数学年刊 A 辑
2017, 38(4):447–460
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2017.0036

3-李代数的广义导子*

白瑞蒲[1]　李奇勇[1]　张　凯[2]

提要　给出了 3-李代数的广义导子、拟导子、拟型心的定义, 研究了他们之间的结构关系, 并对具有极大对角环面的 3-李代数的拟导子和拟型心结构进行了系统的研究. 证明了 (1) 广义导代数 $G\mathrm{Der}(A)$ 可以分解成拟导子代数 $Q\mathrm{Der}(A)$ 和拟型心 $Q\Gamma(A)$ 的直和; (2) 3-李代数 A 的拟导子可以扩张成一个具有较大维数的 3-李代数的导子; (3) 拟导子代数 $Q\mathrm{Der}(A)$ 包含在拟型心的正规化子中, 表示为 $[Q\mathrm{Der}(A), Q\Gamma(A)]\subseteq Q\Gamma(A)$; (4) 如果 A 包含极大对角环面 T, 那么 $Q\mathrm{Der}(A)$ 和 $Q\Gamma(A)$ 是 T 的对角模, 也就是 (T,T) 半单地作用在 $Q\mathrm{Der}(A)$ 和 $Q\Gamma(A)$ 上.

关键词　3-李代数, 导子, 广义导子, 拟导子, 拟型心
MR (2000) 主题分类　17B05, 17B30
中图法分类　O152.5
文献标志码　A
文章编号　1000-8314(2017)04-0447-14

1　绪　论

3-李代数[1]与数学和数学物理学中的很多领域有着密切的关系[2−5]. 3-李代数可以应用于 Bagger-Lambert[2]和 Gustavsson[4]的多元 $M2$ 模理论, 这些理论对时空体积的超对称有着重要的影响. 这些理论中的一致对称性, 需要利用 3-李代数结构中的 Jacobi 等式[6]. 在文 [6] 中, Ho, Imamura 和 Matsuo 研究了由 Bagger-Lambert 和 Gustavson 提出的多元 $M2$-膜理论到多元 $D2$-理论的两类导子. 其中一类定义在 3-李代数上, 且它蕴含了一个已知李代数的生成元, 这样的扩张包含了负范数的生成元. 通过适当的选择这样的扩张, 人们可能会限制特征零域和正特征域来保持几乎所有的 BLG 理论的对称性.

导子的概念以许多不同的形式出现在数学的不同领域. 在代数系统里, 导子是满足 Leibniz 关系的线性映射. 人们研究了几类导子. 例如: 三角导子、广义导子、拟导子[7−10]等. 导子、内导子等在 n-李代数结构理论研究中是十分有用的[11−13], 且已证明了 n-李代数 L 的自同构群 $\mathrm{Aut}(L)$ 的李代数是它的导子代数 $\mathrm{Der}(L)$, 并且如果 M 是一个 L-模, M 也是其内导子代数 $\mathrm{ad}(L)$ 的模. 通过这个关系, 给出了复数域上有限维单 n-李代数的不可约模的分类[14].

本文要研究 3-李代数的广义导子. 在文 [15] 中, 定义了李代数的广义导子, 拟导子和拟型心, 但 3-李代数的广义导子与李代数上的广义导子的结构有很大的不同 (见本文的第

本文 2015 年 2 月 28 日收到, 2017 年 1 月 4 日收到修改稿.
[1]河北大学数学与信息科学学院, 河北 保定 071002.
E-mail: bairuipu@hbu.edu.cn;　liqiyong2012@163.com
[2]河北农业大学图书馆, 河北 保定 071001. E-mail: zhangkai@hebau.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11371245) 和河北省自然科学基金 (No. A2014201006) 的资助.

4 部分和第 5 部分). 在本文中, $\mathbb{F}$ 表示特征不为 2 和 3 的域, $\mathrm{Hom}(W,V)$ 表示从向量空间 W 到向量空间 V 的线性映射张成的向量空间.

2 基础知识

3-李代数是域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间 A, 具有 3-元线性运算 $[\ ,\ ,\ ]$, 对任意 $x_1,x_2,x_3,y_2,y_3\in A$, 且满足反对称性, 及等式

$$[[x_1,x_2,x_3],y_2,y_3]=\sum_{i=1}^{3}[x_1,[x_i,y_2,y_3],x_3], \tag{2.1}$$

设 $f\in\mathrm{Hom}(A,A)$, 如果满足下面等式

$$[f(x),y,z]+[x,f(y),z]+[x,y,f(z)]=f([x,y,z]),\quad x,y,z\in A,$$

则称 f 为 3-李代数 A 的导子, 用 $\mathrm{Der}(A)$ 表示导子集合. 它是一般线性李代数 $\mathrm{gl}(A)$ 的子代数.

对于 $x_1,x_2\in A$, 定义线性映射 $\mathrm{ad}(x_1,\ x_2):A\to A$, 对任意 $x\in A$, $\mathrm{ad}(x_1,\ x_2)(x)=[x_1,x_2,\ x]$, 称为 A 的左乘运算. 显然, 左乘运算是导子. 左乘运算的线性组合称为内导子, 用 $\mathrm{ad}(A)$ 表示.

设 B_1,B_2,B_3 是 A 的子空间, 用 $[B_1,B_3,B_3]$ 表示由 $[x_1,x_2,x_3]$, $x_i\in B_i,1\leqslant i\leqslant 3$ 张成的 A 的子空间. 如果 $[B,A,A]\subseteq B$ 则称 B 为 A 的理想. 如果 $[B,B,B]\subseteq B$, 则称子空间 B 为子代数. 由向量 $[x_1,x_2,x_3]$, $x_1,x_2,x_3\in A$ 张成的子代数称为 A 的导代数, 用 A^1 表示. 如果 $A^1=0$, 那么称 A 为Abel 代数.

A 的中心用 $Z(A)=\{x\in A\mid [x,A,A]=0\}$ 表示. 很显然 $Z(A)$ 是 A 的 Abel 理想.

设 f 是 A 的线性映射, 若 $f(A)\subseteq Z(A)$ 且 $f(A^1)=0$, 则 $f\in\mathrm{Hom}(A,A)$ 称为中心导子[16], 所有中心导子的集合用 $Z\mathrm{Der}(A)$ 表示, 它是 $\mathrm{Der}(A)$ 的理想.

定义 2.1 设 A 是 3-李代数, f_1 是 A 上的线性映射. 如果存在 A 的线性映射 f_2,f_3,f' 满足

$$[f_1(x),y,z]+[x,f_2(y),z]+[x,y,f_3(z)]=f'([x,y,z]),\quad x,y,z\in A, \tag{2.2}$$

则 f_1 称为 A 的广义导子. 用 $\Delta(A)$ 表示所有满足等式 (2.2) 的 (f_1,f_2,f_3,f') 的四元序组, 用 $G\mathrm{Der}(A)$ 表示所有广义导子的集合. 如果 $f_1=f_2=f_3=f$, 则称线性映射 f 为 A 的拟导子, 所有拟导子集合用 $Q\mathrm{Der}(A)$ 表示.

对于任意 3-李代数 A, 利用运算的反对称性, 可得 $\mathrm{ad}(A)\subseteq\mathrm{Der}(A)\subseteq Q\mathrm{Der}(A)\subseteq G\mathrm{Der}(A)$. 若 $(f_1,f_2,f_3,f')\in\Delta(A)$, 则有

$$[f_2(x),y,z]+[x,f_1(y),z]+[x,y,f_3(z)]=f'([x,y,z]). \tag{2.3}$$

于是, 我们得到 $f_1,f_2,f_3\in G\mathrm{Der}(A)$, $(f_{i_1},f_{i_2},f_{i_3},f')\in\Delta(A)$, 其中 (i_1,i_2,i_3) 是任意一个 3 元排列.

3-李代数 A 的型心[16]是满足如下条件的线性函数 f 组成的结合代数 $\Gamma(A)$,

$$[f(x),y,z]=[x,f(y),z]=[x,y,f(z)]=f([x,y,z]),\quad x,y,z\in A. \tag{2.4}$$

定义 2.2 设 A 是 3-李代数. A 的拟型心, 用 $Q\Gamma(A)$ 表示, 是满足下面等式的线性映射张成的线性空间

$$[f(x),y,z]=[x,f(y),z]=[x,y,f(z)],\quad x,y,z\in A. \tag{2.5}$$

3 广义导子

本章研究 3-李代数 A 中 $G\mathrm{Der}(A)$, $Q\mathrm{Der}(A)$, $\mathrm{Der}(A)$, $Q\Gamma(A)$ 和 $\Gamma(A)$ 之间的关系, 并且证明 3-李代数 A 的任意拟导子可以扩张成另一个具有较大维数的 3-李代数的导子.

定理 3.1 设 A 是 3-李代数, 则 $G\mathrm{Der}(A)$, $Q\mathrm{Der}(A)$, $Q\Gamma(A)$ 和 $\Gamma(A)$ 是一般线性李代数 $\mathrm{gl}(A)$ 的子代数. 如果 $Z(A)=0$, 则 $Q\Gamma(A)$ 和 $\Gamma(A)$ 是 Abel 的.

证 对任意 $f,g\in G\mathrm{Der}(A),(f,f',f'',f'''),(g,g',g'',g''')\in\Delta(A)$, 根据 (2.2), 得到等式

$$[[f,g](x),y,z]+[x,[f',g'](y),z]+[x,y,[f'',g''](z)]=[f''',g'''][x,y,z],\quad x,y,z\in A,$$

则 $[f,g]=gf-fg\in G\mathrm{Der}(A)$, $([f,g],[f',g'],[f'',g''],[f''',g'''])\in\Delta(A)$. 所以 $G\mathrm{Der}(A)$ 和 $Q\mathrm{Der}(A)$ 是 $\mathrm{gl}(A)$ 的子代数. 对任意 $f,g\in Q\Gamma(A),x,y,z\in A$,

$$\begin{aligned}[[f,g](x),y,z]&=[(fg-gf)(x),y,z)]=[g(x),f(y),z]-[f(x),g(y),z]\\&=[x,f(y),g(z)]-[f(x),y,g(z)]=[x,y,fg(z)]-[x,y,fg(z)]=0.\end{aligned}$$

因为 $Z(A)=0$, 所以 $[f,g]=0$. 结论得证.

引理 3.1 设 A 是 3-李代数, 则下面结论成立

$$Q\Gamma(A)\subseteq G\mathrm{Der}(A), \tag{3.1}$$

$$\Gamma(A)\subseteq Q\mathrm{Der}(A)\cap Q\Gamma(A), \tag{3.2}$$

$$[\mathrm{Der}(A),\Gamma(A)]\subseteq\Gamma(A), \tag{3.3}$$

$$[Q\mathrm{Der}(A),Q\Gamma(A)]\subseteq Q\Gamma(A). \tag{3.4}$$

证 因为对任意 $f\in Q\Gamma(A),x,y,z\in A$, 下列等式成立:

$$[f(x),y,z]+\left[x,\frac{-1}{2}f(y),z\right]+\left[x,y,\frac{-1}{2}f(z)\right]=0,$$

所以 $\left(f,\frac{-1}{2}f,\frac{-1}{2}f,0\right)\in\Delta(A)$, $f\in G\mathrm{Der}(A)$. 类似地, 可得 (3.2)–(3.4) 成立.

如果 A 是 Abel 的 3-李代数, 则 $\mathrm{Der}(A)=Q\mathrm{Der}(A)=G\mathrm{Der}(A)=\mathrm{gl}(A)$.

设 A 是 3-维 3-李代数, 且 $A^1\neq 0$, 则存在一组基 $\{x_1,x_2,x_3\}$, 使得 A 的乘法为 $[x_1,x_2,x_3]=x_1$. 设 f 是 A 的任意线性映射, 满足 $f(x_i)=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}x_j,a_{ij}\in\mathbb{F}$, 定义 A 的线性映射 f', $f'(x_i)=\sum\limits_{j=1}^{3}b_{ij}x_j$, 其中 b_{ij} 满足 $b_{11}=a_{11}+a_{22}+a_{33}$, $b_{12}=b_{13}=0$. 则 $(f,f,f,f')\in\Delta(A)$, $\mathrm{Der}(A)\neq\mathrm{gl}(A)$, 所以 $\mathrm{Der}(A)\subsetneq Q\mathrm{Der}(A)=\mathrm{gl}(A)$.

设 B 是 4-维 3-李代数, $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ 是 B 的一组基, 乘法表为 $[x_1,x_2,x_3]=x_1$. 则 $Z(B)=\mathbb{F}x_4\neq 0$, 设 $f(x_i)=\sum\limits_{k=1}^{4}a_{ik}x_k$. 若 $(f,f,f,f')\in\Delta(A)$, 则 $[x_i,x_j,f(x_4)]=$

$\big[x_i, x_j, \sum\limits_{k=1}^{4} a_{4k}x_k\big] = 0$. 得到 $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$. 所以 $Q\mathrm{Der}(A) \neq \mathrm{gl}(A)$, $\mathrm{Der}(A) \neq Q\mathrm{Der}(A)$. 因此 $\mathrm{Der}(A) \subsetneq Q\mathrm{Der}(A) \subsetneq \mathrm{gl}(A)$.

定理 3.2 设 A 是域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数, 则

(1) $G\mathrm{Der}(A) = Q\mathrm{Der}(A) \oplus Q\Gamma(A)$ (子空间的直和),

(2) $Q\Gamma(A)$ 是 $G\mathrm{Der}(A)$ 的理想. 如果 $Z(A) = 0$, 则 $Q\Gamma(A)$ 是 $G\mathrm{Der}(A)$ 的 Abel 理想.

证 对任意 $g \in G\mathrm{Der}(A)$, 及 $(g, g', g'', g''') \in \Delta(A)$,

$$\begin{aligned}(g, g', g'', g''') = {}&\Big(\frac{g + g' + g''}{3}, \frac{g + g' + g''}{3}, \frac{g + g' + g''}{3}, g'''\Big)\\ &+ \Big(\frac{2g - g' - g''}{3}, \frac{2g' - g - g''}{3}, \frac{2g'' - g - g'}{3}, 0\Big).\end{aligned}$$

现在证明 $\frac{g+g'+g''}{3} \in Q\mathrm{Der}(A)$, $\frac{2g-g'-g''}{3}, \frac{2g'-g-g''}{3}, \frac{2g''-g-g'}{3} \in Q\Gamma(A)$.

根据 (2.2), 得到 $\big[\frac{g+g'+g''}{3}(x), y, z\big] + \big[x, \frac{g+g'+g''}{3}(y), z\big] + \big[x, y, \frac{g+g'+g''}{3}(z)\big] = g'''([z, y, z])$. 所以 $\frac{g+g'+g''}{3} \in Q\mathrm{Der}(A)$. 由等式 (2.2)–(2.3),

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{2g - g' - g''}{3}(x), y, z\Big] - \Big[x, \frac{2g - g' - g''}{3}(y), z\Big]\\ &= -\frac{1}{3}[x, y, g''(z)] + \frac{1}{3}[x, y, g(z)] - \frac{1}{3}[x, g(y), z] + \frac{1}{3}[x, g''(y), z]\\ &= \frac{1}{3}([x, y, (g - g'')(z)] + [x, (g'' - g)(y), z]),\\ &\quad g'''([x, y, z]) = [g'(x), y, z] + [x, g(y), z] + [x, y, g''(z)],\\ &\quad g'''([x, y, z]) = [g'(x), y, z] + [x, g''(y), z] + [x, y, g(z)],\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{2g - g' - g''}{3}(x), y, z\Big] = \Big[x, \frac{2g - g' - g''}{3}(y), z\Big] = \Big[x, y, \frac{2g - g' - g''}{3}(z)\Big],\\ &\Big[\frac{2g' - g - g''}{3}(x), y, z\Big] = \Big[x, \frac{2g' - g - g''}{3}(y), z\Big] = \Big[x, y, \frac{2g' - g - g''}{3}(z)\Big],\\ &\Big[\frac{2g'' - g - g'}{3}(x), y, z\Big] = \Big[x, \frac{2g'' - g - g'}{3}(y), z\Big] = \Big[x, y, \frac{2g'' - g - g'}{3}(z)\Big].\end{aligned}$$

由此得到结论 (1). 由引理 3.1 可得结论 (2).

设 A 是可分解的 3-李代数, 即 $A = H \oplus K$ (理想的直和), 得到如下结论.

定理 3.3 设 A 是 3-李代数, K, H 是 A 的理想, 且 $A = H \oplus K$, 若 $Z(A) = 0$. 则对任意的 $g \in G\mathrm{Der}(A)$, g 满足 $g(H) \subseteq H$, $g(K) \subseteq K$, 且

$$G\mathrm{Der}(A) = G\mathrm{Der}(H) \oplus G\mathrm{Der}(K), Q\mathrm{Der}(A) = Q\mathrm{Der}(H) \oplus Q\mathrm{Der}(K).$$

证 由 (2.3)–(2.4) 可得到结论.

本章最后, 我们来描述 3-李代数的拟导子可以作为具有更大维数的 3-李代数的导子. 为此我们需要 3-李代数的张量积的结构[17].

设 A 是域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数, t 是变量, 则商代数 $t\mathbb{F}[t]/(t^4)$ 是 3-维交换结合代数. 令

$\widetilde{A}=A\otimes(t\mathbb{F}[t]/(t^4))$, 下面我们把 $a\otimes t,\ a\otimes t^2$ 和 $a\otimes t^3$ 分别简写成 $at,\ at^2$ 和 at^3, 则 $\widetilde{A}$ 按下面乘积构成 3-李代数,

$$[a_1t^l,a_2t^1,a_3t^1]=[a_1,a_2,a_3]t^3,\quad a_1,a_2,a_3\in A. \tag{3.5}$$

显然, 当 l,m,n 中有一个大于 1 时, $[a_1t^l,a_2t^m,a_3t^n]=0$.

设 U 是 A 的子空间, 满足 $A=U\oplus A^1$, 即子空间 U 是导子代数 $A^1=[A,A,A]$ 的补空间, 于是 $\widetilde{A}$ 可分解为

$$\widetilde{A}=At\oplus At^2\oplus At^3=At\oplus At^2\oplus A^1t^3\oplus Ut^3. \tag{3.6}$$

定义线性映射 $l_u:Q\mathrm{Der}(A)\to\mathrm{Hom}(\widetilde{A},\widetilde{A})$, 对 $(f,f,f,f')\in\Delta(A),\ a,b\in A,c\in A^1,u\in U$,

$$l_u(f)(at+bt^2+ct^3+ut^3)=f(a)t+f'(c)t^3, \tag{3.7}$$

则 l_u 是单射, 且 $l_u(f)$ 不依赖 f' 的选择.

定理 3.4 设 A 是 3-李代数. 则 $l_u(Q\mathrm{Der}(A))\subseteq\mathrm{Der}(\widetilde{A})$. 如果 $Z(A)=0$, 则 $\mathrm{Der}(\widetilde{A})=l_u(Q\mathrm{Der}(A))\oplus Z(\mathrm{Der}(\widetilde{A}))$.

证 对任意 $a_it+b_it^2+c_it^3+u_it^3\in\widetilde{A},i=1,2,3$, 根据 (3.6)–(3.7),

$$\begin{aligned}
&[l_u(f)(a_1t+b_1t^2+c_1t^3+u_1t^3),a_2t+b_2t^2+c_2t^3+u_2t^3,a_3t+b_3t^2+c_3t^3+u_3t^3]\\
&\ +[a_1t+b_1t^2+c_1t^3+u_1t^3,l_u(a_2t+b_2t^2+c_2t^3+u_2t^3),a_3t+b_3t^2+c_3t^3+u_3t^3]\\
&\ +[a_1t+b_1t^2+c_1t^3+u_1t^3,a_2t+b_2t^2+c_2t^3+u_2t^3,l_u(f)(a_3t+b_3t^2+c_3t^3+u_3t^3)]\\
=&\,[f(a_1),a_2,a_3]t^3+[a_1,f(a_2),a_3]t^3+[a_1,a_2,f(a_3)]t^3=f'([a_1,a_2,a_3])t^3,\\
&\ l_u(f)([a_1t+b_1t^2+c_1t^3+u_1t^3,a_2t+b_2t^2+c_2t^3+u_2t^3,a_3t+b_3t^2+c_3t^3+u_3t^3])\\
=&\,l_u(f)([a_1,a_2,a_3]t^3)=f'([a_1,a_2,a_3])t^3.
\end{aligned}$$

所以 $l_u(f)\in\mathrm{Der}(\widetilde{A})$. 若 $Z(A)=0$, 根据 (3.5), 3-李代数 $\widetilde{A}$ 中心可表示为

$$Z(\widetilde{A})=At^2+At^3, \tag{3.8}$$

且对任意的 $D\in\mathrm{Der}(\widetilde{A}),\ D(Z(\widetilde{A}))\subseteq Z(\widetilde{A})$, 及线性映射

$$f:At\oplus At^2\oplus Ut^3\mapsto At^2\oplus At^3,$$

如果 $f(A^1t^3)=0$, 则 $f\in Z(\mathrm{Der}(\widetilde{A}))$. 对任意 $g\in\mathrm{Der}(\widetilde{A})$ 和 $a\in A$, 设

$$g(at)=a't+b't^2+c't^3+u't^3,\quad a',b'\in A,c'\in A^1,u'\in U. \tag{3.9}$$

定义线性映射 $f:\widetilde{A}\to\widetilde{A},\ a,b\in A,c\in A^1,u\in U$,

$$f(at)=b't^2+c't^3+u't^3,\quad f(ct^3)=0,\quad f(bt^2+ut^3)=g(bt^2+ut^3).$$

根据 (3.8), 可得 $f\in Z(\mathrm{Der}(\widetilde{A}))$, 且

$$(g-f)(at)=a't,\quad (g-f)(ct^3)=c't^3.$$

根据 (3.9), 存在线性映射 h,h' 使得对任意的 $a\in A,c\in A^1,u\in U,\ h(a)=a',\ h'(c)=c',\ h'(u)=0$, 所以 $(h,h,h,h')\in\Delta(A)$, 得到 $h\in Q\mathrm{Der}(A),\ g-f=l_u(h)$. 结论得证.

4 3-李代数的拟导子

假设 3-李代数包含对角环面 T. 对任意 $x,y,z\in A$, 用 $\mu(x,y,z)$ 表示乘积运算 $[x,y,z]$. 设 (A,μ) 是 3-李代数, 称集合 $\mathrm{Ker}(\mu)$ 为 μ 的核, 其中

$$\mathrm{Ker}(\mu)=\{v\otimes w\otimes u\mid \mu(v,w,u)=0,\ v,w,u\in A\},\tag{4.1}$$

设 f 是 A 上的线性映射, 定义新的线性映射 $f^*: A\otimes A\otimes A\to A\otimes A\otimes A$,

$$f^*(v\otimes w\otimes u)=f(v)\otimes w\otimes u+v\otimes f(w)\otimes u+v\otimes w\otimes f(u),\quad v,w,u\in A.\tag{4.2}$$

定理 4.1 设 (A,μ) 是 3-李代数, $f\in \mathrm{Hom}(A,A)$. 则 $f\in Q\mathrm{Der}(A,\mu)$ 的充要条件为

$$f^*(\mathrm{Ker}(\mu))\subseteq \mathrm{Ker}(\mu),\tag{4.3}$$

即, 对 $v,w,u\in A$, 如果 $\mu(v,w,u)=0$, 则 $\mu(f(v),w,u)+\mu(v,f(w),u)+\mu(v,w,f(u))=0$.

证 如果 $f\in Q\mathrm{Der}(A)$, 设 $(f,f,f,f')\in\Delta(A)$, 由 (4.1), (4.2), 对任意 $v\otimes w\otimes u\in\mathrm{Ker}(\mu)$, $\mu(f^*(v\otimes w\otimes u))=\mu(f(v),w,u)+\mu(v,f(w),u)+\mu(v,w,f(u))=f'(\mu(v,w,u))=0$. 所以 $f^*(\mathrm{Ker}(\mu))\subseteq\mathrm{Ker}(\mu)$.

反之, 设 U 是 A^1 的补空间. 若 $f\in\mathrm{Hom}(A,A)$ 满足 (4.3), 定义线性映射 $f': A\to A$, 对 $u\in U, f'(u)=0$, 对 $z=\sum\limits_{i=1}^m\mu(v_i,w_i,u_i)\in A^1$, $f'(z)=\sum\limits_{i=1}^m\mu(f^*(v_i\otimes w_i\otimes u_i))$.

事实上, 如果 $z=\sum\limits_{i=1}^m\mu(v_i,w_i,u_i)$ 且 $z=\sum\limits_{j=1}^l\mu(v_j',w_j',u_j')$, $v_i,w_i,u_i,v_i',w_i',u_i'\in A$, $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant l$. 根据 (4.3), $\sum\limits_{i=1}^m(v_i\otimes w_i\otimes u_i)-\sum\limits_{j=1}^l(v_j'\otimes w_j'\otimes u_j')\in\mathrm{Ker}(\mu)$, 即 $\mu\big(f^*\big(\sum\limits_{i=1}^m(v_i\otimes w_i\otimes u_i)\big)\big)=\mu\big(f^*\big(\sum\limits_{j=1}^l(v_j'\otimes w_j'\otimes u_j')\big)\big)$. 则 f' 有意义. 且有 $\mu(f(v),w,u)+\mu(v,f(w),u)+\mu(v,w,f(u))=\mu(f^*(v\otimes w\otimes u))=f'(\mu(v,w,u)).v,w,u\in A$. 所以 $f\in Q\mathrm{Der}(A)$.

在文 [17–19] 中, 详细介绍了 3-李代数的模和上同调理论. 根据拟导子的描述, 设 A 是 3-李代数, V 是向量空间, 如果存在线性映射 $\alpha: A\wedge A\to\mathrm{End}(V)$, 对任意的 $x,y,z,w\in A$,

$$\alpha([x,y,z],w)=\alpha(y,z)\alpha(x,w)+\alpha(z,x)\alpha(y,w)+\alpha(x,y)\alpha(z,w),$$
$$\alpha(z,w)\alpha(x,y)-\alpha(x,y)\alpha(z,w)+\alpha([x,y,z],w)+\alpha(z,[x,y,w])=0,$$

则 (V,α) 称为 A 的表示, 或 V 称为 A-模. 如果 $\alpha(x,y)=0$, $x,y\in A$, 那么 V 称为平凡模. 若 $V=A$ 且 $\alpha(x,y)=\mathrm{ad}(x,y), x,y\in A$, 则称为 A 的伴随模.

在 3-李代数 A 中, 给出如下定义:

$$\begin{aligned}\delta_0(f)(x_1,x_2,x_3)=&f([x_1,x_2,x_3])-[f(x_1),x_2,x_3]-[x_1,f(x_2),x_3]\\&-[x_1,x_2,f(x_3)],\end{aligned}\tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\delta_1(f)(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=&\sum_{i=1}^{3}f(x_1,\cdots,[x_i,x_4,x_5],\cdots,x_3])-f([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5)\\&+\sum_{i=1}^{3}([x_1,\cdots,f(x_i,x_4,x_5),\cdots,x_3])\\&-[f(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5].\end{aligned}\tag{4.5}$$

记 $\mathrm{Ker}\,\delta_i=Z^i(A,A)\subseteq C^i(A,A)$, $B^{i+1}(A,A)=\mathrm{Im}(\delta_i)\subseteq C^{i+1}(A,A)$, $i=0,1$. 由 (4.4)–(4.5), $\delta_1\delta_0=0$.

设 $\dot{A}$ 是 A 的一个平凡模, 且 $C^0(A,\dot{A})=\mathrm{Hom}(A,\dot{A})$, $C^1(A,\dot{A})=\mathrm{Hom}(A\otimes A\otimes A,\dot{A})$, $C^2(A,\dot{A})=H(A^{\otimes 5},\dot{A})$. 定义 $\dot{\delta}_0:C^0(A,\dot{A})\to C^1(A,\dot{A})$, $\dot{\delta}_1:C^1(A,\dot{A})\to C^2(A,\dot{A})$, $x_i\in A, 1\leqslant i\leqslant 5$,

$$\dot{\delta}_0(f)(x,y,z)=f([x,y,z]),\tag{4.6}$$

$$\dot{\delta}_1(f)(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\sum_{i=1}^{3}f(x_1,[x_i,x_4,x_5],x_3)-f([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5),\tag{4.7}$$

那么 $\dot{\delta}_1\dot{\delta}_0=0$.

定理 4.2 设 A 是 3-李代数, f,f' 是 A 的线性映射, 则

(1) $f\in Q\mathrm{Der}(A)$ 当且仅当 $\delta_0(f)\in B^1(A,\dot{A})$, $(f,f,f,f')\in\Delta(A)$ 当且仅当 $\delta_0(f)=\dot{\delta}_0(f-f')$.

(2) 设 $\dot{\delta}_0(f)\in Z^1(A,A)$, $x,y,z,u,v\in A$, 则

$$[f([x,y,z]),u,v]=[f([x,u,v]),y,z]+[x,f([y,u,v]),z]+[x,y,f([z,u,v])].\tag{4.8}$$

如果 $(f,f,f,f')\in\Delta(A)$, 则

$$\begin{aligned}&[(f-f')([x,y,z]),u,v]\\=&[(f-f')([x,u,v]),y,z]+[x,(f-f')([y,u,v]),z]+[x,y,(f-f')([z,u,v])].\end{aligned}$$

证 设 $f\in Q\mathrm{Der}(A)$, $(f,f,f,f')\in\Delta(A)$, 根据 (4.4), 可得

$$\delta_0(f)(x,y,z)=(f-f')([x,y,z])=\dot{\delta}_0(f-f')(x,y,z).$$

所以 $\delta_0(f)\in B^1(A,\dot{A})$ 且 $\delta_0f=\dot{\delta}_0(f-f')$.

反之, 若 $\delta_0(f)\in B^1(A,\dot{A})$, 则存在 $f'\in C^0(A,\dot{A})$ 满足 $\delta_0(f)=\dot{\delta}_0f', x,y,z\in A$,

$$\delta_0(f)(x,y,z)=f[x,y,z]-[f(x),y,z]-[x,f(y),z]-[x,y,f(z)]=\delta_0f'[x,y,z]=f'[x,y,z],$$

所以 $(f'-f)([x,y,z])=[f(x),y,z]+[x,f(y),z]+[x,y,f(z)]$ 成立.

设 $f\in\mathrm{Hom}(A,A)$ 满足 $\dot{\delta}_0f\in Z^1(A,A)$, 则 $\delta_1\dot{\delta}_0(f)=0$. 根据 (4.5), 对任意 $x,y,z,u,v\in A$, $\delta_1\dot{\delta}_0(f)(x,y,z,u,v)=[f([x,u,v]),y,z]+[x,f([y,u,v]),z]+[x,y,f([z,u,v])]-[f[x,y,z],u,v]=0$. 可得 (4.8).

设 $(f,f,f,f')\in\Delta(A)$. 利用结论 (1), 可得 $\delta_0(f)=\dot{\delta}_0(f-f')$. 因为 $\dot{\delta}_0(f)\in Z^1(A,A)$ 且 $\delta_0(f)\in Z^1(A,A)$, 得到 $f-f'$ 满足 (4.8).

设 A 是特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数, 包含可对角化的环面 T, 且 A 关于 T 的特征根子空间为

$$A=\sum_{\gamma\in\Omega}A_\gamma,\quad A_\gamma=\{x\in A\mid\ t_1,t_2\in T,\mathrm{ad}(t_1,t_2)(x)=\gamma(t_1,t_2)x,\},\quad A_0=T,\tag{4.9}$$

其中 $\Omega\subseteq(T\wedge T)^*-\{0\}$ 是 $T\wedge T$ 的对偶空间. 若 $A_\alpha\neq0$, 则称 α 为 A 关于 T 的权.

例如, 设 A 是复数域 $\mathbb{F}$ 上的 4-维 3-李代数[20, 引理3.1], 除去 (b^1) 和 (c^2) 的情形, A 的对角化环面是由 e_3,e_4 张成的线性空间.

设 A 是包含对角环面 T 的 3-李代数, 定义线性映射

$$(d(t_1,t_2)f)(x)=[t_1,t_2,f(x)]-f([t_1,t_2,x])=(\mathrm{ad}(t_1,t_2)f-f\mathrm{ad}(t_1,t_2))(x).\tag{4.10}$$

对任意 $t_1,t_2\in T$, $f\in\mathrm{Hom}(A,A)$, 用 $(t_1,t_2)f$ 代替 $d(t_1,t_2)f$, $A_0=T$.

引理 4.1 设 A 是域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数. 则对任意 $t_1,t_2,t_3,t_4\in T$, $f\in Q\mathrm{Der}(A)$,

(1) $(t_1,t_2)f\in Q\mathrm{Der}(A)$, 即 $(T,T)Q\mathrm{Der}(A)\subseteq Q\mathrm{Der}(A)$,

(2) $(t_1,t_2)(t_3,t_4)f-(t_3,t_4)(t_1,t_2)f=0$,

(3) $$((t_1,t_2)^n\cdot f)(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\mathrm{ad}^{n-k}(t_1,t_2)f\mathrm{ad}^k(t_1,t_2)(x).\tag{4.11}$$

证 设 $f\in Q\mathrm{Der}(A)$, $(f,f,f,f')\in\Delta(A)$, 对任意 $t_1,t_2\in T$, $x,y,z\in A$, 根据 (4.10),

$$\begin{aligned}
&[(t_1,t_2)f(x),y,z]+[x,y,(t_1,t_2)f(y),z]+[x,y,(t_1,t_2)f(z)]\\
=&[\mathrm{ad}(t_1,t_2)f(x),y,z]+[f(x),\mathrm{ad}(t_1,t_2)(y),z]+[f(x),y,\mathrm{ad}(t_1,t_2)(z)]\\
&+[\mathrm{ad}(t_1,t_2)(x),f(y),z]+[x,\mathrm{ad}(t_1,t_2)f(y),z]+[x,f(y),\mathrm{ad}(t_1,t_2)(z)]\\
&+[\mathrm{ad}(t_1,t_2)(x),y,f(z)]+[x,\mathrm{ad}(t_1,t_2)(y),f(z)]+[x,y,\mathrm{ad}(t_1,t_2)f(z)]\\
&-([f(\mathrm{ad}(t_1,t_2)(x)),y,z]+[\mathrm{ad}(t_1,t_2)(x),f(y),z]+[\mathrm{ad}(t_1,t_2)(x),y,f(z)])\\
&-([f(x),\mathrm{ad}(t_1,t_2)(y),z]+[x,f(\mathrm{ad}(t_1,t_2)(y)),z]+[x,\mathrm{ad}(t_1,t_2)(y),f(z)])\\
&-([f(x),y,\mathrm{ad}(t_1,t_2)(z)]+[x,f(y),\mathrm{ad}(t_1,t_2)(z)]+[x,y,f(\mathrm{ad}(t_1,t_2)(z))])\\
=&\,\mathrm{ad}(t_1,t_2)f'([x,y,z])-f'\mathrm{ad}(t_1,t_2)([x,y,z]).
\end{aligned}$$

所以 $((t_1,t_2)f,(t_1,t_2)f,(t_1,t_2)f,\mathrm{ad}(t_1,t_2)f'-f'\mathrm{ad}(t_1,t_2))\in\Delta(A)$. 结论 (1) 得证.

从 (4.10) 可得结论 (2). 下面证明 (4.11).

如果 $n=2$, 则有

$$\begin{aligned}
((t_1,t_2)^2f)(x)&=[t_1,t_2,\ ((t_1,t_2)f)(x)]-((t_1,t_2)f)([t_1,t_2,x])\\
&=\mathrm{ad}^2(t_1,t_2)f(x)-2\mathrm{ad}(t_1,t_2)f\mathrm{ad}(t_1,t_2)(x)+f\mathrm{ad}^2(t_1,t_2)(x).
\end{aligned}$$

假设 (4.11) 在 n 的情形成立. 所以

$$((t_1,t_2)^{n+1}f)(x)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+1}^k\mathrm{ad}^{n+1-k}(t_1,t_2)f\mathrm{ad}^k(t_1,t_2)(x).$$

结论得证.

根据引理 4.1, $Q\mathrm{Der}(A)$ 关于 T 的 Fitting 分解为

$$Q\mathrm{Der}(A) = Q\mathrm{Der}(A)_0 \oplus \sum_{\alpha\in\Lambda} Q\mathrm{Der}(A)_\alpha, \tag{4.12}$$

其中 $\Lambda \subseteq (T\wedge T)^* - \{0\}$,

$Q\mathrm{Der}(A)_0 = \{f \mid f\in Q\mathrm{Der}(A), t_1, t_2 \in T$, 存在正整数 m 使得 $(t_1,t_2)^m f = 0\}$,

$Q\mathrm{Der}(A)_\alpha = \{f \mid f\in Q\mathrm{Der}(A)$ 对所有的 $t_1,t_2\in T$, 存在正整数 m 使得 $((t_1,t_2)-\alpha(t_1,t_2)I_d)^m f = 0\}$.

设 $\alpha\in\Lambda$, 如果 $Q\mathrm{Der}(A)_\alpha\neq 0$, 则称 α 称为 T 的一个权.

引理 4.2 设 A 是 3-李代数, $\alpha\in\Lambda$, $\gamma\in\Omega$, 则 $Q\mathrm{Der}(A)_\alpha(A_\gamma)\subseteq A_{\alpha+\gamma}$.

证 对 $f\in Q\mathrm{Der}(A)_\alpha, x_\gamma\in A_\gamma$, 及 $t_1,t_2\in T$, 有 $f(x_\gamma) = \sum\limits_{\beta\in(T\wedge T)^*} x_\beta$, $x_\beta\in A_\beta$. 根据 (4.9)–(4.11) 和引理 4.1, 存在整数 m, 使得 $((t_1,t_2)-\alpha(t_1,t_2)I_d)^m f = 0$. 因为

$$\begin{aligned}
(((t_1,t_2)-\alpha(t_1,t_2)I_d)^m f)(x_\gamma) &= \sum_{s=0}^{m}(-1)^{(m-s)}C_m^s\alpha(t_1,t_2)^{m-s}((t_1,t_2)^s f)(x_\gamma)\\
&= \sum_{\beta\in(T\wedge T)^*}\sum_{s=0}^{m}(-1)^{(m-s-1)}C_m^s\alpha(t_1,t_2)^{m-s}(\beta-\gamma)(t_1,t_2)^s x_\beta\\
&= -\sum_{\beta\in(T\wedge T)^*}(\beta-\gamma-\alpha)(t_1,t_2)x_\beta\\
&= (\gamma+\alpha)(t_1,t_2)f(x_\gamma)-(t_1,t_2)f(x_\gamma),
\end{aligned}$$

所以 $f(x_\gamma)\in A_{\alpha+\gamma}$.

定理 4.3 设 A 是 3-李代数. 则 T 在 $Q\mathrm{Der}(A)$ 上的作用是对角化的, 即

$$Q\mathrm{Der}(A)_\alpha = \{f \mid f\in Q\mathrm{Der}(A), t_1,t_2\in T, (t_1,t_2)f = \alpha(t_1,t_2)f\}. \tag{4.13}$$

对 $f\in Q\mathrm{Der}(A)_0$, 如果 $t_1,t_2\in T$, 则 $(t_1,t_2)f=0$. 若 $f\in Q\mathrm{Der}(A)_0\cap\mathrm{Der}(A)$, 则对任意 $t_1,t_2\in T$, $\gamma\in\Omega$, 有 $\gamma(f(t_1),t_2)+\gamma(t_1,f(t_2))=0$.

证 根据 (4.10) 和引理 4.2, 设 $f\in Q\mathrm{Der}(A)_\alpha, x_\gamma\in A_\gamma$ 且 $t_1,t_2\in T$, $((t_1,t_2)f)(x_\gamma) = (\alpha+\gamma)(t_1,t_2)f(x_\gamma)-\gamma(t_1,t_2)f(x_\gamma) = \alpha(t_1,t_2)f(x_\gamma)$. 等式 (4.13) 得证.

设 $f\in\mathrm{Der}(A)\cap Q\mathrm{Der}(A)_0$, $\gamma\in\Omega$, $x_\gamma\in A_\gamma$, $x_\gamma\neq 0$, 根据引理 4.2 $[f(t_1),t_2,x_\gamma]+[t_1,f(t_2),x_\gamma]+[t_1,t_2,f(x_\gamma)] = \gamma(t_1,t_2)f(x_\gamma)$. 因此 $\gamma(f(t_1),t_2)+\gamma(t_1,f(t_2)=0$, 结论得证.

5　3-李代数的拟型心

根据定理 3.2, 3-李代数的广义导子可分解为拟导子和拟型心的直和, 在本章中, 我们研究 3-李代数拟型心的结构. 由第 3 章可知, $Q\mathrm{Der}(A)$ 包含 $\Gamma(A)$, 且 $\Gamma(A)$ 和 $Q\Gamma(A)$ 是结合代数. 如果 $Z(A)=0$, $\Gamma(A)$ 和 $Q\Gamma(A)$ 是可交换的.

引理 5.1 设 A 是 3-李代数, 则

(1) $[\Gamma(A), Q\Gamma(A)] \subseteq \mathrm{Hom}(A, Z(A))$,

(2) 如果 $f \in \Gamma(A)$, 则 $\mathrm{Ker}(f)$ 和 $\mathrm{Im}(f)$ 是 A 的理想,

(3) 如果 A 不可分解, 并且对于 $f \in \Gamma(A)$, x^2 不能整除 f 的最小多项式, 则 f 是可逆的,

(4) 如果 A 是不可分解, 且 $\Gamma(A)$ 由半单元构成, 则 $\Gamma(A)$ 是个域.

证 直接进行计算可得到结论, 省略计算过程.

根据引理 3.1, 拟型心 $Q\Gamma(A)$ 是 3-李代数 A-模, 其作用如下

$$((x,y)f)(z) = (\mathrm{ad}(x,y)f - f\mathrm{ad}(x,y))(z), \quad f \in Q\Gamma(A),\ x,y,z \in A, \tag{5.1}$$

因此 $Q\Gamma(A)$ 是 T-模.

引理 5.2 设 A 是域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数, 且 $ch\mathbb{F} \neq 2$. 则对 $f \in Q\Gamma(A)$, $x, y \in A$, 有

$$[x, f(x), y] = 0, \mathrm{ad}(x,y)\mathrm{ad}(f(x),y) = \mathrm{ad}(f(x),y)\mathrm{ad}(x,y),$$
$$((x,y)f)(z) = ((y,z)f)(x) = ((z,x)f)(y), \mathrm{ad}^m(f(x),y) = \mathrm{ad}^m(x,y)f^m,$$
$$\mathrm{ad}^{m+1}(x,y)f = \mathrm{ad}(f(x),y)\mathrm{ad}^m(x,y),$$

其中 m 是正整数.

证 对任意 $f \in Q\Gamma(A)$, $x, y, z \in A$, 因为 $[x, f(x), y] = [f(x), x, y]$ 且 $ch\mathbb{F} \neq 2$, 则 $[x, f(x), y] = 0$. 又因为

$$[\mathrm{ad}(x,y), \mathrm{ad}(f(x),y)] = \mathrm{ad}([x,y,f(x)],y) + \mathrm{ad}(f(x),[x,y,y]) = 0,$$

所以 $\mathrm{ad}(x,y)$ 和 $\mathrm{ad}(f(x),y)$ 是可交换的, 得等式 $((x,y)f)(z) = ((y,z)f)(x) = ((z,x)f)(y)$.

当 $m = 2$ 时, $\mathrm{ad}^2(f(x),y)(z) = \mathrm{ad}(f(x),y)\mathrm{ad}(f(x),y)(z) = [f(x), y, [x, y, f(z)]] = [[f(x),y,x],y,f(z)] + [x,[f(x),y,y],f(z)] + [x,y,[f(x),y,f(z)]] = \mathrm{ad}^2(x,y)f^2(z)$. 所以 m 的情形得到 $\mathrm{ad}^m(f(x),y)(z) = \mathrm{ad}^{m-1}(x,y)([x,y,f^m])(z) = \mathrm{ad}^m(x,y)f^m(z)$.

设 A 是特征为零代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数, 且包含对角环面 T. 经过第 4 章的讨论, A 有分解 (4.9), 并且 $Q\Gamma(A)$ 作为 T-模具有 Fitting 分解

$$Q\Gamma(A) = Q\Gamma(A)_0 + Q\Gamma(A)_1, \quad Q\Gamma(A)_1 = \sum_{\alpha\in\Pi} Q\Gamma(A)_\alpha, \tag{5.2}$$

$\Pi \subseteq (T \wedge T)^* - \{0\}$, 且 m 为正整数,

$$Q\Gamma(A)_\alpha = \{f \in Q\Gamma(A) \mid t_1, t_2 \in T, (t_1,t_2)f = ((t_1,t_2) - \alpha(t_1,t_2)I_d)^m f = 0\}.$$

设 A 是代数闭域 $\mathbb{F}$ 上特征为零的 3-李代数, 并且包含可对角化的环面 T, 即 $A_0 = T$.

定理 5.1 设 A 是 3-李代数, 则

(1) 作为 T-模, $Q\Gamma(A)$ 分解 (5.2) 可以对角化, 即

$$Q\Gamma(A)_\alpha = \{f \mid f \in Q\Gamma(A),\ (t_1,t_2)f = \alpha(t_1,t_2)f, t_1, t_2 \in T\}. \tag{5.3}$$

(2) 对任意的 $\alpha \in \Pi$ 且 $\gamma \in \Omega$, $Q\Gamma(A)_\alpha(A_\gamma) \subseteq A_{\alpha+\gamma}$, $Q\Gamma(A)(T) \subseteq T$.

证 根据引理 4.2 和定理 4.3 可得结论 (1).

根据引理 5.2, 对任意的 $f \in Q\Gamma(A),\ x, y, z \in T,\ \mathrm{ad}^{m+1}(x, y)f(z) = \mathrm{ad}(f(x), y)$ $\mathrm{ad}^m(x, y)(z) = 0$. 所以 $f(T) \subseteq T$.

定理 5.2 设 A 是 3-李代数, 则

(1) $Q\Gamma(A)_0(A_1) \subseteq A_1$, (2) $Q\Gamma(A)_1(T) = 0$,

(3) $Q\Gamma(A)_1(A_1) \subseteq Z_A(T) = \{x \in A \mid [x, T, A] = 0\}$, 因此 $Q\Gamma(A)_1(A) \subseteq Z_A(T)$,

(4) $\alpha, \beta \in \Omega$, 若 $\alpha + \beta \neq 0$, 则

$$(A_\alpha, A_\beta)Q\Gamma(A)_0 = 0, (A_\alpha, A_{-\alpha})Q\Gamma(A)_0 \subseteq Q\Gamma(A)_0,$$
$$(A_\alpha, A_{-\alpha})Q\Gamma(A)_0(A_1) = 0,$$

(5) $((T, A_1)Q\Gamma(A)_0)(T) = 0$,

证 定义线性映射 $\sigma : Q\Gamma(A) \otimes A \to A$, 对 $f \in Q\Gamma(A),\ z \in A,\ \sigma(f \otimes z) = f(z)$. 根据 (5.1), $\sigma((x, y)f \otimes z + f \otimes \mathrm{ad}(x, y)z) = \mathrm{ad}(x, y)\sigma(f \otimes z)$, 即 σ 是模同构. 所以 $Q\Gamma(A)_0(A_1) \subseteq A_1$, 结论 (1) 成立.

根据定理 5.1, $Q\Gamma(A)_1(T) \subseteq T,\ Q\Gamma(A)_1(T) \subseteq A_1$, 所以 $Q\Gamma(A)_1(T) \subseteq A_1 \cap T = 0$. 结论 (2) 成立. 根据结论 (2) 可得 (3).

设 $\alpha, \beta \in \Omega,\ x_\alpha \in A_\alpha,\ y_\beta \in A_\beta, z \in A,\ h_1, h_2 \in T,\ f_0 \in Q\Gamma(A)_0$.

如果 $\alpha + \beta \neq 0$, 则 $((h_1, h_2)(x_\alpha, x_\beta)f_0)(z) = (\alpha + \beta)(h_1, h_2)((x_\alpha, x_\beta)f_0)(z)$, 可得

$$(x_\alpha, x_\beta)f_0 \in Q\Gamma(A)_{\alpha+\beta} \subseteq Q\Gamma(L)_1. \tag{5.4}$$

根据定理 5.1 和结论 (3), $\delta \in \Omega$, 且

$$(x_\alpha, x_\beta)Q\Gamma(A)_0(A_\delta) \subseteq Q\Gamma(A)_{\alpha+\beta}(A_\delta) \subseteq A_{\alpha+\beta+\delta}, \tag{5.5}$$

$(x_\alpha, x_\beta)Q\Gamma(A)_0(A_\delta) \subseteq T$. 如果 $\alpha + \beta + \delta \neq 0$, 则 $(x_\alpha, x_\beta)Q\Gamma(A)_0(A_\delta) = 0$.

设 $((x_\alpha, x_\beta)Q\Gamma(A)_0)(A_1) \neq 0$, 存在 $\delta, \lambda, \mu \in \Omega$, 及非零 $z_\delta \in A_\delta, m_\lambda \in A_\lambda,\ n_\mu \in A_\mu,\ f \in Q\Gamma(A)_0$ 满足 $[((x_\alpha,\ y_\beta)f)(z_\delta),\ m_\lambda, n_\mu] \neq 0$. 则 $[((x_\alpha, x_\beta)f)(z_\delta),\ m_\lambda, n_\mu] = [z_\delta, ((x_\alpha, x_\beta)f)(m_\lambda), n_\mu] = [z_\delta, m_\lambda, ((x_\alpha,\ x_\beta)f)(n_\mu)] \neq 0$. 根据上面的讨论, 我们得到 $\alpha + \beta + \delta = \alpha + \beta + \lambda = 0,\ \alpha + \beta + \mu = 0,\ \lambda + \mu = \delta + \mu = \delta + \lambda$, 可得 $\delta = \lambda = \mu = 0$, 矛盾. 所以 $\alpha + \beta \neq 0,\ (A_\alpha, A_\beta)Q\Gamma(A)_0 = 0$.

如果 $\alpha + \beta = 0,\ h_1, h_2 \in T,\ f_0 \in Q\Gamma(A)_0, (h_1, h_2)(x_\alpha, x_{-\alpha})f_0 = (x_\alpha,\ x_{-\alpha})(h_1, h_2)f_0 + [(h_1,\ h_2), (x_\alpha, x_{-\alpha})]f_0 = 0$. 即 $(A_\alpha, A_{-\alpha})Q\Gamma(A)_0 \subseteq Q\Gamma(A)_0$. 根据引理 5.2 和定理 5.1, $f_0 \in \Gamma(A)_0,\ \delta \in \Omega,\ x_\delta \in A_\delta, (x_\alpha, x_\alpha)f_0(x_\delta) = (x_\alpha, x_\delta)f_0(x_\alpha) = (x_\delta,\ x_\alpha)f_0(x_{-\alpha}) = 0$. 因此 $((x_\alpha, x_{-\alpha})f_0)(A_1) = 0$. 结论 (4) 得证.

根据引理 5.2 和定理 5.1, $(T, T)Q\Gamma(L)_0 = 0,\ ((T, A_1)Q\Gamma(A)_0)(T) = ((T, T)Q\Gamma(A)_0)(A_1) = 0$. 结论 (5) 成立.

定理 5.3 设 A 是具有平凡中心的 3-李代数, 则

$$Q\Gamma(A) = \Gamma(A) \oplus Q\Gamma(A)_1, \quad Q\Gamma(A)_1 Q\Gamma(A)_1 = 0.$$

证 首先证明 $\Gamma(A) = Q\Gamma(A)_0$. 易见 $\Gamma(A) \subseteq Q\Gamma(A)_0$. 根据引理 5.2, 对任意 $f_0 \in$

$Q\Gamma(A)_0$, $t_1,t_2\in T$,

$$(t_1,t_2)f_0=0,\quad x\in A,\ t\in T,$$

$$[t_1,t_2,f_0(x)]=f_0([t_1,t_2,x]),\quad [t_1,t_2,f_0(t)]=f_0([t_1,t_2,t])=0.$$

由定理 5.2, 对任意 $\alpha,\beta\in\Omega$, $x_\alpha\in A_\alpha$, $x_\beta\in A_\beta$, $x\in A$, $f_0\in Q\Gamma(A)_0$, $\alpha+\beta\neq 0$, $((x_\alpha,x_\beta)f_0)(x)=0$, $f_0([x_\alpha,x_\beta,x])=[x_\alpha,x_\beta,f_0(x)]$.

若 $\alpha+\beta=0$, 则 $t\in T,\delta\in\Omega,x_\delta\in A_\delta$, $((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(x_\delta)=0$. 因此 $f_0([x_\alpha,\ x_{-\alpha},x_\delta])=[x_\alpha,x_{-\alpha},f_0(x_\delta)]-((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(x_\delta)=[x_\alpha,x_{-\alpha},f_0(x_\delta)]$.

因为 $((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(t)\in T$, 所以 $[((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(t),T,T]=0,[((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(t),x_\delta,A]=[t,((x_\alpha,\quad x_{-\alpha})f_0)(x_\delta),A]=0$, 即 $((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(t)\in Z(A)=0$, $((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(T)=0$. 所以 $f_0([x_\alpha,x_{-\alpha},t])=[x_\alpha,x_{-\alpha},f_0(t)]$.

综上所述, $f_0\in\Gamma(A),\Gamma(A)=Q\Gamma(A)_0$, $Q\Gamma(A)_1Q\Gamma(A)_1(A)\subseteq Q\Gamma(A)_1(T)=0$, 结论得证.

定理 5.4 设 3-李代数 A 满足 $A=A_1\oplus A_2$, $[A_1,A_2,A]=0$. 则

$$Q\Gamma(A)=Q\Gamma(A_1)+Q\Gamma(A_2)+\Gamma_1+\Gamma_2,$$

其中 $\Gamma_i=\{f\in \mathrm{Hom}(A_i,A_j)\mid f(A_i)\subseteq Z(A_j),1\leqslant i\neq j\leqslant 2\}$.

证 由上面的讨论可知 $Q\Gamma(A_1)+Q\Gamma(A_2)+\Gamma_1+\Gamma_2\subseteq Q\Gamma(A)$.

设 $p_i\in\mathrm{Hom}(A,A_i)$, $i=1,2$ 是投影映射, 即对 $x=x_1+x_2\in A$, $x_i\in A_i$, $p_i(x)=x_i$, $i=1,2$. 对 $f\in Q\Gamma(A)$, 定义 $f_i\in\mathrm{Hom}(A_i,A_i)$, $i=1,2$, $f_3\in\mathrm{Hom}(A_1,A_2)$, $f_4\in\mathrm{Hom}(A_2,A_1)$,

$$f_1(x)=p_1f(x),\quad f_2(y)=p_2f(y),\quad f_3(x)=p_2f(x),\quad f_4(y)=p_1f(y),\quad x\in A_1,\ y\in A_2.$$

不失一般性, 设 $f_1(A_2)=f_3(A_2)=0$, $f_2(A_1)=f_4(A_1)=0$. 则对任意 $x=x_1+x_2\in A$, $x_1\in A_1$, $x_2\in A_2$, $f(x)=f(x_1)+f(x_2)=(f_1+f_2+f_3+f_4)(x)$.

因为 $[A,A_1,A_2]=0$, $f_1\in QC(A_1)$, $f_2\in QC(A_2)$, 则对任意 $x\in A_1,y,z\in A_2$,

$$[f_3(x),y,z]=[f(x),y,z]=[x,f(y),z]=0,\quad [f_3(A_1),A_2,A_2]=0,$$

即 $f_3\in\Gamma_1$. 类似讨论, 得到 $f_4\in\Gamma_2$, $Q\Gamma(A)\subseteq Q\Gamma(A_1)+Q\Gamma(A_2)+\Gamma_1+\Gamma_2$. 结论得证.

根据定理 5.4, 可得下面推论.

推论 5.1 设 A 是 3-李代数且具有分解 $A=A_1\oplus\cdots\oplus A_m$, 其中 $[A_i,A_j,A]=0$, $1\leqslant i\neq j\leqslant m$. 则 $Q\Gamma(A)=Q\Gamma(A_1)+\cdots+Q\Gamma(A_m)+\sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant m}\Gamma_{ij}$, 其中 $\Gamma_{ij}=\{f\in\mathrm{Hom}(A_i,A_j)\mid f(A_i)\subseteq Z(A_j),\,1\leqslant i\neq j\leqslant m\}$.

参 考 文 献

[1] Filippov V. n-Lie algebras [J]. *Sib Mat Zh,* 1985, 26(6):126–140.

[2] Bagger J, Lambert N. Gauge symmetry and supersymmetry of multiple $M2$-branes [J]. *Phys Rev D,* 2008, 77(6):215–240.

[3] Ho P, Hou R, Matsuo Y. Lie 3-algebra and multiple $M2$-branes [J]. *GHEP*, 2008, 2008(6):561–565.

[4] Gustavsson A. Algebraic structures on parallel $M2$-branes [J]. *Nuclear Physics B*, 2009, 81(1):66–76.

[5] Papadopoulos G. $M2$-branes, 3-Lie algebras and Plucker relations [J]. *JHEP*, 2008, 2008(5):645–677.

[6] Ho P, Imamura Y, Matsuo Y. $M2$ to $D2$ revisited, [J]. *JHEP*, 2008, 2008(7):807–813.

[7] Wang D, Yu Q. Derivations of the parabolic subalgebras of the general linear Lie algebra over a commutative ring [J]. *Linear Algebra Appl*, 2006, 418(2):763–774.

[8] Lu F. Lie triple derivations on nest algebras [J]. *Math Nachr*, 2007, 280(8):882–887.

[9] Cheung W. Lie derivations of triangular algebras [J]. *Linear Multi Algebra*, 2003, 51(51):299–310.

[10] Yu W, Zhang G. Nonlinear Lie derivations of triangular algebras [J]. *Linear Algebra Appl,* 2010, 432(11):2953–2960.

[11] Bai R, Wu W, Li Y, Li Z. Module extensions of 3-Lie algebras [J]. *Linear Multi Algebra*, 2012, 60(4):433–447.

[12] Bai R, Wang J, Li Z. Derivations of the 3-Lie algebra realizated by gl(n, C) [J]. *J Nonl Math Phys,* 2011, 18(1):151–160.

[13] Bai R, Zhang Z, Li H, Shi H. Inner derivation algebras [J]. *Commu Algebra*, 2000, 28(6):2927–2934.

[14] Dzhumadil'daev A. Representations of n-Lie algebras [J]. *Czechoslovak journal of Physics,* 2002, 48(2):1457–1464, arXiv:math/0202041v1.

[15] Leger G, Luks E. Generalized derivations of Lie algebras [J]. *J Algebra*, 2000, 228(1):165–203.

[16] Bai R, An H, Li Z. Centroid structures of n-Lie algebras [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2009, 430(430):229–240.

[17] Kasymov S. Solvability in representations of n-Lie algebras [J]. *Siberian Math Journal,* 1998, 39(2):289–291.

[18] Azcárraga J, Izquierdo J. Cohomology of Filippov algebras and an analogue of Whitehead's lemma [J]. *J Phys Conf Ser,* 2009, 2009(175):012001.

[19] Azcárraga J, Izquierdo J. n-ary algebras: A review with applications [J]. *J Phys A: Math Theor,* 2010, 43(29):18399–1860.

[20] Bai R, Zhang G, Zhang Y. On classification of n-Lie algebras [J]. *Front Math China*, 2011, 6(4):581–606.

Generalized Derivations of 3-Lie Algebras

BAI Ruipu[1] LI Qiyong[1] ZHANG Kai[2]

[1]College of Mathematics and Computer Science, Hebei University, Baoding 071002, Hebei, China.
E-mail: bairuipu@hbu.edu.cn; liqiyong@163.com

[2]Library, Agricultural University of Hebei, Baoding, 071001, Hebei, China.
E-mail: zhangkai@hebau.edu.cn

Abstract The authors introduce generalized derivations, quasiderivations and quasicentroid of 3-Lie algebras, and studied their relations. They also investigate the structure of quasiderivations and quasicentroid of 3-Lie algebras that contains a maximal diagonalized torus. It is proved that (1) the generalized derivation algebra $G\mathrm{Der}(A)$ of a 3-Lie algebra A is the direct sum of quasiderivation algebra $Q\mathrm{Der}(A)$ and quasicentroid $Q\Gamma(A)$; (2) quasiderivations of A can be embedded as derivations in a larger algebra; (3) quasiderivation algebra $Q\mathrm{Der}(A)$ normalizes quasicentroid, that is, $[Q\mathrm{Der}(A), Q\Gamma(A)] \subseteq Q\Gamma(A)$; (4) if A contains a maximal diagonalized torus T, then $Q\mathrm{Der}(A)$ and $Q\Gamma(A)$ are diagonalized T-modules, that is, as T-modules, (T,T) semi-simplely acts on $Q\mathrm{Der}(A)$ and $Q\Gamma(A)$, respectively.

Keywords 3-Lie algebra, Derivation, Generalized derivation, Quasiderivation, Quasicentroid

2000 MR Subject Classification 17B05, 17B30

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 38 No. 4, 2017
by ALLERTON PRESS, INC., USA