数 学 年 刊
2016, 37A(4):451–462
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2016.0037

Frattini 子群循环的有限 p-群中的非交换集和极大 Abel 子群*

王玉雷[1] 刘合国[2] 吴佐慧[2]

提要 设 G 是一个群, X 是 G 的一个子集, 若对于任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$, 都有 $xy \neq yx$, 则称 X 是 G 的一个非交换集. 进一步, 如果对于 G 中的任意其它非交换子集 Y, 都有 $|X| \geqslant |Y|$, 那么称 X 是 G 的一个极大非交换集. 文中确定了 Frattini 子群循环的有限 p-群中极大非交换集和极大 Abel 子群的势.

关键词 有限 p-群, Frattini 子群, 非交换集, 极大 Abel 子群
MR (2000) 主题分类 20F18
中图法分类 O153.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2016)04-0451-12

1 引 言

文中 p 是一个素数, 采用的术语和符号都是标准的 (见 [1–2]).

设 G 是一个群, X 是 G 的一个子集, 若对于任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$, 都有 $xy \neq yx$, 则称 X 是 G 的一个非交换集. 进一步, 如果对于 G 中的任意其它非交换子集 Y, 都有 $|X| \geqslant |Y|$, 那么称 X 是 G 的一个极大非交换集, 并且用 $\omega(G)$ 标记 G 的极大非交换集的势. 为了方便, 用 $\nu(G)$ 标记 G 的极大 Abel 子群的势.

一个有限 p-群 G 是超特殊的, 如果 $G' = \zeta G$ 并且它们都是 p 阶群. 假设 G 是一个超特殊 p-群, 且其阶是 p^{2n+1}, 在奇数阶情况下, Chin[3] 确定了 $\omega(G)$ 的上下界是

$$np + 1 \leqslant \omega(G) \leqslant \frac{p(p-1)^n - 2}{p-2}.$$

文 [4] 介绍了当 $p = 2$ 时, Isaacs 得到 $\omega(G) = 2n + 1$.

在此基础上, 我们在文 [5] 中研究了比超特殊 p-群更广的一类有限 p-群, 即广义超特殊 p-群. 在文 [1] 中, 一个有限 p-群称为广义超特殊的, 如果它的中心是循环群且它的导群是 p 阶群. 进一步, 在文 [6] 中, 导群为 p 阶的循环群被初等 Abel 群中心扩张的有限 p-群中极大非交换集的势被确定, 即下面的命题.

命题 1.1[6] 设 G 是一个非 Abel p-群, 并且由下面的中心扩张

$$1 \to \mathbb{Z}_{p^m} \to G \to \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p \to 1$$

所确定, 且 $|G'| = p$, $|G/\zeta G| = p^{2n}$, 则

(1) 当 p 是奇素数时, $np + 1 \leqslant \omega(G) \leqslant \frac{p(p-1)^n - 2}{p-2}$;

(2) 当 $p = 2$ 时, $\omega(G) = 2n + 1$.

本文 2014 年 1 月 21 日收到, 2014 年 7 月 12 日收到修改稿.

[1]河南工业大学数学系, 郑州 450001. E-mail: yulwang@163.com

[2]湖北大学数学系, 武汉 430062. E-mail: ghliu@hubu.edu.cn, zuohuiwoo@163.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11301150, No. 11371124), 河南省自然科学基金 (No. 142300410134) 和河南工业大学创新人才计划项目 (No. 11CXRC19) 的资助.

本文将确定 Frattini 子群循环的有限 p-群中极大非交换集和极大 Abel 子群的势.

为了不至于引起混淆，首先给出中心积的描述. 设 G_1 和 G_2 是任意两个群，并且 Z_1 和 Z_2 分别是 G_1 和 G_2 的中心子群，假设 Z_1 和 Z_2 是同构的，设

$$\theta : Z_1 \to Z_2$$

是同构映射，称 $G_1 * G_2$ 是 G_1 和 G_2 相对于 Z_1, Z_2 和 θ 的中心积，即 $G_1 * G_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 关于正规子群

$$\{(z_1, \theta(z_1)^{-1} \mid z_1 \in Z_1\}$$

的商群. 特别地，设 G 是任意一个群， $Z \leqslant \zeta G$, 中心积 $G * G$ 是借助于 Z 上的恒等映射所得. 对于任意 $l > 1$, 用 G^{*l} 标记中心积 $G^{*(l-1)} * G$, $G^{*1} = G$ 且 $G^{*0} = 1$.

为了得到我们的结果，需要下面几个引理.

引理 1.1[7] 设 p 是一个奇素数， G 是一个非 Abel p-群，如果 $\Phi(G)$ 是循环的，那么 $\Phi(G)$ 是中心子群.

引理 1.2 设 G 是一个非 Abel p-群，如果 $\Phi(G)$ 是循环并且中心的子群，那么 G' 是 p 阶群.

证 由于 G 是一个非 Abel p-群, 因此 G' 是非平凡的, 并且 G' 包含在循环的 Frattini 子群 $\Phi(G)$ 中. 现在只需说明 G' 是 p 阶群即可.

由条件可知 $G' \leqslant \Phi(G) \leqslant \zeta G$, 故对于任意 $x, y \in G$, 都有

$$[x, y]^p = [x^p, y].$$

另外，因为 $x^p \in \Phi(G) \leqslant \zeta G$, 所以 $[x^p, y] = 1$. 可得对于任意 $x, y \in G$, 有 $[x, y]^p = 1$.

引理 1.3[8] 设 G 是一个非 Abel 2-群， $\Phi(G)$ 是循环群并且 $\Phi(G) \not\leqslant \zeta G$, $|\Phi(G)| = 2^m$, 则 $m > 1$, 并且 G 同构于直积 $E \times (D_8^{*n} * H)$, 其中 E 是一个初等 Abel 2-群， $n \geqslant 0$, H 是一个非平凡的 2-群，而且 H 是下面同构类型之一：

$$D_{2^{m+2}}, Q_{2^{m+2}}, SD_{2^{m+2}}, D_{2^{m+2}} * C_4, SD_{2^{m+2}} * C_4, D^+_{2^{m+3}}, Q^+_{2^{m+3}}, D^+_{2^{m+3}} * C_4,$$

其中

$$D^+_{2^{m+2}} := \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^{2^{m+1}} = 1,\ y^x = y,\ z^x = z^{2^m+1},\ z^y = z^{-1} \rangle$$

和

$$Q^+_{2^{m+2}} := \langle x, y, z \mid x^2 = z^{2^{m+1}} = 1,\ y^2 = z^{2^m},\ y^x = y,\ z^x = z^{2^m+1},\ z^y = z^{-1} \rangle.$$

引理 1.4[9–10] G 是由中心扩张

$$1 \to \mathbb{Z}_{p^m} = N \to G \to \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p \to 1$$

所决定的一个非 Abel p-群，并且 $|G'| = p$, 则存在一个广义超特殊 p-群 E, 使得 $G = EA$ 和 $E \cap A = \zeta E = N$, 其中 $A = \zeta G$. 进一步， G 同构于下面的中心积：

$$\text{(i) } E_1 A_1;\quad \text{(ii) } E_1 A_2;\quad \text{(iii) } E_2 A_1,$$

其中 A_1 和 A_2 分别同构于 $\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^m}$ 和 $\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^{m+1}}$. 如果 $m = 1$ 并且 $p = 2$, 那么 E_1 是一些 8 阶二面体群 D_8 的中心积， E_2 是一些 8 阶二面体群 D_8 和

一个四元数群 Q_8 的中心积. 如果 $m \geqslant 2$, 那么 E_1 是一些 $N_m(p)$ 的中心积， E_2 是一些 $N_m(p)$ 和一个 $M_m(p)$ 的中心积. 这里

$$M_m(p) = \langle x, y \mid x^{p^{m+1}} = y^p = 1, x^y = x^{1+p^m} \rangle$$

和

$$N_m(p) = \langle x, y, z \mid x^p = y^p = z^{p^m} = 1,\ [x, z] = [y, z] = 1,\ [x, y] = z^{p^{m-1}} \rangle.$$

2 主要结果

定理 2.1 设 G 是一个非 Abel p-群，并且 $\Phi(G)$ 是循环群， $|G/\zeta G| = p^{2n}$,

(i) 当 p 是奇素数时,

$$np + 1 \leqslant \omega(G) \leqslant \frac{p(p-1)^n - 2}{p-2}, \quad \nu(G) = p^n|\zeta G|.$$

(ii) 当 $p = 2$ 时，如果 $\Phi(G) \leqslant \zeta G$, 那么

$$\omega(G) = 2n + 1, \quad \nu(G) = 2^n|\zeta G|.$$

证 当 p 是奇素数时，根据引理 1.1 可得 $\Phi(G)$ 是中心子群，由引理 1.2 可得 G' 的阶是 p; 当 $p = 2$ 时，如果 $\Phi(G) \leqslant \zeta G$, 根据引理 1.2 可得 G' 是 2 阶群. 总之， G 是一个循环群被一个初等 Abel 群中心扩张的有限 p-群，并且 G 的导群是 p 阶的. 由命题 1.1 可得，当 p 是奇素数时,

$$np + 1 \leqslant \omega(G) \leqslant \frac{p(p-1)^n - 2}{p-2},$$

当 $p = 2$ 时， $\omega(G) = 2n + 1$. 下面考虑 G 中极大 Abel 子群的势.

由于 G 的导群是 p 阶的并且 G 是一个循环群被一个初等 Abel 群中心扩张的有限 p-群. 根据引理 1.4 可得 $G = EA$, 其中 E 是一个广义超特殊 p-群，$A = \zeta G$ 并且 $E \cap A = \zeta E$, $G/\zeta G \cong E/\zeta E$ 可以构成一个辛空间，再由于 $|G/\zeta G| = p^{2n}$, 因此可以假设

$$E = \langle x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1}, x_{2n}, \zeta E \rangle,$$

并且它们满足

$$\begin{aligned}
&[x_{2i-1}, x_{2i}] \neq 1, \quad && i = 1, 2, \cdots, n, \\
&[x_{2i-1}, x_j] = 1, && j \neq 2i, \\
&[x_{2i}, x_k] = 1, && k \neq 2i - 1, \\
&x_i^p \in \zeta E.
\end{aligned}$$

首先，假设 $n = 1$, E 有同构类 D_8, Q_8, $N_m(p)$ 或者 $M_m(p)$. 显然，如果 $E \cong D_8$ 或者 Q_8, 那么 $\nu(G) = 2|\zeta G|$. 假设 $E \cong M_m(p)$, 那么

$$G = \langle x_1, x_2, \zeta G \mid x_1^{p^{m+1}} = x_2^p = 1,\ x_1^{x_2} = x_1^{1+p^m} \rangle$$

注意到

$$G = \zeta G \cup \Big(\bigcup_{r=1}^{p-1} x_1^r \zeta G \Big) \cup \Big(\bigcup_{s=1}^{p-1} x_2^s \zeta G \Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{p-1} \bigcup_{j=1}^{p-1} x_1^i x_2^j \zeta G \Big),$$

并且 $C_G(x_1^r)=\langle x_1,\zeta G\rangle$, $C_G(x_2^s)=\langle x_2,\zeta G\rangle$, 其中 $r,s=1,2,\cdots,p-1$, 显然, $\bigcup\limits_{r=1}^{p-1}x_1^r\zeta G$ 和 $\bigcup\limits_{s=1}^{p-1}x_2^s\zeta G$ 都是交换集，由于

$$\begin{aligned}&[(x_1^{r_1}x_2^{s_1})(x_3^{r_2}x_4^{s_2})\cdots(x_{2n-1}^{r_n}x_{2n}^{s_n})]\cdot[(x_1^{r_1'}x_2^{s_1'})(x_3^{r_2'}x_4^{s_2'})\cdots(x_{2n-1}^{r_n'}x_{2n}^{s_n'})]\\=&[(x_1^{r_1'}x_2^{s_1'})(x_3^{r_2'}x_4^{s_2'})\cdots(x_{2n-1}^{r_n'}x_{2n}^{s_n'})]\cdot[(x_1^{r_1}x_2^{s_1})(x_3^{r_2}x_4^{s_2})\cdots(x_{2n-1}^{r_n}x_{2n}^{s_n})]\end{aligned}$$

当且仅当

$$r_1s_1'+r_2s_2'+\cdots+r_ns_n'\equiv s_1r_1'+s_2r_2'+\cdots+s_nr_n'\pmod p,$$

其中 $0\leqslant r_i,r_i',s_i,s_i'\leqslant p-1$, $i=1,2,\cdots,n$. 因此对于任意 $i\in\{1,2,\cdots,p-1\}$, 有

$$C_G(x_1^ix_2)=\{(x_1^{ij}x_2^j)z\mid z\in\zeta G,j=0,1,2,\cdots,p-1\}.$$

从而下面 $p-1$ 个集合是互不相同的交换集:

$$\begin{aligned}&\{x_1x_2,x_1^2x_2^2,\cdots,x_1^{p-1}x_2^{p-1}\},\\&\{x_1^2x_2,x_1^4x_2^2,\cdots,x_1^{2(p-1)}x_2^{p-1}\},\\&\qquad\vdots\\&\{x_1^{p-1}x_2,x_1^{2(p-1)}x_2^2,\cdots,x_1^{(p-1)(p-1)}x_2^{p-1}\},\end{aligned}$$

并且这 $p-1$ 个集合中不同集合里的元素互不交换. 由于

$$\bigcup_{r=1}^{p-1}x_1^r\zeta G,\bigcup_{s=1}^{p-1}x_2^s\zeta G\quad 和\quad \bigcup_{i=1}^{p-1}\bigcup_{j=1}^{p-1}x_1^ix_2^j\zeta G$$

这 3 个集合的元素之间不交换，并且它们每个的极大交换集的势都是 $(p-1)|\zeta G|$, 再加上中心 ζG 里的元素，因此 G 的一个极大 Abel 子群可以取为 $\langle x_1,\zeta G\rangle$, 故 $\nu(G)=p|\zeta G|$.

对于 $E\cong N_m(p)$, 同理可得 $\nu(G)=p|\zeta G|$.

假设 $n\geqslant 2$, 设 $d_n:=\nu(G)$, $C_G(x_1)\neq C_G(x_2)$. 令 $K:=C_G(x_1)\cap C_G(x_2)$, 则

$$K=C_G(x_1,x_2)=\langle x_3,x_4,\cdots,x_{2n-1},x_{2n},\zeta G\rangle.$$

显然， K 是一个循环群被初等 Abel 群中心扩张的有限 p-群，并且 $|K/\zeta G|=p^{2(n-1)}$, $G=\langle x_1,x_2\rangle*K$. 令 $d_{n-1}:=\nu(K)$.

如果 $p=2$, 那么

$$G=K\cup x_1K\cup x_2K\cup x_1x_2K,$$

因此

$$d_n=2d_{n-1}=4d_{n-2}=\cdots=2^{n-1}d_1=2^{n-1}\cdot 2|\zeta G|=2^n|\zeta G|.$$

假设 p 是一个奇素数，注意到

$$G=K\cup\Big(\bigcup_{i=1}^{p-1}x_1^iK\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=1}^{p-1}x_2^jK\Big)\cup\Big(\bigcup_{i=1}^{p-1}\bigcup_{j=1}^{p-1}x_1^ix_2^jK\Big).$$

显然, $\bigcup\limits_{i=1}^{p-1}x_1^iK$ 和 $\bigcup\limits_{j=1}^{p-1}x_2^jK$ 这两个集合中的极大交换集的势都是 $(p-1)d_{n-1}$. 下面考虑 $\bigcup\limits_{i=1}^{p-1}\bigcup\limits_{j=1}^{p-1}x_1^ix_2^jK$ 中的极大交换集的势. 设 K 的一个极大 Abel 子群为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_{d_{n-1}}\}$,

注意到下面 $p-1$ 个集合都是交换集:

$$\{x_1x_2v_i, x_1^2x_2^2v_i, \cdots, x_1^{p-1}x_2^{p-1}v_i,\ i=1,2,\cdots,d_{n-1}\},$$
$$\{x_1^2x_2v_i, x_1^4x_2^2v_i, \cdots, x_1^{2(p-1)}x_2^{p-1}v_i,\ i=1,2,\cdots,d_{n-1}\},$$
$$\vdots$$
$$\{x_1^{p-1}x_2v_i, x_1^{2(p-1)}x_2^2v_i, \cdots, x_1^{(p-1)(p-1)}x_2^{p-1}v_i,\ i=1,2,\cdots,d_{n-1}\},$$

并且其它 $p-2$ 个集合中的每个元素都与集合

$$\{x_1x_2v_i, x_1^2x_2^2v_i, \cdots, x_1^{p-1}x_2^{p-1}v_i,\ i=1,2,\cdots,d_{n-1}\}$$

的某个元素不可交换，因此可以取

$$\{x_1x_2v_i, x_1^2x_2^2v_i, \cdots, x_1^{p-1}x_2^{p-1}v_i,\ i=1,2,\cdots,d_{n-1}\}$$

是 $\bigcup\limits_{i=1}^{p-1}\bigcup\limits_{j=1}^{p-1} x_1^ix_2^jK$ 中的一个极大交换集.

总之， G 的一个极大 Abel 子群可以选 K 中的一个极大交换集和集合 $\bigcup\limits_{i=1}^{p-1} x_1^iK$ 或者 $\bigcup\limits_{j=1}^{p-1} x_2^jK$ 中一个极大交换集的并集，因此 $d_n=pd_{n-1}$, 根据该递推关系，可得

$$\nu(G)=d_n=pd_{n-1}=p^2d_{n-2}=\cdots=p^{n-1}d_1=p^{n-1}p|\zeta G|=p^n|\zeta G|.$$

设 G 是一个非 Abel p-群， $\Phi(G)$ 是循环群. 定理 2.1 讨论了 p 是奇素数，以及 $p=2$ 并且 $\Phi(G)\leqslant\zeta G$ 时，G 中极大非交换集和极大 Abel 子群的势. 下面只需讨论 $\Phi(G)\nleqslant\zeta G$ 时，这种有限 2-群的极大非交换集和极大 Abel 子群的势.

定理 2.2 设 G 是一个 Frattini 子群循环的有限 2-群，并且 $|\Phi(G)|=2^m$, $\Phi(G)\nleqslant\zeta G$, 则 G 同构于 $E\times(D_8^{*n}*H)$, 其中 H 按照引理 1.3 中所定义， $\nu(G)=2^{m+n}|\zeta G|$, 并且

(i) 如果 H 是二面体群 ($D_{2^{m+2}}$)，广义四元数群 ($Q_{2^{m+2}}$)，半二面体群 ($SD_{2^{m+2}}$), $D_{2^{m+2}}*C_4$ 或者 $SD_{2^{m+2}}*C_4$, 那么 $\omega(G)=(2^{m-1}+1)(2n+1)+2^{m-1}$.

(ii) 如果 H 是 $D^+_{2^{m+3}}$, $Q^+_{2^{m+3}}$ 或者 $D^+_{2^{m+3}}*C_4$, 那么 $\omega(G)=(2^{m-1}+1)(2n+1)+2^{m-1}+2$.

证　由于 $\Phi(G)\nleqslant\zeta G$, 则 $m\geqslant 2$, 而且根据引理 1.3 可知， G 同构于 $E\times(D_8^{*n}*H)$, 其中 E 是一个初等 Abel 2-群， $n\geqslant 0$, H 是下面同构类型之一:

$$D_{2^{m+2}}, Q_{2^{m+2}}, SD_{2^{m+2}}, D_{2^{m+2}}*C_4, SD_{2^{m+2}}*C_4, D^+_{2^{m+3}}, Q^+_{2^{m+3}}, D^+_{2^{m+3}}*C_4.$$

(1) 考虑

$$H_1:=D_{2^{m+2}}=\langle x,y\mid x^2=y^{2^{m+1}}=1,\ y^x=y^{-1}\rangle,$$

显然 $\zeta H_1=\langle y^{2^m}\rangle$ 是一个 2 阶群.

如果 $(xy^i)\cdot(xy^j)=(xy^j)\cdot(xy^i)$, 其中 $0\leqslant i,j\leqslant 2^m-1$, 那么

$$x^2y^{j-i}=(xy^i)\cdot(xy^j)=(xy^j)\cdot(xy^i)=x^2y^{i-j},$$

因此 $2(i-j)\equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 即 $i-j\equiv 0 \pmod{2^m}$, 从而 $i=j$. 由此可得集合

$$\{x,y,xy,\cdots,xy^{2^m-1}\}$$

是 H_1 的一个极大非交换集，从而 $\omega(H_1)=2^m+1$.

当 $n>0$ 时，令 $K_1:=E\cdot D_8^{*n}$, 则 $\omega(K_1)=\omega(D_8^{*n})=2n+1$, 假设 K_1 的一个极大非交换集是 $\{w_i\mid i=1,2,\cdots,2n+1\}$. 从而 $[w_s,w_t]$ 是 D_8^{*n} 的中心子群，由此可得 $[w_s,w_t]=y^{2^m}$. G 关于正规子群 K_1 有下面的陪集分解:

$$G=K_1\cup xK_1\cup\Big(\bigcup_{i=1}^{2^m-1}y^iK_1\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=1}^{2^m-1}xy^iK_1\Big).$$

对于任意 $0\leqslant i<j\leqslant 2^{m-1}-1$, $s\neq t$, 有

$$\begin{aligned}[xy^iw_s,xy^jw_t]&=[xy^i,w_t]^{w_s}[w_s,w_t][xy^i,xy^j]^{w_sw_t}[w_s,xy^j]^{w_t}\\&=[w_s,w_t][xy^i,xy^j]^{w_sw_t}\\&=y^{2^m}y^{2(j-i)}\\&=y^{2(2^{m-1}+j-i)}\\&\neq 1,\end{aligned}$$

因此 xy^iw_s 与 xy^jw_t 不交换. 另外，对于 $0\leqslant j\leqslant 2^{m-1}-1$, $s\neq t$, 有

$$\begin{aligned}[xy^{2^{m-1}+j}w_s,xy^jw_t]&=[xy^{2^{m-1}+j},w_t]^{w_s}[w_s,w_t][xy^{2^{m-1}+j},xy^j]^{w_sw_t}[w_s,xy^j]^{w_t}\\&=[w_s,w_t][xy^{2^{m-1}+j},xy^j]^{w_sw_t}\\&=y^{2^m}y^{2^m}\\&=1,\end{aligned}$$

因此可以取 G 的一个极大非交换集为

$\{xw_i,yw_i,xyw_i,xy^2w_i,\cdots,xy^{2^{m-1}-1}w_i,xy^{2^{m-1}},xy^{2^{m-1}+1},\cdots,xy^{2^m-1},i=1,2,\cdots,2n+1\}$,

从而 $\omega(G)=(2^{m-1}+1)(2n+1)+2^{m-1}$.

由于

$$H_1=\zeta H_1\cup x\zeta H_1\cup\Big(\bigcup_{i=1}^{2^m-1}y^i\zeta H_1\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=1}^{2^m-1}xy^j\zeta H_1\Big),$$

因此 $\nu(H_1)=2^m|\zeta H_1|$, 又由于 D_8^{*n} 是一个超特殊 2-群，因此 $\nu(D_8^{*n})=2^n|\zeta D_8^{*n}|$. 由 $\zeta H_1=\zeta D_8^{*n}$, $\zeta G=E\times\zeta H_1$ 和 $G/\zeta G=H_1\zeta G/\zeta G\times D_8^{*n}\zeta G/\zeta G$ 可得 $\nu(G)=2^{m+n}|\zeta G|$.

(2) 考虑

$$H_2:=Q_{2^{m+2}}=\langle x,y\ \mid\ x^4=1,\ y^{2^m}=x^2,\ y^x=y^{-1}\rangle.$$

显然 $\zeta H_2=\langle y^{2^m}\rangle=\langle x^2\rangle$ 是 2 阶群.

如果 $(xy^i)\cdot(xy^j)=(xy^j)\cdot(xy^i)$, 其中 $0\leqslant i,j\leqslant 2^m-1$, 那么

$$x^2y^{j-i}=(xy^i)\cdot(xy^j)=(xy^j)\cdot(xy^i)=x^2y^{i-j},$$

因此 $2(i-j)\equiv 0\pmod{2^{m+1}}$, 即 $i-j\equiv 0\pmod{2^m}$, 从而 $i=j$. 根据 (1) 的结论，同理可得集合 $\{x,y,xy,\cdots,xy^{2^m-1}\}$ 是 H_2 的一个极大非交换集. G 的一个极大非交换集为

$\{xw_i,yw_i,xyw_i,xy^2w_i,\cdots,xy^{2^{m-1}-1}w_i,xy^{2^{m-1}},xy^{2^{m-1}+1},\cdots,xy^{2^m-1},i=1,2,\cdots,2n+1\}$,

$\omega(G)=(2^{m-1}+1)(2n+1)+2^{m-1}$, $\nu(G)=2^{m+n}|\zeta G|$.

(3) 考虑

$$H_3:=SD_{2^{m+2}}=\langle x,y\ \mid\ x^2=y^{2^{m+1}}=1,\ y^x=y^{-1+2^m}\rangle.$$

如果 $(y^k)^x = y^k$, 其中 $0 < k < 2^{m+1}$, 那么 $y^{-k+2^m k} = y^k$, 由此可得 $2k - 2^m k \equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 从而 $(1-2^{m-1})k \equiv 0 \pmod{2^m}$. 又由于 $0 < k < 2^{m+1}$, 因此 $k = 2^m$, 结果可得 $\zeta H_3 = \langle y^{2^m}\rangle$.

如果 $(xy^i)\cdot(xy^j) = (xy^j)\cdot(xy^i)$, 其中 $0 \leqslant i, j \leqslant 2^m - 1$, 那么

$$x^2 y^{(2^m-1)i+j} = (xy^i)\cdot(xy^j) = (xy^j)\cdot(xy^i) = x^2 y^{i+(2^m-1)j},$$

由此可得 $2(2^{m-1}-1)(i-j) \equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 因此 $i - j \equiv 0 \pmod{2^m}$, 从而 $i = j$. 根据 (1) 的结论, 同理可得集合 $\{x, y, xy, \cdots, xy^{2^m-1}\}$ 是 H_3 的一个极大非交换集,

$$\omega(G) = (2^{m-1}+1)(2n+1) + 2^{m-1}, \quad \nu(G) = 2^{m+n}|\zeta G|.$$

(4) 考虑

$$H_4 := D_{2^{m+2}} * C_4 = \langle x, y, z \mid x^2 = y^{2^{m+1}} = 1,\ y^x = y^{-1},\ z^2 = y^{2^m},\ [x,z] = 1,\ [y,z] = 1\rangle.$$

显然 $\zeta H_4 = \langle z\rangle$, 因此

$$H_4 = \zeta H_4 \cup x\zeta H_4 \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{2^m-1} y^i \zeta H_4\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{2^m-1} xy^j \zeta H_4\Big).$$

根据 (1) 的结论, 同理可得集合 $\{x, y, xy, \cdots, xy^{2^m-1}\}$ 是 H_4 的一个极大非交换集. 令 $K_4 := E \cdot D_8^{*n} \cdot C_4$, K_4 类似 (1) 中的 K_1, 同理可得

$$\omega(G) = (2^{m-1}+1)(2n+1) + 2^{m-1}, \quad \nu(G) = 2^{m+n}|\zeta G|.$$

(5) 考虑

$$H_5 := SD_{2^{m+2}} * C_4 = \langle x, y, z \mid x^2 = y^{2^{m+1}} = 1,\ y^x = y^{-1+2^m},\ z^2 = y^{2^m},\ [x,z] = 1,\ [y,z] = 1\rangle.$$

显然 $\zeta H_5 = \langle z\rangle$, 因此

$$H_5 = \zeta H_5 \cup x\zeta H_5 \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{2^m-1} y^i \zeta H_5\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{2^m-1} xy^j \zeta H_5\Big).$$

根据 (1) 的结论, 同理可得集合 $\{x, y, xy, \cdots, xy^{2^m-1}\}$ 是 H_5 的一个极大非交换集,

$$\omega(G) = (2^{m-1}+1)(2n+1) + 2^{m-1}, \quad \nu(G) = 2^{m+n}|\zeta G|.$$

(6) 考虑

$$H_6 := D^+_{2^{m+3}} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^{2^{m+1}} = 1,\ y^x = y,\ z^x = z^{2^m+1},\ z^y = z^{-1}\rangle.$$

设 $x^i y^j z^k \in \zeta H_6$, 其中 $0 \leqslant i < 2$, $0 \leqslant j < 2$ 并且 $0 \leqslant k < 2^{m+1}$, 则 $(x^i y^j z^k)^x = x^i y^j z^k$, 由此可得 $z^{2^m k + k} = z^k$, 因此 $2^m k \equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 即 $k \equiv 0 \pmod 2$. 由 $(x^i y^j z^k)^y = x^i y^j z^k$ 可得 $z^{-k} = z^k$, 因此 $2k \equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 即 $k \equiv 0 \pmod{2^m}$. 由 $(x^i y^j z^k)^z = x^i y^j z^k$, 以及 $(x^i)^z = x^i z^{-2^m i}$ 和 $(y^j)^z = y^j z^{(-1)^{j+1}+1}$, 可得

$$(-1)^{j+1} 2^m i + (-1)^{j+1} + 1 \equiv 0 \pmod{2^{m+1}},$$

则

$$(-1)^{j+1} 2^m i + (-1)^{j+1} + 1 \equiv 0 \pmod{2^m},$$

故 $(-1)^{j+1} + 1 \equiv 0 \pmod{2^m}$, 因此 $j = 0$. 把 $j = 0$ 代入可得 $i = 0$. 综上结果可得 $\zeta H_6 = \langle z^{2^m}\rangle$.

H_6 关于中心 ζH_6 的陪集分解为

$$\Big(\bigcup_{s=0}^{2^m-1} z^s\zeta H_6\Big)\cup\Big(\bigcup_{i=0}^{2^m-1} xz^i\zeta H_6\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=0}^{2^m-1} yz^j\zeta H_6\Big)\cup\Big(\bigcup_{k=0}^{2^m-1} xyz^k\zeta H_6\Big).$$

H_6 的非交换集在关于中心的陪集里最多能取一个元素. 因此 H_6 的非交换集中所含元素个数不超过下面集合所含元素的个数:

$$\{y,z,xz,xz^2,xz^3,\cdots,xz^{2^m-1},yz,yz^2,yz^3,\cdots,yz^{2^m-1},xyz,xyz^2,xyz^3,\cdots,xyz^{2^m-1}\}.$$

设 $(xz^i)\cdot(xz^j)=(xz^j)\cdot(xz^i)$, 其中 $1\leqslant i<j\leqslant 2^m-1$, 则 $z^{(2^m+1)i+j}=z^{(2^m+1)j+i}$, 故 $j-i\equiv 0 \pmod 2$.

设 $(xz^i)\cdot(yz^j)=(yz^j)\cdot(xz^i)$, 其中 $0\leqslant i,j\leqslant 2^m-1$, 则

$$xyz^{j-i}=(xz^i)\cdot(yz^j)=(yz^j)\cdot(xz^i)=xyz^{(1+2^m)j},$$

故 $z^{j-i}=z^{(1+2^m)j}$. 由此可得 $2^mj+i\equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 则 $2^mj+i\equiv 0 \pmod{2^m}$, 因此 $i\equiv 0 \pmod{2^m}$, 又根据 $0\leqslant i\leqslant 2^m-1$, 则 $i=0$, 故 $j\equiv 0 \pmod 2$. 因此 x 与 yz^{2k} 可交换, 其中 $k=0,1,2,\cdots,2^{m-1}-1$.

设 $(xz^i)\cdot(xyz^j)=(xyz^j)\cdot(xz^i)$, 其中 $0\leqslant i,j\leqslant 2^m-1$, 则

$$x^2yz^{j-(1+2^m)i}=(xz^i)\cdot(xyz^j)=(xyz^j)\cdot(xz^i)=x^2yz^{(1+2^m)j+i},$$

故 $z^{j-(1+2^m)i}=z^{(1+2^m)j+i}$, 由此可得 $2^mj+(2+2^m)i\equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 则 $2^mj+(2+2^m)i\equiv 0 \pmod{2^m}$, 因此 $i\equiv 0 \pmod{2^{m-1}}$. 从而 $i=0$ 或者 2^{m-1}. 如果 $i=0$, 那么 $j\equiv 0 \pmod 2$, 因此 x 与 xyz^{2k} 可交换, 其中 $k=0,1,2,\cdots,2^{m-1}-1$; 如果 $i=2^{m-1}$, 那么 $2^mj+2^m+2^{2m-1}\equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 因此 $j+1\equiv 0 \pmod 2$. 从而 $xz^{2^{m-1}}$ 与 xyz^{2k+1} 可交换, 其中 $k=0,1,2,\cdots,2^{m-1}-1$.

设 $(yz^i)\cdot(yz^j)=(yz^j)\cdot(yz^i)$, 其中 $1\leqslant i<j\leqslant 2^m-1$, 则 $z^{j-i}=z^{i-j}$, 故 $2(j-i)\equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 从而 $j=i$.

设 $(yz^i)\cdot(xyz^j)=(xyz^j)\cdot(yz^i)$, 其中 $0\leqslant i,j\leqslant 2^m-1$, 则

$$xy^2z^{j-(1+2^m)i}=(yz^i)\cdot(xyz^j)=(xyz^j)\cdot(yz^i)=xy^2z^{i-j},$$

故 $z^{j-(1+2^m)i}=z^{i-j}$, 由此可得 $(2+2^m)i-2j\equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 则 $(2+2^m)i-2j\equiv 0 \pmod{2^m}$, 因此 $i-j\equiv 0 \pmod{2^{m-1}}$. 从而 $i=j$, $i=j+2^{m-1}$ 或者 $j=i+2^{m-1}$. 如果 $i=j$, 那么 $j\equiv 0 \pmod 2$, 由此可得 yz^{2k} 与 xyz^{2k} 是可交换的, 其中 $k=0,1,\cdots,2^{m-1}-1$; 如果 $i=j+2^{m-1}$, 那么 $2^mj+2^m\equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 因此 $j+1\equiv 0 \pmod 2$. 由此可得 $yz^{2k+1+2^{m-1}}$ 与 xyz^{2k+1} 是可以交换的, 其中 $k=0,1,2,\cdots,2^{m-2}-1$; 如果 $j=i+2^{m-1}$, 那么 $2^mi-2^m\equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$. 因此 $i-1\equiv 0 \pmod 2$. 由此可得 yz^{2k+1} 与 $xyz^{2k+1+2^{m-1}}$ 是可以交换的, 其中 $k=0,1,2,\cdots,2^{m-2}-1$.

综上所述, H_6 的一个极大非交换集可以取集合

$$\{y,z,xz,xz^2,yz,yz^2,yz^3,\cdots,yz^{2^m-1}\},$$

从而 $\omega(H_6)=2^m+3$.

令 $K_6:=E\cdot D_8^{*n}$, 则 $\omega(K_6)=\omega(D_8^{*n})=2n+1$, 假设 K_6 的一个极大非交换集是 $\{w_i\mid i=1,2,\cdots,2n+1\}$. 从而 $[w_s,w_t]$ 是 D_8^{*n} 的中心子群, 由此可得 $[w_s,w_t]=z^{2^m}$. G 关于正规子群 K_6 有下面的陪集分解:

$$G=\Big(\bigcup_{s=0}^{2^m-1} z^sK_6\Big)\cup\Big(\bigcup_{i=0}^{2^m-1} xz^iK_6\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=0}^{2^m-1} yz^jK_6\Big)\cup\Big(\bigcup_{k=0}^{2^m-1} xyz^kK_6\Big).$$

对于任意 $1 \leqslant s < t \leqslant 2n+1$, 有

$$[yw_s, zw_t] = z^{2^m-2} \neq 1,$$
$$[yw_s, xz^iw_t] = z^{2^m+2i} \neq 1,$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant 2^m - 1$ 并且 $i \neq 2^{m-1}$;

$$[yw_s, yz^iw_t] = z^{2^m+2i} \neq 1,$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant 2^m - 1$ 并且 $i \neq 2^{m-1}$;

$$[zw_s, xz^iw_t] = 1,$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant 2^m - 1$;

$$[xz^iw_s, xz^jw_t] = z^{2^m(i-j+1)} \neq 1,$$

其中 $1 \leqslant j < i \leqslant 2^m - 1$ 并且 $i, j \neq 2^{m-1}$, $i-j$ 是偶数;

$$[xz^iw_s, yz^jw_t] \neq 1,$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant 2^m - 1$ 并且 $i \neq 2^{m-1}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^m - 1$;

$$[yz^iw_s, yz^jw_t] = z^{2^m+2(j-i)} \neq 1,$$

其中 $1 \leqslant i < j \leqslant 2^{m-1} - 1$. 因此可以取 G 的一个极大非交换集为

$$\{yw_i, zw_i, xz, xz^2, yzw_i, yz^2w_i, \cdots, yz^{2^{m-1}-1}w_i, yz^{2^{m-1}}, yz^{2^{m-1}+1}, \cdots, yz^{2^m-1},$$
$$i = 1, 2, \cdots, 2n+1\},$$

从而 $\omega(G) = (2^{m-1}+1)(2n+1) + 2^{m-1} + 2$.

由于

$$\begin{aligned} H_6 = {} & \zeta H_6 \cup x\zeta H_6 \cup y\zeta H_6 \cup xy\zeta H_6 \\ & \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{2^m-1} z^i\zeta H_6\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{2^m-1} xz^i\zeta H_6\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{2^m-1} yz^i\zeta H_6\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{2^m-1} xyz^i\zeta H_6\Big), \end{aligned}$$

因此可以取 H_6 的一个极大 Abel 子群是 $\langle z, \zeta H_6\rangle$, 故 $\nu(H_6) = 2^m|\zeta H_6|$, 又由于 D_8^{*n} 是一个超特殊 2-群, 因此 $\nu(D_8^{*n}) = 2^n|\zeta D_8^{*n}|$. 由

$$\zeta H_6 = \zeta D_8^{*n}, \quad \zeta G = E \times \zeta H_6, \quad G/\zeta G = H_6\zeta G/\zeta G \times D_8^{*n}\zeta G/\zeta G$$

可得 $\nu(G) = 2^{m+n}|\zeta G|$.

(7) 考虑

$$H_7 := Q^+_{2^{m+3}} = \langle x, y, z \mid x^2 = z^{2^{m+1}} = 1,\ y^2 = z^{2^m},\ y^x = y,\ z^x = z^{2^m+1},\ z^y = z^{-1}\rangle.$$

设 $x^iy^jz^k \in \zeta H_7$, 其中 $0 \leqslant i < 2$, $0 \leqslant j < 4$ 并且 $0 \leqslant k < 2^{m+1}$, 则 $(x^iy^jz^k)^x = x^iy^jz^k$, 由此可得 $z^{2^mk+k} = z^k$, 因此 $2^mk \equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 即 $k \equiv 0 \pmod 2$. 由 $(x^iy^jz^k)^y = x^iy^jz^k$ 可得 $z^{-k} = z^k$, 因此 $2k \equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 即 $k \equiv 0 \pmod{2^m}$. 由 $(x^iy^jz^k)^z = x^iy^jz^k$, 以及 $(x^i)^z = x^iz^{-2^mi}$ 和 $(y^j)^z = y^jz^{(-1)^{j+1}+1}$ 可得

$$(-1)^{j+1}2^mi + (-1)^{j+1} + 1 \equiv 0 \pmod{2^{m+1}},$$

即

$$(-1)^{j+1}2^mi + (-1)^{j+1} + 1 \equiv 0 \pmod{2^m},$$

则 $(-1)^{j+1}+1\equiv 0 \pmod{2^m}$, 因此 $j=0$ 或者 2. 把 $j=0$ 或者 2 代入可得 $i=0$. 综上所述可得 $\zeta H_7=\langle z^{2^m}\rangle$.

H_7 关于中心 ζH_7 的陪集分解为

$$\Big(\bigcup_{s=0}^{2^m-1} z^s\zeta H_7\Big)\cup\Big(\bigcup_{i=0}^{2^m-1} xz^i\zeta H_7\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=0}^{2^m-1} yz^j\zeta H_7\Big)\cup\Big(\bigcup_{k=0}^{2^m-1} xyz^k\zeta H_7\Big).$$

H_7 的非交换集在关于中心的每个陪集里最多能取一个元素. 因此 H_7 的非交换集中所含元素个数不超过下面集合所含元素的个数:

$$\{y,z,xz,xz^2,xz^3,\cdots,xz^{2^m-1},yz,yz^2,yz^3,\cdots,yz^{2^m-1},xyz,xyz^2,xyz^3,\cdots,xyz^{2^m-1}\}.$$

根据 (6) 的结论, 同理可得 H_7 的一个极大非交换集可以取集合

$$\{y,z,xz,xz^2,yz,yz^2,yz^3,\cdots,yz^{2^m-1}\},$$

从而 $\omega(H_6)=2^m+3$, 而且

$$\omega(G)=(2^{m-1}+1)(2n+1)+2^{m-1}+2,\quad \nu(G)=2^{m+n}|\zeta G|.$$

(8) 考虑

$$\begin{aligned}H_8&:=D^+_{2^{m+3}}*C_4\\&=\langle x,y,z,w\mid x^2=y^2=z^{2^{m+1}}=1,\ y^x=y,\ z^x=z^{2^m+1},\ z^y=z^{-1},\ w^2=z^{2^m},\\&\qquad [x,w]=[y,w]=[z,w]=1\rangle.\end{aligned}$$

设 $x^iy^jz^kw^t\in\zeta H_8$, 其中 $0\leqslant i<2$, $0\leqslant j<2$, $0\leqslant k<2^{m+1}$ 并且 $0\leqslant t<4$, 则 $(x^iy^jz^kw^t)^x=x^iy^jz^kw^t$, 由此可得 $z^{2^mk+k}=z^k$, 因此 $2^mk\equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 即 $k\equiv 0 \pmod 2$. 由 $(x^iy^jz^kw^t)^y=x^iy^jz^kw^t$ 可得 $z^{-k}=z^k$, 因此 $2k\equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$, 即 $k\equiv 0 \pmod{2^m}$. 由 $(x^iy^jz^kw^t)^z=x^iy^jz^kw^t$, 以及 $(x^i)^z=x^iz^{-2^mi}$ 和 $(y^j)^z=y^jz^{(-1)^{j+1}+1}$ 可得

$$(-1)^{j+1}2^mi+(-1)^{j+1}+1\equiv 0 \pmod{2^{m+1}},$$

即

$$(-1)^{j+1}2^mi+(-1)^{j+1}+1\equiv 0 \pmod{2^m},$$

则 $(-1)^{j+1}+1\equiv 0 \pmod{2^m}$, 因此 $j=0$. 把 $j=0$ 代入可得 $i=0$. 综上所述可得 $\zeta H_8=\langle w\rangle$.

H_8 关于中心 ζH_8 的陪集分解为

$$\Big(\bigcup_{s=0}^{2^m-1} z^s\zeta H_8\Big)\cup\Big(\bigcup_{i=0}^{2^m-1} xz^i\zeta H_8\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=0}^{2^m-1} yz^j\zeta H_8\Big)\cup\Big(\bigcup_{k=0}^{2^m-1} xyz^k\zeta H_8\Big).$$

根据 (6) 的结论, 同理可得

$$\omega(G)=(2^{m-1}+1)(2n+1)+2^{m-1}+2,\quad \nu(G)=2^{m+n}|\zeta G|.$$

对于广义超特殊 p-群 E, 若 $E'=\langle c\rangle$, 则 $E/\zeta E$ 按规定

$$f(\bar{x},\bar{y})=r,\ 其中\ \bar{x}=x\zeta E,\ \bar{y}=y\zeta E\ 和\ [x,y]=c^r,\ 0\leqslant r<p,$$

作成 $GF(p)$ 上的一个非退化辛空间. 借助于该辛空间的极大迷向子空间可以得到 Frattini 子群循环的有限 p-群的极大 Abel 子群.

推论 2.1 设 G 是一个 Frattini 子群循环的有限 p-群, 并且 $|\Phi(G)|=p^m$.

(i) 如果 p 是一个奇素数，或者 $p=2$ 并且 $\Phi(G)\leqslant\zeta G$, 那么 $G=E\cdot\zeta G$, 其中 E 是一个广义超特殊 p-群，并且 G 的一个极大 Abel 子群为

$$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n,\zeta G\rangle,$$

其中 $L(x_1\zeta E,x_2\zeta E,\cdots,x_n\zeta E)$ 是辛空间 $E/\zeta E$ 的一个极大迷向子空间.

(ii) 如果 $p=2$ 并且 $\Phi(G)\not\leqslant\zeta G$, 那么 G 同构于 $E\times(D_8^{*n}*H)$, 其中 H 按照引理 1.3 中所定义，并且 G 的一个极大 Abel 子群为

$$\langle y,x_1,x_2,\cdots,x_n,\zeta G\rangle,$$

其中 y 是 H 的一个 2^{m+1} 阶生成元， $L(x_1\zeta E,x_2\zeta E,\cdots,x_n\zeta E)$ 是辛空间 $D_8^{*n}/\zeta D_8^{*n}$ 的一个极大迷向子空间.

证　如果 p 是一个奇素数，或者 $p=2$ 并且 $\Phi(G)\leqslant\zeta G$, 由引理 1.1 和引理 1.2 可得， G 的导群是 p 阶的并且 G 是一个循环群被一个初等 Abel 群中心扩张的有限 p-群. 由引理 1.4 知 $G=E\cdot\zeta G$ 和 $E\cap\zeta G=\zeta E$, 其中 E 是一个广义超特殊 p-群.

如果 $L(x_1\zeta E,x_2\zeta E,\cdots,x_n\zeta E)$ 是辛空间 $E/\zeta E$ 的一个极大迷向子空间,那么 $[x_i,x_j]=1$, 其中 $i,j=1,2,\cdots,n$. 因此

$$G_1:=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n,\zeta G\rangle$$

是一个 Abel 子群，并且 $|G_1/\zeta G|=p^n$. 由定理 2.1 可知， G_1 是 G 的极大 Abel 子群.

假设 $p=2$ 并且 $\Phi(G)\not\leqslant\zeta G$, 根据引理 1.3 可知， G 同构于 $E\times(D_8^{*n}*H)$, 其中 H 按照引理 1.3 中所定义. 显然

$$G_2:=\langle y,x_1,x_2,\cdots,x_n,\zeta G\rangle$$

是一个 Abel 2-群，并且 $|G_2/\zeta G|=2^{m+n}$. 由定理 2.2 可得， G_2 是 G 的极大 Abel 子群.

参　考　文　献

[1] Robinson D J S. A course in the theory of groups [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1996.

[2] Horenstein D. Finite groups [M]. New York: Harper and Row, 1968.

[3] Chin A Y M. On non-commuting sets in an extraspecial p-group [J]. *J Group Theory*, 2005, 8:189–194.

[4] Bertram E A. Some applications of graph theory to finite groups [J]. *Discrete Math*, 1983, 44:31–43.

[5] 王玉雷，刘合国. 广义超特殊 p-群中的非交换集 [J]. 数学学报, 2012, 55(6):975–980.

[6] Liu Heguo, Wang Yulei. On non-commuting sets in certain finite p-groups [J]. *Algebra Colloquium*, accepted.

[7] Berger T R, Kovács L G, Newman M F. Groups of prime power order with cyclic Frattini subgroup [J]. *Nederl Akad Wetensch Indag Math*, 1980, 42(1):13–18.

[8] David Bornand. Elementary abelian subgroups in p-groups of class 2 [D]. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2009.

[9] 王玉雷,刘合国. Winter 定理和 Dietz 定理的推广 [J]. 数学年刊, 2012, 33A(5):609–630.

[10] Liu Heguo, Wang Yulei. Automorphism groups of certain finite p-groups [J]. *Comm Algebra*, accepted.

On Non-commuting Sets and Maximal Abelian Subgroups in a Finite p-Group with a Cyclic Frattini Subgroup

WANG Yulei[1] LIU Heguo[2] WU Zuohui[2]

[1]Department of Mathematics, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China. E-mail: yulwang@163.com
[2]Department of Mathematics, Hubei University, Wuhan 430062, China.
E-mail: ghliu@hubu.edu.cn, zuohuiwoo@163.com

Abstract Let G be a group. A subset X in G is said to be non-commuting if $xy \neq yx$ for any $x, y \in X$ with $x \neq y$. Further, if $|X| \geqslant |Y|$ for any other non-commuting subset Y in G, then X is said to be a maximal non-commuting set. In this paper, the cardinalities of a maximal non-commuting set and a maximal abelian subgroup in a finite p-group with a cyclic Frattini subgroup are determined.

Keywords Finite p-groups, Frattini subgroups, Non-commuting sets, Maximal abelian subgroups
2000 MR Subject Classification 20F18