n^\mu \wedge \mathrm{d}x^i] \otimes s_t,$$

其中

$$\begin{aligned} F_{\mu,\nu} = {} & \Delta_\mu B_{D,\nu} - \Delta_\nu B_{D,\mu} + B_{D,\mu} B_{D,\nu}(\vec{n} + \widehat{\mu}, \vec{x}) \\ & - B_{D,\nu} B_{D,\mu}(\vec{n} + \widehat{\nu}, \vec{x}), \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$F_{i,j} = \partial_i B_{C,j} - \partial_j B_{C,i} + B_{C,i} B_{C,j} - B_{C,j} B_{C,i}, \tag{4.20}$$

$$F_{\mu,i} = \Delta_\mu B_{C,i} - \partial_i B_{D,\mu} + B_{D,\mu} B_{C,i}(\vec{n} + \widehat{\mu}, \vec{x}) - B_{C,i} B_{D,\mu}, \tag{4.21}$$

它们分别是非交换差分曲率形式、平凡的连续曲率形式和差分-微分曲率形式.

证 如果 $s = f^\alpha s_\alpha$, 则 $\mathcal{D}s = (\Delta_\mu f^\beta - f^\alpha (B_{D,\mu})^\beta_\alpha)\mathrm{d}n^\mu \otimes s_\beta + (\partial_i f^\beta - f^\alpha (B_{C,i})^\beta_\alpha)\mathrm{d}x^i \otimes s_\beta$. 利用 $\mathcal{D}$ 的下列性质：

$$\mathcal{D}(\omega \otimes_{\mathcal{A}} m) = (-1)^n \omega \mathcal{D}(m) + \mathrm{d}(\omega) \otimes_{\mathcal{A}} m,$$

直接将 $\mathcal{D}$ 作用到 $\mathcal{D}s$ 上即可得到结论.

5 在连续、离散和半离散可积系统中的应用

在本节中，我们将利用非交换联络和曲率论讨论若干微分、差分和差分-微分方程. 可以看到，当曲率为零时可以得到对应的可积方程. 一个非线性方程如果等价于一对线性问题的相容性条件，则称其有一个零曲率表示. 对于偏微分方程 (DD)、微分-差分方程

$(D\Delta)$ 和差分-差分方程 $(\Delta\Delta)$, 对应的附加线性问题分别为

$$\begin{aligned}
DD :&\partial_{x_i}\vec{\Psi}=\vec{\Psi}B_{C,i}(\vec{x}),\quad \partial_{x_j}\vec{\Psi}=\vec{\Psi}B_{C,j}(\vec{x})\Rightarrow\\
&\partial_{x_i}B_{C,j}(\vec{x})-\partial_{x_j}B_{C,i}(\vec{x})+B_{C,i}(\vec{x})B_{C,j}(\vec{x})-B_{C,j}(\vec{x})B_{C,i}(\vec{x})=0,\\
D\Delta :&\partial_x\vec{\Psi_n}=\vec{\Psi_n}U(\vec{n},\vec{x}),\quad \Delta_\mu\vec{\Psi_n}=\vec{\Psi_n}V(\vec{n},\vec{x})\Rightarrow\\
&\Delta_\mu U(\vec{n},\vec{x})-\partial_x V(\vec{n},\vec{x})+V(\vec{n},\vec{x})U(\vec{n}+\widehat{\mu},\vec{x})-U(\vec{n},\vec{x})V(\vec{n},\vec{x})=0,\\
\Delta\Delta :&\Delta_\nu\vec{\Psi_n}=\vec{\Psi_n}B_{D,\nu}(\vec{n}),\quad \Delta_\mu\vec{\Psi_n}=\vec{\Psi_n}B_{D,\mu}(\vec{n})\Rightarrow\\
&\Delta_\mu B_{D,\nu}(\vec{n})-\Delta_\nu B_{D,\mu}(\vec{n})+B_{D,\mu}(\vec{n})B_{D,\nu}(\vec{n}+\widehat{\mu})-B_{D,\nu}(\vec{n})B_{D,\mu}(\vec{n}+\widehat{\nu})=0.
\end{aligned}$$

它们恰是定理 4.1 中得到的 3 种类型的曲率.

我们给出半离散联络 1-形式 $B=B_{D,\mu}\mathrm{d}n^\mu+B_{C,i}\mathrm{d}x^i$ 的 3 种具体实现，可以看到对应的零曲率条件等价于 3 种类型的可积方程.

(1) 令 $B_{D,\mu}=0, B_{C,i}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}), i=1,2$, 即半离散联络 1-形式为 $B=B_{D,\mu}\mathrm{d}n^\mu+B_{C,i}\mathrm{d}x^i=B_{C,1}\mathrm{d}x+B_{C,2}\mathrm{d}t$, 其中的系数矩阵为

$$B_{C,1}(x,t)=\begin{pmatrix}0 & u^*(x,t)\\ -u(x,t) & 0\end{pmatrix},\quad B_{C,2}(x,t)=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\,|u(x,t)|^2 & \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}u(x,t)}{\mathrm{d}x}\\ \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}u^*(x,t)}{\mathrm{d}x} & \mathrm{i}\,|u(x,t)|^2\end{pmatrix}.$$

对应的零曲率条件为

$$\begin{aligned}
F_{12}:=&\partial_t B_{C,1}(x,t)-\partial_x B_{C,2}(x,t)+B_{C,2}(x,t)B_{C,1}(x,t)-B_{C,1}(x,t)B_{C,2}(x,t)\\
=&\begin{pmatrix}Z_{11} & 0\\ 0 & Z_{22}\end{pmatrix}\\
=&0,
\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中

$$Z_{11}=\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{i}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\mathrm{i}\,|u|^2\,u,\quad Z_{22}=\frac{\partial u^*}{\partial t}-\mathrm{i}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}-2\mathrm{i}\,|u|^2\,u^*.$$

可检验 (5.1) 等价于非线性薛定谔方程：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\mathrm{i}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+2\mathrm{i}\,|u(x,t)|^2\,u(x,t)=0.\tag{5.2}$$

(2) 令 $B_{C,i}, B_{D,\mu}\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, $i=\mu=1$, 即半离散联络 1-形式为 $B=B_{D,\mu}\mathrm{d}n^\mu+B_{C,i}\mathrm{d}x^i=B_{C,1}\mathrm{d}x+B_{D,1}\mathrm{d}n$, 其中系数矩阵为

$$B_{C,1}(x,n)=\begin{pmatrix}-1 & \dfrac{\gamma}{\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}\\ \dfrac{\gamma}{\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_n} & -1\end{pmatrix},\quad B_{D,1}(x,n)=\begin{pmatrix}-1+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\theta_{n+1}-\theta_n)} & \mathrm{i}k\\ \mathrm{i}k & -1+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\theta_{n+1}-\theta_n)}\end{pmatrix}.$$

对应的零曲率条件为

$$\begin{aligned}
F_{12}:=&\triangle_1 B_{C,1}(x,n)-\partial_x B_{D,1}(x,n)+B_{D,1}(x,n)B_{C,1}(x,n+1)-B_{C,1}(x,n)B_{D,1}(x,n)\\
=&\begin{pmatrix}Z_{11} & 0\\ 0 & Z_{22}\end{pmatrix}\\
=&0,
\end{aligned}\tag{5.3}$$

其中

$$Z_{11}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\theta_{n+1}-\theta_n)}\partial_t(\theta_{n+1}-\theta_n)+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\theta_{n+1}-\theta_n)}-\gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{n+1}},$$
$$Z_{22}=\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\theta_{n+1}-\theta_n)}\partial_t(\theta_{n+1}-\theta_n)+\gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_n}-\gamma\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{n+1}}.$$

检验可得 (5.3) 等价于下列差分-微分方程:

$$\partial_t\theta_{n+1}-\partial_t\theta_n=\gamma\sin\frac{1}{2}(\theta_{n+1}+\theta_n), \tag{5.4}$$

其中 n 是整数变量表示格子位置, t 是连续的时间变量. 该方程是正弦-戈登方程的一个可积离散化模型.

(3) 令 $B_{C,i}=0$, $B_{D,\mu}\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, $i,\mu=1,2$, 即半离散的联络 1-形式为 $B=B_{D,\mu}\mathrm{d}n^\mu+B_{C,i}\mathrm{d}x^i=B_{D,1}dm+B_{D,2}\mathrm{d}n$, 其中的系数为

$$B_{D,1}(m,n)=\begin{pmatrix}\lambda-1 & \dfrac{\lambda}{u_{m,n-1}}\\ u_{m,n} & -2\end{pmatrix},\quad B_{D,2}(m,n)=\begin{pmatrix}\lambda-1+\dfrac{u_{m,n}}{u_{m-1,n}} & \dfrac{\lambda}{u_{m-1,n}}\\ u_{m,n} & -1\end{pmatrix}.$$

对应的零曲率条件为

$$\begin{aligned}F_{12}&:=\triangle_2B_{D,1}(m,n)-\triangle_1B_{D,2}(m,n)+B_{D,2}(m,n)B_{D,1}(m,n+1)\\&\quad-B_{D,1}(m,n)B_{D,2}(m+1,n)\\&=\begin{pmatrix}\lambda\Big[\dfrac{u_{m,n}}{u_{m-1,n}}+\dfrac{u_{m,n+1}}{u_{m-1,n}}-\dfrac{u_{m+1,n}}{u_{m,n}}-\dfrac{u_{m+1,n}}{u_{m,n-1}}\Big] & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\&=0.\end{aligned}\tag{5.5}$$

可以验证 (5.5) 等价于下列差分方程:

$$q_{m+1,n}-2q_{m,n}+q_{m-1,n}=\ln\frac{\mathrm{e}^{q_{m,n+1}-q_{m,n}}+1}{\mathrm{e}^{q_{m,n}-q_{m,n-1}}+1}, \tag{5.6}$$

其中

$$u_{m,n}=\mathrm{e}^{q_{m,n}}.$$

该方程是户田晶格方程的一个可积离散化模型 [22].

6 结 论

本文从代数的视角出发, 给出了离散丛上的非交换联络和曲率的更一般实现. 整体过程源于一个形变的基于导数的微分. 我们讨论的代数实际上是交换的, 然而所用的模不是一个双模, 我们仅考虑了一个左 $\mathcal{A}$-模 $\Omega^*(\mathcal{A})$. 同样地, 存在对应的右 $\mathcal{A}$-模 $\Omega^*(\mathcal{A})$ 理论. 这一理论为经典情形下交换微分几何的一个平行理论.

我们仅讨论了这些理论在可积系统中的应用. 离散主丛、伴丛、联络、曲率论等也可以考虑用到格子规范理论等其它的数学物理领域. 同样我们也没有考虑非交换几何的度量. 因此, 有可能利用这些理论来讨论非交换的谱三元组理论.

近来, 在讨论非交换场论时出现了许多非交换孤子方程. 有些情形下, 对应的非交换代数 $\mathcal{A}$ 是 Moyal 乘积代数. 这些方程的可积性和非交换零曲率表示也值得我们进一步研究.

致谢 衷心感谢审稿人提出的建议.

参 考 文 献

[1] Connes A. Noncommutative differential geometry [J]. *Publ IHES*, 1985, 62:41–144.

[2] Connes A. Noncommutative Geometry [M]. New York: Academic Press, 1994.

[3] Chamseddine A H, Connes A. Universal formula for noncommutative geometry actions: Unification of gravity and the standard model [J]. *Phys Rev Lett*, 1996, 77(24):4868–4871.

[4] Madore J. An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications [M]. London Mathematical Society Lecture Note, Series 257, Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[5] Seiberg N, Witten E. String theory and noncommutative geometry [J]. *JHEP*, 1999, 9:1–92.

[6] Dubois-Violette M. Noncommutative differential geometry, quantum mechanics and gauge theory [J]. *Lecture Notes in Physics*, 1991, 375:13–24.

[7] Dubois-Violette M, Kerner R, Madore J. Noncommutative differential geometry of matrix algebras [J]. *J Math Phys*, 1990, 31:316–322.

[8] Dubois-Violette M, Kerner R, Madore J. Noncommutative differential geometry and new models of gauge theory [J]. *J Math Phys*, 1990, 31:323–330.

[9] Dubois-Violette M, Kerner R, Madore J. Gauge bosons in a noncommutative geometry [J]. *Phys Lett B*, 1989, 217:485–488.

[10] Dubois-Violette M, Kerner R, Madore J. Classical bosons in a noncommutative geometry [J]. *Class Quantum Grav*, 1989, 6:1709–1724.

[11] Dubois-Violette M, Michor P W. More on the Frölicher-Nijenhuis bracket for derivation based noncommutative differential forms [J]. *J Pure Appl Algebra*, 1997, 121:107–135.

[12] Dubois-Violette M, Madore J, Masson T, Mourad J. Linear connections on the quantum plane [J]. *Lett Math Phys*, 1995, 35:351–358.

[13] Eric C, Thierry M, Jean-Christophe W. Noncommutative Yang-Mills-Higgs actions from derivation-based differential calculus [J]. *Journal of Noncommutative Geometry*, 2011, 5(1):39–67.

[14] Wu K, Zhao W Z, Guo H Y. Difference discrete connection and curvature on cubic lattice [J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2006, 49(11):1458–1476.

[15] Dubois-Violette M. Lectures on graded differential algebras and noncommutative geometry [J]. *Noncommutative Differential Geometry and Its Applications to Physics*, 2001, 23:245–306.

[16] Koszul J L. Lectures on fibre bundles and differential geometry [M]. Tata Institute of Fundamental Research, 1960.

[17] Dubois-Violette M, Michor P W. Connections on central bimodules in noncommutative differential geometry [J]. *Journal of Geometry and Physics*, 1996, 20:218–232.

[18] Masson T. Gauge theories in noncommutative geometry [R]. preprint, 2012. arXiv: math-ph/1201.3345

[19] Fujiwara T, Suzuki H, Wu K. Noncommutative differential calculus and the axial anomaly in Abelian lattice gauge theories [J]. *Nucl Phys B*, 2000, 569:643–660.

[20] Liu Z, Bai Y Q, Li Q S. Noncommutative differential calculus and its application on the lattice [J]. *Chin Quart J Math*, 2007, 22(2):245–251.

[21] Liu Z, Bai Y Q, Wu K, Guo H Y. Noncommutative differential calculus and its application on discrete space [J]. *Commun Theor Phys*, 2008, 49:37–44.

[22] Suris Y B. Generalized Toda chains in discrete time [J]. *Algebra i Anal.*, 1990, 2:141–157; *Leningrad Math J*, 1991, 2:339–352 (Engl Transl).

Noncommutative Differential Calculus and the Unified Zero Curvature Representation of Integrable Systems

BAI Yongqiang[1] FU Huijuan[2] PEI Ming[2]

[1]Institute of Contemporary Mathematics, Henan University, Kaifeng 475004, Henan, China; School of Mathematics and Statistics, Henan University, Kaifeng 475004, Henan, China. E-mail: byqiang2005@yeah.net
[2]School of Mathematics and Statistics, Henan University, Kaifeng 475004, Henan, China. E-mail: f06021020@163.com; pm@henu.edu.cn

Abstract Derivation-based differential calculus is of great importance in noncommutative geometry, noncommutative gauge theory and integrable systems. This paper gives the connection and curvature from a class of deformed derivation-based differential calculus. By means of this theory, the authors obtain the zero-curvature representation of the continuous, semi-discrete and discrete integrable systems in an unified manner.

Keywords Zero curvature, Noncommutative differential calculus, Integrability, Connection

2000 MR Subject Classification 46L87, 37K10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 37 No. 4, 2016
by ALLERTON PRESS, INC., USA