数学年刊 A 辑
2017, 38(4):405–418
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2017.0033

单位方体上沿曲面的振荡积分在 Sobolev 空间上的有界性*

赵俊燕[1]

提要 研究了欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中单位方体 $Q^2=[0,1]^2$ 上沿曲面 $(t,s,\gamma(t,s))$ 的振荡奇异积分算子

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta}f(u,v,x)=\int_{Q^2}f(u-t,v-s,x-\gamma(t,s))\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}}t^{-1-\alpha_1}s^{-1-\alpha_2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

从 Sobolev 空间 $L_r^p(\mathbb{R}^{2+n})$ 到 $L^p(\mathbb{R}^{2+n})$ 中的有界性, 其中 $x\in\mathbb{R}^n$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $(t,s,\gamma(t,s))=(t,s,t^{p_1}s^{q_1},t^{p_2}s^{q_2},\cdots,t^{p_n}s^{q_n})$ 为 $\mathbb{R}^{2+n}$ 上一个曲面, 且 $\beta_1>\alpha_1\geqslant 0$, $\beta_2>\alpha_2\geqslant 0$. 这些结果推广和改进了 $\mathbb{R}^3$ 上的某些已知的结果. 作为应用, 得到了乘积空间上粗糙核奇异积分算子的 Sobolev 有界性.

关键词 超奇异振荡积分算子, 曲面, 多参数, 单位方体
MR (2000) 主题分类 42B20, 42B35
中图法分类 O174.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2017)04-0405-14

1 引 言

在单参数的情形, 设 $b>a\geqslant 0$, $(u,x)\in\mathbb{R}^{n+1}$, 定义沿曲线 $(t,\gamma(t))=(t,t^{p_1},t^{p_2},\cdots,t^{p_n})$ 的振荡奇异积分算子

$$T_{a,b}f(u,x)=\int_0^1 f(u-t,x-\gamma(t))\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^{-b}}t^{-1-a}\mathrm{d}t,$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 n 个互异的正实数. 算子 $T_{a,b}$ 在调和分析及其相关主题的研究中有着深刻的背景, 它与 Hilbert 变换、沿曲线的 Hilbert 变换以及强奇异积分算子密切相关[1−2]. 历史上, Zielinski[3]在其由 Wainger 指导的博士论文中首先研究了这类沿曲线的带振荡因子的超奇性 Hilbert 变换, 并证明了: 若 $n=1$, $\gamma(t)=t^2$, 则 $T_{a,b}$ 在 L^2 上有界当且仅当 $b\geqslant 3a$. 这一结果随后被 Chandarana 于 1996 年在文 [4] 中改进为: 若 $\gamma(t)=t^k$, $k\geqslant 2$, 则 $T_{a,b}$ 在 L^2 上有界当且仅当 $b\geqslant 3a$. 同时, 文 [4] 还证明了: 若 $b>3a$ 且 $1+\frac{3a(b+1)}{b(b+1)+(b-3a)}<p<1+\frac{b(b+1)+(b-3a)}{3a(b+1)}$, 则 $T_{a,b}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上的有界算子. 随后, Chandarana[5]又将其结论进一步推广到 $n=2$ 的情形. 陈杰诚、范大山以及王梦在文

本文 2015 年 9 月 16 日收到, 2016 年 8 月 25 日收到修改稿.
[1]浙江大学数学系, 杭州 310027; 浙江师范大学数学系, 浙江 金华 321004. E-mail: zhaojunyan929@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11371316, No. 11771388, No. 11671363, No. 11471288) 的资助.

[6] 中拓广了参数 p 的范围, 并且给出了新的证明. 随后, 这一结果又被拓广到 n 维欧氏空间中沿曲线的振荡奇异积分算子[7−9]等. 进一步的研究可参见文 [10–11] 等.

受单参数情形的启发, 另一自然的推广方式是将沿曲线的振荡奇异积分算子推广为沿曲面的振荡奇异积分算子. 沿曲面的振荡奇异积分算子可依如下方式明确定义: 设 $x \in \mathbb{R}^n$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $(t,s,\gamma(t,s)) = (t,s,t^{p_1}s^{q_1},t^{p_2}s^{q_2},\cdots,t^{p_n}s^{q_n})$ 且 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$, $\beta = (\beta_1,\beta_2)$. 沿曲面 $(t,s,\gamma(t,s))$ 的振荡奇异积分算子 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ 定义为

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta}f(u,v,x) = \int_{Q^2} f(u-t,v-s,x-\gamma(t,s))\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}}t^{-1-\alpha_1}s^{-1-\alpha_2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s, \tag{1.1}$$

其中 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2+n})$. 可将算子 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ 视为 $T_{a,b}$ 的乘积型算子.

叶晓峰在其博士论文 [12] 中研究了单位正方形上的算子

$$S_{a,b}f(u,v,x) = \int_{Q^2} f(u-t,v-s,x-(ts)$$

当 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2>0$ 时, 定义新的算子

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta}f(u,v,x)&=\int_0^1\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta,s}f(u,v,x)s^{-1-\alpha_2}\mathrm{d}s\\&=\int_0^1\sum_{\nu=0}^{\infty}I_{\nu,s}f(u,v,x)s^{-1-\alpha_2}\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{1.4}$$

且当 $\beta_1>\alpha_1>0,\beta_2>\alpha_2>0$ 时, 满足 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta,s}f=\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta,s}f$, $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}f=\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta}f$.

根据文 [13, 定理 1.1–1.2], 文 [15] 得到了: 当 $n=1$, $\gamma(t,s)=t^ks^j$ 时, 乘积空间上振荡奇异积分算子 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ 在欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 上从 $L^p_\gamma(\mathbb{R}^3)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^3)$ 的有界性.

本文研究了算子 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ 在非齐次 Sobolev 空间上的有界性. 首先回顾非齐次 Sobolev 空间 L^p_s 的相关概念.

设 $s\in\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, Bessel 位势 B_s 是作用在 f 上的卷积算子, 其定义可由如下 Fourier 变换的形式给出:

$$\widehat{B_s(f)}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi).$$

类似地, Riesz 位势 R_s 是作用在 f 上的卷积算子, 其定义也可由 Fourier 变换的形式给出:

$$\widehat{R_s(f)}(\xi)=|\xi|^s\widehat{f}(\xi),$$

其中 $\widehat{u}$ 表示 u 的傅里叶变换且$^\vee$表示傅里叶逆变换.

定义 1.1 [16]　设 s 为实数, $1<p<\infty$. 非齐次 Sobolev 空间 $L^p_s(\mathbb{R}^n)$ 是由所有满足

$$B_s(u)\in L^p(\mathbb{R}^n)$$

的广义函数 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 组成的空间, 其范数定义为

$$\|u\|_{L^p_s(\mathbb{R}^n)}=\|B_s(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

齐次 Sobolev 空间 $\dot{L}^p_s(\mathbb{R}^n)$ 是由所有满足下列性质的缓增分布 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 所组成的空间:

$$\|u\|_{\dot{L}^p_s(\mathbb{R}^n)}=\|R_s(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}<\infty.$$

当 $s>0$ 时,

$$\|u\|_{L^p_s(\mathbb{R}^n)}\simeq\|u\|_{\dot{L}^p_s(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)};$$

当 k 为非负整数时,

$$\|f\|_{L^p_k(\mathbb{R}^n)}\approx\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

下面给出本文的主要结果.

定理 1.1　设 $\gamma(t,s)=(t^{p_1}s^{q_1},t^{p_2}s^{q_2},\cdots,t^{p_n}s^{q_n})$, 其中 $0<p_1<p_2<\cdots<p_n$, $0<q_1<q_2<\cdots<q_n$, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 均为正数, 对任意的 $r\geqslant0$, 若有 $\beta_1\geqslant\frac{\alpha_1-rl}{\frac{r+1}{n+2}}$, $\beta_2>\frac{\alpha_2}{\frac{r+1}{n+2}}$,

其中 $l = \min\{1, p_1\}$, 则存在不依赖于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2+n})$ 的常数 C, 使得 $\|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})} \leqslant C\|f\|_{L^2_r(\mathbb{R}^{2+n})}$.

注 1.1 当取 $r = 0$ 时, 定理 1.1 中 β_1 的范围正是定理 A 中 $p = 2$ 时的端点情形. 同时, 也容易看出定理 1.1 对定理 A(1) 有实质性的改进.

在此基础上, 本文还建立了 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ 从 $L^p_r(\mathbb{R}^{2+n})$ 到 $L^p(\mathbb{R}^{2+n})$ 的有界性.

定理 1.2 设 $\gamma(t,s) = (t^{p_1}s^{q_1}, t^{p_2}s^{q_2}, \cdots, t^{p_n}s^{q_n})$, 其中 $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n$, $0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_n$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 均为正数. 令

$$\varrho = \min\Big\{\frac{\beta_1 - (n+2)(\alpha_1 - (\beta_1 + l)r)}{2\beta_1}, \frac{\beta_2 - (n+2)(\alpha_2 - \beta_2 r)}{2\beta_2}\Big\},$$

其中 $l = \min\{1, p_1\}$. 对任意的 $r \geqslant 0$, 若 $\big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\big| < \varrho$, 则存在不依赖于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2+n})$ 的常数 C, 使得 $\|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta} f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2+n})} \leqslant C\|f\|_{L^p_r(\mathbb{R}^{2+n})}$.

注 1.2 当 $r = 0$ 时, 定理 1.2 的结果覆盖了定理 A(2).

由定理 1.1–1.2, 不难得到以下推论.

推论 1.1 假如 $\gamma(t,s) = (t^{p_1}s^{q_1}, t^{p_2}s^{q_2}, \cdots, t^{p_n}s^{q_n})$, 其中 $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n$, $0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_n$, 设 $\beta_1 > (n+2)\alpha_1 \geqslant 0$, $\beta_2 > (n+2)\alpha_2 \geqslant 0$, 并令

$$\varrho = \min\Big\{\frac{\beta_1 - (n+2)(\alpha_1 - (\beta_1 + l)r)}{2\beta_1}, \frac{\beta_2 - (n+2)(\alpha_2 - \beta_2 r)}{2\beta_2}\Big\},$$

其中 $l = \min\{1, p_1\}$. 对任意的 $0 \leqslant r < \frac{(n+1)\alpha_1}{(n+2)(\alpha_1 + l)}$,

(1) 若有 $\beta_1 \geqslant \frac{\alpha_1 - rl}{\frac{r+1}{n+2}}$, $\beta_2 > \frac{\alpha_2}{\frac{r+1}{n+2}}$, 则 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ 是从 $L^2_r(\mathbb{R}^{2+n})$ 到 $L^2(\mathbb{R}^{2+n})$ 有界的;

(2) 若 $|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| < \varrho$, 则存在不依赖于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2+n})$ 的常数 C, 使得

$$\|\mathcal{T}_{\alpha,\beta} f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2+n})} \leqslant C\|f\|_{L^p_r(\mathbb{R}^{2+n})}.$$

本文第 2 节证明定理 1.1, 第 3 节证明定理 1.2, 第 4 节将推论 1.1 应用于乘积空间上的某类粗糙核奇异积分算子的 Sobolev 有界性问题. 此外, $p' = \frac{p}{p-1}$ 表示指标 p 的对偶指标. 为方便起见, 本文用字母 C, C_0 表示不依赖于所涉及空间的主要参数的正常数, 且其值也未必处处相同. 表达式 $A \sim B$ 是指存在常数 C, C_0, 使得 $C_0 \leqslant A/B \leqslant C$, $f \preceq g$ 表示存在常数 C, 使得 $f \leqslant Cg$.

2 定理 1.1 的证明

正如文 [14] 所指, 若 $i \neq j$ 时, 有 $p_i = p_j$, 则可将 n 维的情形降为 $n-1$ 维处理. 因此, 不失一般性, 以下假设 $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n$, $0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_n$.

为便于行文, 首先介绍一个简单的引理. 它将在定理 1.1 的证明中起到很好的作用.

设 $\eta=(\eta_1,\eta_2)\in\mathbb{R}^2$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ 且 $\Omega(t)$ 是支集包含于 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 的 C^∞ 函数. 对 $\nu=0,1,2,\cdots$, 定义积分

$$J_{\nu,s}(\eta,\xi)=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\Omega(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(2^{-\nu}t,s)}\mathrm{d}t,$$

其中 $\psi(t,s)=t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}-\big(t\eta_1+s\eta_2+\sum\limits_{k=1}^{n}t^{p_k}s^{q_k}\xi_k\big)$. 关于 $J_{\nu,s}(\eta,\xi)$ 有如下估计.

引理 2.1 [14]　存在正常数 C, 使得

$$|J_{\nu,s}(\eta,\xi)|\leqslant Cs^{\frac{\beta_2}{n+2}}2^{-\frac{\nu\beta_1}{n+2}},$$

其中 C 只依赖于指标 $n,\beta_1,\beta_2,p_k,q_k$ 及函数 Ω, 与 ν, η 和 ξ 无关.

由 (1.4) 应用 Minkowski 不等式, 可得

$$\|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta}f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})}\leqslant\int_0^1\|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta,s}f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})}s^{-1-\alpha_2}\mathrm{d}s.$$

注意到定理 1.1 的假设条件 $\beta_2>\frac{\alpha_2}{\frac{r+1}{n+2}}$, 只需证

$$\|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta,s}f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})}\leqslant s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}}\|f\|_{L^2_r(\mathbb{R}^{2+n})}.\tag{2.1}$$

应用 Plancherel 定理, 可得

$$\|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta,s}f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})}\preceq\Big\|\sum_{\nu=0}^{\infty}\widehat{I_{\nu,s}f}\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})}.\tag{2.2}$$

经变量替换, 易得 $\widehat{I_{\nu,s}f}(\eta,\xi)=m_{\nu,s}(\eta,\xi)\widehat{f}(\eta,\xi)$, 其中

$$m_{\nu,s}(\eta,\xi)=2^{\nu\alpha_1}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\phi(t)t^{-1-\alpha_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(2^{-\nu}t,s)}\mathrm{d}t=:2^{\nu\alpha_1}L_{\nu,s}(\eta,\xi)$$

且

$$\psi(t,s)=t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}-\Big(t\eta_1+s\eta_2+\sum_{k=1}^{n}t^{p_k}s^{q_k}\xi_k\Big).$$

令 $\zeta=(\eta,\xi)=(\eta_1,\eta_2,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^{2+n}$, 再次应用 Plancherel 定理, 结合 (2.1)–(2.2), 要证明定理 1.1, 只需说明

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{\infty}m_{\nu,s}(\zeta)\Big|\preceq s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}}(1+|\zeta|^2)^{\frac{r}{2}}\tag{2.3}$$

关于 $\zeta\in\mathbb{R}^{2+n}$ 一致成立即可. 为此需要以下命题.

命题 2.1　对任意的 $r>0$, 存在与 ζ 和 ν 无关的常数 $C>0$, 使得

$$|L_{\nu,s}(\zeta)|\leqslant C(1+|\zeta|^2)^{\frac{r}{2}}2^{-\nu(\beta_1+l)r-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}}.\tag{2.4}$$

首先说明如何利用命题 2.1 证明定理 1.1. 命题 2.1 的证明将置于本节最后.

定理 1.1 的证明　假设对任意的 $r\geqslant 0$, 有 $\beta_1>\frac{\alpha_1-rl}{\frac{r+1}{n+2}}$, $\beta_2>\frac{\alpha_2}{\frac{r+1}{n+2}}$, 其中 $l=\min\{1,p_1\}$.

由命题 2.1 可得

$$|m_{\nu,s}(\zeta)| \preceq 2^{\nu\alpha_1} 2^{-\nu(\beta_1+l)r-\frac{\nu\beta_1}{n+2}} s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}} (1+|\zeta|^2)^{\frac{r}{2}}. \tag{2.5}$$

由 (2.5) 及定理 1.1 的假设条件 $\beta_1 > \frac{\alpha_1 - rl}{\frac{r+1}{n+2}}$, 可得

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{\nu=0}^{\infty} m_{\nu,s}(\zeta)\Big| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} |m_{\nu,s}(\zeta)| &= \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\alpha_1-(\beta_1+l)r-\frac{\beta_1}{n+2})} s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}} (1+|\zeta|^2)^{\frac{r}{2}} \\ &\preceq s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}} (1+|\zeta|^2)^{\frac{r}{2}}.\end{aligned}$$

进而, 由 Plancherel 定理, 有

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta,s} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})} &\preceq \Big\|\sum_{\nu=0}^{\infty} \widehat{I_{\nu,s} f}\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})} \\ &= \Big\|\sum_{\nu=0}^{\infty} m_{\nu,s}(\zeta)\widehat{f}\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})} \\ &\preceq s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}} \|(1+|\zeta|^2)^{\frac{r}{2}}\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})} \\ &\preceq s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}} \|((1+|\zeta|^2)^{\frac{r}{2}}\widehat{f})^{\vee}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})} \\ &= s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}} \|f\|_{L^2_r(\mathbb{R}^{2+n})}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

条件 $\beta_2 > \frac{\alpha_2}{\frac{r+1}{n+2}}$ 蕴含 $\beta_2 r + \frac{\beta_2}{n+2} - 1 - \alpha_2 > -1$, 于是由 (2.6) 可得

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})} &\leqslant \int_0^1 \|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta,s} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})} s^{-1-\alpha_2} \mathrm{d}s \\ &\preceq \int_0^1 s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}} \mathrm{d}s \|f\|_{L^2_r(\mathbb{R}^{2+n})} \\ &\preceq \|f\|_{L^2_r(\mathbb{R}^{2+n})}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

下面研究 $\beta_1 = \frac{\alpha_1 - rl}{\frac{r+1}{n+2}}$ 这一端点情形.

对任意的 $r>0$, 取正数 ε ($\varepsilon \leqslant r$), 由命题 2.1 知, 存在与 ν 和 ζ 无关的常数 C, 使得

$$|L_{\nu,s}(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|^2)^{\frac{(r-\varepsilon)}{2}} 2^{-\nu(\beta_1+l)(r-\varepsilon)-\frac{\nu\beta_1}{n+2}} s^{\beta_2(r-\varepsilon)+\frac{\beta_2}{n+2}},$$

$$|L_{\nu,s}(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|^2)^{\frac{(r+\varepsilon)}{2}} 2^{-\nu(\beta_1+l)(r+\varepsilon)-\frac{\nu\beta_1}{n+2}} s^{\beta_2(r+\varepsilon)+\frac{\beta_2}{n+2}}.$$

由此可得

$$|m_{\nu,s}(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|^2)^{\frac{r}{2}} s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}} \min\Big\{\frac{(1+|\zeta|^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} s^{\beta_2\varepsilon}}{2^{\nu\varepsilon(\beta_1+l)}}, \frac{2^{\nu\varepsilon(\beta_1+l)}}{(1+|\zeta|^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} s^{\beta_2\varepsilon}}\Big\}.$$

设 N 是大于 $\frac{\log_2(1+|\zeta|^2)s^{\beta_2+m}}{2(\beta_1+l)}$ 的最小正整数, 则

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{\nu=0}^{\infty} m_{\nu,s}(\zeta)\Big| \\ &\preceq (1+|\zeta|^2)^{\frac{r}{2}} s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}} \Big(\sum_{\nu\geqslant N}^{\infty} \frac{(1+|\zeta|^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} s^{\beta_2\varepsilon}}{2^{\nu\varepsilon(\beta_1+l)}} + \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{2^{\nu\varepsilon(\beta_1+l)}}{(1+|\zeta|^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} s^{\beta_2\varepsilon}}\Big) \\ &\preceq (1+|\zeta|^2)^{\frac{r}{2}} s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}}\end{aligned}$$

关于 $\zeta = (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{2+n}$ 一致成立. 由此, 当 $\beta_1 = \frac{\alpha_1 - rl}{\frac{r+1}{n+2}}$, $\beta_2 > \frac{\alpha_2}{\frac{r+1}{n+2}}$ 时,$\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta}$ 是从 $L_r^2(\mathbb{R}^{2+n})$ 到 $L^2(\mathbb{R}^{2+n})$ 的有界算子. 定理 1.1 证毕.

命题 2.1 的证明 对任意的 $r > 0$, 存在自然数 τ 满足 $\tau - 1 < r \leqslant \tau$. 下面对 τ 运用归纳法来证明.

第 1 步 证明 $0 < r \leqslant 1$ 的情形.

由于 ϕ 是一个支集含于 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 的 C^∞ 函数, 故 $\phi(t)t^{-1-\alpha}$, $\phi(t)t^{-k}$, $\phi(t)t^k$, $\phi(t)^{(k)}$ 也是支集含于 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 的 C^∞ 函数, 在下述讨论中它们仅影响不等式的系数, 故可将其统一视为 Ω. 在下文中, Ω 始终意味着一个支集含于 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 的 C^∞ 函数, 在不同的位置其具体形式可以不同, 这并不影响最终结果.

由分部积分可得

$$\begin{aligned} L_{\nu,s}(\zeta) &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Omega(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2^{-\nu}t\eta_1 + \eta_2 s + \sum\limits_{k=1}^{n}(2^{-\nu}t)^{p_k} s^{q_k}\xi_k)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{\nu\beta_1}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}} \mathrm{d}t \\ &\simeq 2^{-\nu\beta_1} s^{\beta_2} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Omega(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2^{-\nu}t\eta_1 + \eta_2 s + \sum\limits_{k=1}^{n}(2^{-\nu}t)^{p_k} s^{q_k}\xi_k)} \mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{\nu\beta_1}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}} \\ &\simeq \mathrm{I} + \mathrm{II}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

在 (2.8) 中,

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &\simeq 2^{-\nu\beta_1} s^{\beta_2} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Omega'(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(2^{-\nu}t, s)} \mathrm{d}t \simeq 2^{-\nu\beta_1} s^{\beta_2} L_{\nu,s}(\zeta), \\ \mathrm{II} &\simeq 2^{-\nu\beta_1} s^{\beta_2} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Omega(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(2^{-\nu}t, s)} \Big(2^{-\nu}\eta_1 + \sum_{k=1}^{n} p_k 2^{-\nu p_k} s^{q_k} \xi_k t^{p_k - 1}\Big) \\ &\simeq s^{\beta_2} 2^{-\nu(\beta_1+1)} \eta_1 L_{\nu,s}(\zeta) + \sum_{k=1}^{n} 2^{-\nu(\beta_1 + p_k)} s^{\beta_2 + q_k} \xi_k L_{\nu,s}(\zeta). \end{aligned}$$

由引理 2.1 可得

$$|L_{\nu,s}(\zeta)| \preceq s^{\frac{\beta_2}{n+2}} 2^{-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}, \tag{2.9}$$

注意到 $l = \min\{1, p_1\}$, $0 < s < 1$, $|\eta_1| \leqslant |\zeta|$, $|\eta_2| \leqslant |\zeta|$, $|\xi_i| \leqslant |\zeta|$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 于是

$$\begin{aligned} |\mathrm{II}| &\preceq s^{\beta_2} 2^{-\nu(\beta_1 + l)} |\zeta| |L_{\nu,s}(\zeta)| \\ &\preceq s^{\beta_2} 2^{-\nu(\beta_1 + l)} s^{\frac{\beta_2}{n+2}} 2^{-\frac{\nu\beta_1}{n+2}} (1 + |\zeta|). \end{aligned} \tag{2.10}$$

对 I 重复上述论证, 并继续分部积分 $N - 1$ 次, 可得

$$|\mathrm{I}| \preceq 2^{-\nu(\beta_1 + l) - \frac{\nu\beta_1}{n+2}} s^{\beta_2 + \frac{\beta_2}{n+2}} (1 + |\zeta|) + 2^{-\nu N\beta_1} s^{N\beta_2} \Big| \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Omega(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi(2^{-\nu}t, s)} \mathrm{d}t \Big|.$$

由引理 2.1, 可取充分大的整数 N, 使得

$$\begin{aligned}&2^{-\nu N\beta_1}s^{N\beta_2}\Big|\int_{\frac12}^2\Omega(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi(2^{-\nu}t,s)}\mathrm{d}t\Big|\\&\preceq 2^{-\nu N\beta_1}s^{N\beta_2}s^{\frac{\beta_2}{n+2}}2^{-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}\\&\preceq 2^{-\nu(\beta_1+l)-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}s^{\beta_2+\frac{\beta_2}{n+2}}(1+|\zeta|).\end{aligned}$$

从而得到

$$|\mathrm{I}|\preceq 2^{-\nu(\beta_1+l)-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}s^{\beta_2+\frac{\beta_2}{n+2}}(1+|\zeta|). \tag{2.11}$$

由 (2.8) 和 (2.10)–(2.11) 可得

$$|L_{\nu,s}(\zeta)|\preceq 2^{-\nu(\beta_1+l)-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}s^{\beta_2+\frac{\beta_2}{n+2}}(1+|\zeta|). \tag{2.12}$$

由 (2.12) 结合 $r=0$ 时的估计式 (2.9) 可得, 对一切 $0\leqslant r\leqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}|L_{\nu,s}(\zeta)|&=|L_{\nu,s}(\zeta)|^r|L_{\nu,s}(\zeta)|^{1-r}\\&\preceq 2^{-\nu(\beta_1+l)r-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}s^{\beta_2r+\frac{\beta_2}{n+2}}(1+|\zeta|)^r\\&\preceq 2^{-\nu(\beta_1+l)r-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}s^{\beta_2r+\frac{\beta_2}{n+2}}(1+|\zeta|^2)^{\frac r2}.\end{aligned}$$

第 2 步 假设命题 2.1 对满足 $\tau-1<r\leqslant\tau$ 的 r 均成立, 其中 τ 为不小于 2 的正整数. 那么只需再证明命题 2.1 对 $\tau<r\leqslant\tau+1$ 也成立即可. 对 $L_{\nu,s}(\zeta)$ 作分部积分可得形如 (2.8) 的表达式:

$$L_{\nu,s}(\zeta)\simeq\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

由归纳假设可得关于 II 的下述估计:

$$\begin{aligned}|\mathrm{II}|&\preceq s^{\beta_2}2^{-\nu(\beta_1+l)}|\zeta||L_{\nu,s}(\zeta)|\\&\preceq s^{\beta_2}2^{-\nu(\beta_1+l)}|\zeta|(1+|\zeta|^2)^{\frac{r-1}{2}}2^{-\nu(\beta_1+l)(r-1)-\nu\frac{\beta_1}{n+2}}s^{\beta_2(r-1)+\frac{\beta_2}{n+2}}\\&\preceq(1+|\zeta|^2)^{\frac r2}2^{-\nu(\beta_1+l)r-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}s^{\beta_2r+\frac{\beta_2}{n+2}}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

类似地, 对 I 作 $N-1$ 次分部积分, 可得

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}|&\preceq(1+|\zeta|^2)^{\frac r2}2^{-\nu(\beta_1+l)r-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}s^{\beta_2r+\frac{\beta_2}{n+2}}+2^{-\nu N\beta_1}s^{N\beta_2}\Big|\int_{\frac12}^2\Omega(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi(2^{-\nu}t,s)}\mathrm{d}t\Big|\\&\preceq(1+|\zeta|^2)^{\frac r2}2^{-\nu(\beta_1+l)r-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}s^{\beta_2r+\frac{\beta_2}{n+2}}+2^{-\nu N\beta_1}s^{N\beta_2}s^{\frac{\beta_2}{n+2}}2^{-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}.\end{aligned}$$

取充分大的整数 N, 使得

$$|\mathrm{I}|\preceq(1+|\zeta|^2)^{\frac r2}2^{-\nu(\beta_1+l)r-\frac{\nu\beta_1}{n+2}}s^{\beta_2r+\frac{\beta_2}{n+2}}. \tag{2.14}$$

综合 (2.13)–(2.14) 的估计, 命题 2.1 对满足 $\tau<r\leqslant\tau+1$ 的 r 也成立.

至此, 命题 2.1 得证.

3 定理 1.2 的证明

首先证明定理 1.2 中当 $\max\big\{\frac{2\beta_1}{2\beta_1-(n+2)(\alpha_1-(\beta_1+l)r)},\frac{2\beta_2}{2\beta_2-(n+2)(\alpha_2-\beta_2r)}\big\}<p\leqslant 2$ 的情形, $p>2$ 的情形可由对偶论证得到. 为此需要如下引理.

引理 3.1 对任意的 $1 < q < 2$ 以及一切正整数 N, 成立

$$\|I_{\nu,s}f\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})} \preceq 2^{\nu(\alpha_1 - N(\beta_1+l))} s^{\beta_2 N} \|f\|_{L^q_N(\mathbb{R}^{2+n})}, \tag{3.1}$$

其中 $I_{\nu,s}f$ 的定义如前所述.

为保持论证的连贯性, 首先运用上述引理证明定理 1.2, 而该引理的证明将在随后给出.

由 Minkowski 不等式, 易得 $I_{\nu,s}$ 在 $L^q(\mathbb{R}^{2+n})$ 上的有界性:

$$\|I_{\nu,s}f\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})} \preceq 2^{\nu\alpha_1} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})} \int_0^1 |\phi(t)| t^{-1-\alpha_1} \mathrm{d}t \simeq 2^{\nu\alpha_1} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}. \tag{3.2}$$

对 $r \in (0, N)$, 在 (3.1)–(3.2) 之间运用插值定理, 可得

$$\|I_{\nu,s}f\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})} \preceq 2^{\nu(\alpha_1 - (\beta_1+l)r)} s^{\beta_2 r} \|f\|_{L^q_r(\mathbb{R}^{2+n})}. \tag{3.3}$$

由 N 的任意性, (3.3) 对一切 $r > 0$ 都成立. 由 (2.5) 结合 Plancherel 定理, 易得

$$\|I_{\nu,s}f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2+n})} \preceq 2^{\nu(\alpha_1 - (\beta_1+l)r - \frac{\beta_1}{n+2})} s^{\beta_2 r + \frac{\beta_2}{n+2}} \|f\|_{L^2_r(\mathbb{R}^{2+n})}. \tag{3.4}$$

对 $p \in (q, 2)$, 在 (3.3)–(3.4) 之间再次运用插值定理, 可得

$$\|I_{\nu,s}f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2+n})} \preceq 2^{\nu(\alpha_1 - (\beta_1+l)r - \frac{\beta_1}{n+2}\frac{2(q-p)}{qp-2p})} s^{\beta_2 r + \frac{\beta_2}{n+2}\frac{2(q-p)}{qp-2p}} \|f\|_{L^p_r(\mathbb{R}^{2+n})}. \tag{3.5}$$

通过简单计算不难发现, 条件 $\frac{2\beta_1}{2\beta_1-(n+2)(\alpha_1-(\beta_1+l)r)} < p \leqslant 2$ 和 $\frac{2\beta_2}{2\beta_2-(n+2)(\alpha_2-\beta_2 r)} < p \leqslant 2$ 分别等价于 $\alpha_1 - (\beta_1+l)r - \frac{2\beta_1}{(n+2)p'} < 0$ 和 $\alpha_2 - \beta_2 r - \frac{2\beta_2}{(n+2)p'} < 0$. 现取正数 δ 满足

$$\delta < \min\Big\{(\beta_1+l)r + \frac{2\beta_1}{(n+2)p'} - \alpha_1, \beta_2 r + \frac{2\beta_2}{(n+2)p'} - \alpha_2\Big\},$$

则 $\alpha_1 - (\beta_1+l)r - \frac{2\beta_1}{(n+2)p'} + \delta < 0$ 且 $\alpha_2 - \beta_2 r - \frac{2\beta_2}{(n+2)p'} + \delta < 0$. 对上述 δ, 取定一个充分接近于 1 的实数 q, 使得

$$\alpha_1 - (\beta_1+l)r - \frac{\beta_1}{n+2}\frac{2(q-p)}{qp-2p} = \alpha_1 - (\beta_1+l)r - \frac{2\beta_1}{(n+2)p'} + \delta,$$
$$\alpha_2 - (\beta_2+m)r - \frac{\beta_2}{n+2}\frac{2(q-p)}{qp-2p} = \alpha_2 - \beta_2 r - \frac{2\beta_2}{(n+2)p'} + \delta.$$

从而由 (3.5) 及 Minkowski 不等式可得, 对一切的正实数 r, 有

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta,s}f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2+n})} &\preceq \Big\|\sum_{\nu=0}^{\infty} I_{\nu,s}f\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^{2+n})} \\ &\simeq s^{\beta_2 r + \frac{\beta_2}{n+2}\frac{2(q-p)}{qp-2p}} \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\alpha_1 - (\beta_1+l)r - \frac{2\beta_1}{(n+2)p'} + \delta} \|f\|_{L^p_r(\mathbb{R}^{2+n})} \\ &\simeq s^{\beta_2 r + \frac{\beta_2}{n+2}\frac{2(q-p)}{qp-2p}} \|f\|_{L^p_r(\mathbb{R}^{2+n})}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

再由 (3.6) 及 Minkowski 不等式可得, 对一切的正实数 r, 有

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta}f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2+n})} &\leqslant \int_0^1 \|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta,s}f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2+n})}s^{-1-\alpha_2}\mathrm{d}s\\ &\preceq \int_0^1 s^{\beta_2 r+\frac{\beta_2}{n+2}\frac{2(q-p)}{qp-2p}-1-\alpha_2}\mathrm{d}s\|f\|_{L_r^p(\mathbb{R}^{2+n})}\\ &\preceq \int_0^1 s^{\beta_2 r+\frac{2\beta_2}{(n+2)p'}-\delta-\alpha_2-1}\mathrm{d}s\|f\|_{L_r^p(\mathbb{R}^{2+n})}\\ &\preceq \|f\|_{L_r^p(\mathbb{R}^{2+n})}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

定理 1.2 当 $\max\big\{\frac{2\beta_1}{2\beta_1-(n+2)(\alpha_1-(\beta_1+l)r)},\frac{2\beta_2}{2\beta_2-(n+2)(\alpha_2-\beta_2 r)}\big\}<p\leqslant 2$ 时的情形由此获证.

现在转向引理 3.1 的证明. 为了证明该引理中的估计, 我们对 N 运用归纳法. 其处理方法与命题 2.1 类似. 为完整起见, 我们仍给出详细证明.

引理 3.1 的证明 先验证 $N=1$ 时 (3.1) 成立.

由分部积分, 可得

$$\begin{aligned}I_{\nu,s}f(u,v,x) &= \int_0^1 f(u-t,v-s,x-\gamma(t,s))\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}}\phi(2^\nu t)t^{-1-\alpha_1}\mathrm{d}t\\ &=: \mathrm{III}+\mathrm{IV},\end{aligned}\tag{3.8}$$

在 (3.8) 中,

$$\begin{aligned}\mathrm{III} &= 2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu\beta_1}s^{\beta_2}\int_0^1 \Omega(t)f(u-2^{-\nu}t,v-s,x-\gamma(2^{-\nu}t,s))\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{\nu\beta_1}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}}\mathrm{d}t\\ &\simeq 2^{-\nu\beta_1}s^{\beta_2}I_{\nu,s}f(u,v,x),\\ \mathrm{IV} &= 2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu\beta_1}s^{\beta_2}\sum_{j=1}^{n+2}\sigma_j\int_0^1 \Omega(t)\partial_j f(u-2^{-\nu}t,v-s,x-\gamma(2^{-\nu}t,s))\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{\nu\beta_1}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

这里 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n+2})=(2^{-\nu},0,p_1 2^{-\nu p_1}s^{q_1}t^{p_1-1},\cdots,p_n 2^{-\nu p_n}s^{q_n}t^{p_n-1})$. 现分别估计 III 和 IV. 对 IV, 由 Minkowski 不等式, 可知

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{IV}\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\\ &\preceq 2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu\beta_1}s^{\beta_2}\Big\|\sum_{j=1}^{n+2}\sigma_j\int_0^1 \Omega(t)\partial_j f(u-2^{-\nu}t,v-s,x-\gamma(2^{-\nu}t,s))\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{\nu\beta_1}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}}\mathrm{d}t\Big\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\\ &\preceq 2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu(\beta_1+l)}s^{\beta_2}\sum_{j=1}^{n+2}\|\partial_j f\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\\ &\preceq 2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu(\beta_1+l)}s^{\beta_2}\|f\|_{L_1^q(\mathbb{R}^{2+n})}.\end{aligned}$$

对 III, 由 Minkowski 不等式, 显然有

$$\|\mathrm{III}\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\preceq 2^{-\nu\beta_1}s^{\beta_2}\|I_{\nu,s}f\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}.$$

对 III 运用 $S-1$ 次分部积分, 重复以上论证, 再取充分大的 S, 使得

$$\begin{aligned}\|\mathrm{III}\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})} &\preceq 2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu(\beta_1+l)}s^{\beta_2}\|f\|_{L_1^q(\mathbb{R}^{2+n})}+2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu S\beta_1}s^{S\beta_2}\|I_{\nu,s}f\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\\&\preceq 2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu(\beta_1+l)}s^{\beta_2}\|f\|_{L_1^q(\mathbb{R}^{2+n})}.\end{aligned}$$

从而有

$$\|I_{\nu,s}f\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\preceq\|\mathrm{III}\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}+\|\mathrm{IV}\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\preceq 2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu(\beta_1+l)}s^{\beta_2}\|f\|_{L_1^q(\mathbb{R}^{2+n})}.$$

$N=1$ 的情形由此得证.

假设引理 3.1 中的估计对 $N-1$ 成立, 这意味着

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_0^1\Omega(t)f(\cdot-2^{-\nu}t,\cdot-s,\cdot-\gamma(2^{-\nu}t,s))\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{\nu\beta_1}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}}\mathrm{d}t\Big\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\\&\preceq 2^{-\nu(N-1)(\beta_1+l)}s^{\beta_2(N-1)}\|f\|_{L_{N-1}^q(\mathbb{R}^{2+n})},\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中 N 为不小于 2 的正整数. 根据归纳假设只需证明 (3.1) 对 N 仍成立. 类似于 $N=1$ 的情形, 运用分部积分, 可得

$$\|I_{\nu,s}f\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\preceq\|\mathrm{III}\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}+\|\mathrm{IV}\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})},\tag{3.10}$$

由归纳假设 (3.9), 对 IV 有如下估计:

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{IV}\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\\&\preceq 2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu(\beta_1+l)}s^{\beta_2}\\&\quad\cdot\Big\|\sum_{j=1}^{n+2}\sigma_j\int_0^1\Omega(t)\partial_jf(u-2^{-\nu}t,v-s,x-\gamma(2^{-\nu}t,s))\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{\nu\beta_1}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}}\mathrm{d}t\Big\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\\&\preceq 2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu(\beta_1+l)}s^{\beta_2}2^{-\nu(N-1)(\beta_1+l)}s^{\beta_2(N-1)}\sum_{j=1}^{n+2}\|\partial_jf\|_{L_{N-1}^q(\mathbb{R}^{2+n})}\\&\preceq 2^{\nu(\alpha_1-N(\beta_1+l))}s^{\beta_2N}\|f\|_{L_N^q(\mathbb{R}^{2+n})}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

类似地, 对 III 作 $S-1$ 次分部积分, 再取充分大的 S, 使得

$$\begin{aligned}\|\mathrm{III}\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}&\preceq 2^{\nu(\alpha_1-N(\beta_1+l))}s^{\beta_2N}\|f\|_{L_N^q(\mathbb{R}^{2+n})}+2^{\nu\alpha_1}2^{-\nu S\beta_1}s^{S\beta_2}\|I_{\nu,s}f\|_{L^q(\mathbb{R}^{2+n})}\\&\preceq 2^{\nu(\alpha_1-N(\beta_1+l))}s^{\beta_2N}\|f\|_{L_N^q(\mathbb{R}^{2+n})}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

事实上, 只需取满足 $S>N+\frac{lN}{\beta_1}$ 的 S 即可. 由 (3.10)–(3.12), 引理 3.1 得证.

为完成定理 1.2 的证明, 只需再讨论如下情形

$$2\leqslant p<\min\Big\{\frac{2\beta_1}{(n+2)(\alpha_1-(\beta_1+l)r)},\frac{2\beta_2}{(n+2)(\alpha_2-\beta_2r)}\Big\}.$$

这可由 $p \leqslant 2$ 的情形以及简单的对偶论证得到. 事实上, $\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta}$ 的伴随算子 $\widetilde{\mathcal{T}}^*_{\alpha,\beta}$ 定义于 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2+n})$ 上, 且具有如下形式:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{T}}^*_{\alpha,\beta} f(u,v,x) &= \int_0^1 \widetilde{\mathcal{T}}^*_{\alpha,\beta,s} f(u,v,x) s^{-1-\alpha_2} \mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{\infty} I^*_{\nu,s} f(u,v,x) s^{-1-\alpha_2} \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中

$$I^*_{\nu,s} f(u,v,x) = \int_0^1 f(u+t, v+s, x+\gamma(t,s)) \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}} \phi(2^\nu t) t^{-1-\alpha_1} \mathrm{d}t, \quad \nu = 1,2,\cdots.$$

回顾对 $\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta}$ 有界性的证明, 不难发现这两个算子具有相同的有界性. 注意到, 当

$$2 \leqslant p < \min\Big\{\frac{2\beta_1}{(n+2)(\alpha_1-(\beta_1+l)r)}, \frac{2\beta_2}{(n+2)(\alpha_2-\beta_2 r)}\Big\}$$

时, 有

$$\max\Big\{\frac{2\beta_1}{2\beta_1-(n+2)(\alpha_1-(\beta_1+l)r)}, \frac{2\beta_2}{2\beta_2-(n+2)(\alpha_2-\beta_2 r)}\Big\} < p \leqslant 2.$$

结合前文所得结果并运用 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta} f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2+n})} &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{2+n})}\leqslant 1} |\langle \widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta} f, g\rangle| \\ &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{2+n})}\leqslant 1} |\langle f, \widetilde{\mathcal{T}}^*_{\alpha,\beta} g\rangle| \\ &\leqslant \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{2+n})}\leqslant 1} \|f\|_{L^p_r(\mathbb{R}^{2+n})} \|\widetilde{\mathcal{T}}^*_{\alpha,\beta} g\|_{L^{p'}_{-r}(\mathbb{R}^{2+n})} \\ &\preceq \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{2+n})}\leqslant 1} \|f\|_{L^p_r(\mathbb{R}^{2+n})} \|B_r(g)\|_{L^{p'}_{-r}(\mathbb{R}^{2+n})} \preceq \|f\|_{L^p_r(\mathbb{R}^{2+n})}.\end{aligned}$$

上述最后一个不等号可由 Bessel 位势的半群性质得到. 定理 1.2 证毕.

4 应用: 乘积空间上的粗糙核奇异积分算子的 Sobolev 有界性

设 $n, m \geqslant 2$, $k \geqslant 1$. 设 S^{d-1} 为 $\mathbb{R}^d$ 上的单位球面 $(d = n, m)$, $B_d = B_d(0,1)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的单位球. 下面研究粗糙核奇异积分算子

$$S_{\alpha,\beta} f(x,y,z) = \int_{B_n \times B_m} f(x-u, y-v, z-\gamma(|u|,|v|)) \mathrm{e}^{\mathrm{i}|u|^{-\beta_1}|v|^{-\beta_2}} K(u,v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $\gamma(t,s) = (t^{p_1}s^{q_1}, t^{p_2}s^{q_2}, \cdots, t^{p_k}s^{q_k})$ (令 $t = |u|, s = |v|$), $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, $0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_k$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, $K(u,v) = |u|^{-n-\alpha_1}|v|^{-m-\alpha_2}\Omega(u,v)$ 且 $\Omega(u,v) \in L^1(S^{n-1} \times S^{m-1})$ 关于变量 u, v 均为零阶齐次函数. 我们得到如下结果.

定理 4.1 假如 $\gamma(t,s) = (t^{p_1}s^{q_1}, t^{p_2}s^{q_2}, \cdots, t^{p_k}s^{q_k})$, 其中 $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, $0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_k$. 设 $\beta_1 > (k+2)\alpha_1 \geqslant 0$, $\beta_2 > (k+2)\alpha_2 \geqslant 0$, 并令

$$\varrho = \min\Big\{\frac{\beta_1-(k+2)(\alpha_1-(\beta_1+l)r)}{2\beta_1}, \frac{\beta_2-(k+2)(\alpha_2-\beta_2 r)}{2\beta_2}\Big\},$$

其中 $l=\min\{1,p_1\}$. 对任意的 $0\leqslant r<\frac{(k+1)\alpha_1}{(k+2)(\alpha_1+l)}$,

(1) 若有 $\beta_1\geqslant\frac{\alpha_1-rl}{\frac{r+1}{k+2}}$, $\beta_2>\frac{\alpha_2}{\frac{r+1}{k+2}}$, 则 $S_{\alpha,\beta}$ 是从 $L_r^2(\mathbb{R}^{n+m+k})$ 到 $L^2(\mathbb{R}^{n+m+k})$ 有界的;

(2) 若 $|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|<\varrho$, 则存在不依赖于 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m+k})$ 的常数 C, 使得

$$S_{\alpha,\beta}f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+m+k})}\leqslant C\|f\|_{L_r^p(\mathbb{R}^{n+m+k})}.$$

定理 4.1 的证明与文 [13] 中定理 4 的证明类似, 在此从略.

致谢 在课题的引入及开展过程中, 承蒙范大山教授与陈杰诚教授的有益建议与指导, 谨致谢意.

参 考 文 献

[1] Fefferman C. Inequalities for strongly singular convolution operators [J]. *Acta Math*, 1970, 124(1):9–36.

[2] Sjölin P. An H^p inequality for strongly singular integrals [J]. *Math Z*, 1979, 165(3):231–238.

[3] Zielinski M. Highly Oscillatory Singular Integrals Along Curves [D]. Madison, WI: University of Wisconsin, 1985.

[4] Chandarana S. L^p-bounds for hyper-singular integral operators along curves [J]. *Pacific J Math*, 1996, 175(2):389–416.

[5] Chandarana S. Hypersigular integral operators along space curves, unpublished.

[6] 王梦, 陈杰诚, 范大山. 某类沿曲线的振荡积分 [J]. 数学年刊 A 辑, 2007, 28(1):49–56.

[7] Laghi N, Lyall N. Strongly singular integrals along curves [J]. *Pacific J Math*, 2007, 233(2):403–416.

[8] Chen J, Fan D, Wang M, Zhu X. L^p bounds for oscillatory hyper Hilbert transforms along curves [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2008, 136(9):3145–3153.

[9] Chen J, Fan D, Zhu X. Sharp L^2 boundedness of the oscillatory hyper Hilbert transform along curves [J]. *Acta Math Sin* (*Engl Ser*), 2010, 26(4):653–658.

[10] Li J, Gao G. Boundedness of oscillatory hyper-Hilbert transform along curves on Sobolev spaces [J]. *J Funct Spaces*, 2014, Article ID 489068, 5 pp.

[11] 赵俊燕, 郑涛涛. 振荡超奇性 Hilbert 变换的 Sobolev 有界性 [J]. 数学学报 (中文版), 2016, 59(1):65–74.

[12] 叶晓峰. 函数空间及算子的有界性 [D]. 杭州: 浙江大学, 2006.

[13] Fan D, Wu H. Certain oscillatory integrals on unit square and their applications [J]. *Sci China Ser A*, 2008, 51(10):1895–1903.

[14] Chen J, Fan D, Wu H, Zhu X. Oscillatory integrals on unit square along surfaces [J]. *Front Math China*, 2011, 6(1):49–59.

[15] 赵俊燕, 朱相荣. 单位方体上沿曲面的振荡积分的 Sobolev 有界性 [J]. 浙江师范大学学报 (自然科学版), 2016, 39(2):129–138.

[16] Stein E M. Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals [M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993.

The Boundedness of Certain Oscillatory Integrals on Unit Square Along Surfaces on Sobolev Spaces

ZHAO Junyan[1]

[1]Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China; Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, Zhejiang, China. E-mail: zhaojunyan929@163.com

Abstract Let $Q^2=[0,1]^2$ be the unit square in two dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^2$. The author studies the boundedness properties from Sobolev spaces $L^p_r(\mathbb{R}^{2+n})$ to $L^p(\mathbb{R}^{2+n})$ of the oscillatory singular integral operator $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ defined on the set $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2+n})$ of Schwartz test funtions f by

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta}f(u,v,x)=\int_{Q^2} f(u-t,v-s,x-\gamma(t,s))\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^{-\beta_1}s^{-\beta_2}}t^{-1-\alpha_1}s^{-1-\alpha_2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s,$$

where $x\in\mathbb{R}^n$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $(t,s,\gamma(t,s))=(t,s,t^{p_1}s^{q_1},t^{p_2}s^{q_2},\cdots,t^{p_n}s^{q_n})$ is a surface on $\mathbb{R}^{2+n}$, and $\beta_1>\alpha_1\geqslant 0$, $\beta_2>\alpha_2\geqslant 0$. The results extend and improve some known results on $\mathbb{R}^3$. As applications, the author obtains some Sobolev boundedness results of rough singular integral operators on the product spaces.

Keywords Hyper singular oscillatory integral, Surface, Multiparameter, Unit square

2000 MR Subject Classification 42B20, 42B35

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 38 No. 4, 2017
by ALLERTON PRESS, INC., USA