数学年刊 A 辑
2017, 38(4):447–460
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2017.0036

3-李代数的广义导子*

白瑞蒲[1]　李奇勇[1]　张　凯[2]

提要　给出了 3-李代数的广义导子、拟导子、拟　心的定义, 研究了他们之间的结构关　, 并对具有极大对角环面的 3-李代数的拟导子和拟　心结构进行了　统的研究. 证明了 (1) 广义导代数 $G\mathrm{Der}(A)$ 可以分解成拟导子代数 $Q\mathrm{Der}(A)$ 和拟　心 $Q\Gamma(A)$ 的直和; (2) 3-李代数 A 的拟导子可以扩张成一个具有较大维数的 3-李代数的导子; (3) 拟导子代数 $Q\mathrm{Der}(A)$ 包含在拟　心的正规化子中, 表示为 $[Q\mathrm{Der}(A), Q\Gamma(A)] \subseteq Q\Gamma(A)$; (4) 如果 A 包含极大对角环面 T, 那么 $Q\mathrm{Der}(A)$ 和 $Q\Gamma(A)$ 是 T 的对角模, 也就是 (T, T) 半单地作用在 $Q\mathrm{Der}(A)$ 和 $Q\Gamma(A)$ 上.

关键词　3-李代数, 导子, 广义导子, 拟导子, 拟　心
MR (2000) 主题分类　17B05, 17B30
中图法分类　O152.5
文献标志　A
文章编号　1000-8314(2017)04-0447-14

1　绪　论

3-李代数[1]与数学和数学物理学中的很多领域有着密切的关系[2−5]. 3-李代数可以应用于 Bagger-Lambert[2]和 Gustavsson[4]的多元 **M**2 模理论, 这些理论对时空体积的超对称有着重要的影响. 这些理论中的一致对称性, 需要利用 3-李代数结构中的 Jacobi 等式[6]. 在文 [6] 中, Ho, Imamura 和 Matsuo 研究了由 Bagger-Lambert 和 Gustavson 提出的多元 **M**2-膜理论到多元 **D**2-理论的两类导子. 其中一类定义在 3-李代数上, 且它蕴含了一个已知李代数的生成元, 这样的扩张包含了负范数的生成元. 通过适当的选择这样的扩张, 人们可能会限制特征零域和正特征域来保持几乎所有的 BLG 理论的对称性.

导子的概念以许多不同的形式出现在数学的不同领域. 在代数系统里, 导子是满足 Leibniz 关系的线性映射. 人们研究了几类导子. 例如: 三角导子、广义导子、拟导子[7−10]等. 导子、内导子等在 **n**-李代数结构理论研究中是十分有用的[11−13], 且已证明了 **n**-李代数 **L** 的自同构群 Aut(**L**) 的李代数是它的导子代数 Der(**L**), 并且如果 **M** 是一个 **L**-模, **M** 也是其内导子代数 ad(**L**) 的模. 通过这个关系, 给出了复数域上有限维单 **n**-李代数的不可约模的分类[14].

本文要研究 3-李代数的广义导子. 在文 [15] 中, 定义了李代数的广义导子, 拟导子和拟型心, 但 3-李代数的广义导子与李代数上的广义导子的结构有很大的不同 (见本文的第

本文 2015 年 2 月 28 日收到, 2017 年 1 月 4 日收到修改稿.
[1]河北大学数学与信息科学学院, 河北 保定 071002.
E-mail: bairuipu@hbu.edu.cn;　liqiyong2012@163.com
[2]河北农业大学图书馆, 河北 保定 071001. E-mail: zhangkai@hebau.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11371245) 和河北省自然科学基金 (No. A2014201006) 的资助.

4 部分和第 5 部分). 在本文中,

定义 2.2 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数. $\mathbf{A}$ 的拟型心, 用 $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 表示, 是满足下面等式的线性映射张成的线性空间

$$[\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}]=[\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]=[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{z})],\quad \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{A}. \tag{2.5}$$

3 广义导子

本章研究 3-李代数 $\mathbf{A}$ 中 $\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 和 $\Gamma(\mathbf{A})$ 之间的关系, 并且证明 3-李代数 $\mathbf{A}$ 的任意拟导子可以扩张成另一个具有较大维数的 3-李代数的导子.

定理 3.1 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数, 则 $\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 和 $\Gamma(\mathbf{A})$ 是一般线性李代数 $\mathrm{gl}(\mathbf{A})$ 的子代数. 如果 $\mathbf{Z}(\mathbf{A})=0$, 则 $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 和 $\Gamma(\mathbf{A})$ 是 Abel 的.

证 对任意 $\mathbf{f},\mathbf{g}\in\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A}),(\mathbf{f},\mathbf{f}',\mathbf{f}'',\mathbf{f}'''),(\mathbf{g},\mathbf{g}',\mathbf{g}'',\mathbf{g}''')\in\Delta(\mathbf{A})$, 根据 (2.2), 得到等式

$$[[\mathbf{f},\mathbf{g}](\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}]+[\mathbf{x},[\mathbf{f}',\mathbf{g}'](\mathbf{y}),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{y},[\mathbf{f}'',\mathbf{g}''](\mathbf{z})]=[\mathbf{f}''',\mathbf{g}'''][\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}],\quad \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{A},$$

则 $[\mathbf{f},\mathbf{g}]=\mathbf{g}\mathbf{f}-\mathbf{f}\mathbf{g}\in\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, $([\mathbf{f},\mathbf{g}],[\mathbf{f}',\mathbf{g}'],[\mathbf{f}'',\mathbf{g}''],[\mathbf{f}''',\mathbf{g}'''])\in\Delta(\mathbf{A})$. 所以 $\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ 和 $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ 是 $\mathrm{gl}(\mathbf{A})$ 的子代数. 对任意 $\mathbf{f},\mathbf{g}\in\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A}),\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}[][[\mathbf{f},\mathbf{g}](\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}]&=[(\mathbf{f}\mathbf{g}-\mathbf{g}\mathbf{f})(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z})]=[\mathbf{g}(\mathbf{x}),\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]-[\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]\\&=[\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathbf{g}(\mathbf{z})]-[\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{g}(\mathbf{z})]=[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}\mathbf{g}(\mathbf{z})]-[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}\mathbf{g}(\mathbf{z})]=0.\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{Z}(\mathbf{A})=0$, 所以 $[\mathbf{f},\mathbf{g}]=0$. 结论得证.

引理 3.1 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数, 则下面结论成立

$$\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})\subseteq\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A}), \tag{3.1}$$

$$\Gamma(\mathbf{A})\subseteq\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})\cap\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A}), \tag{3.2}$$

$$[\mathrm{Der}(\mathbf{A}),\Gamma(\mathbf{A})]\subseteq\Gamma(\mathbf{A}), \tag{3.3}$$

$$[\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A}),\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})]\subseteq\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A}). \tag{3.4}$$

证 因为对任意 $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A}),\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{A}$, 下列等式成立:

$$[\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}]+\left[\mathbf{x},\frac{-1}{2}\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathbf{z}\right]+\left[\mathbf{x},\mathbf{y},\frac{-1}{2}\mathbf{f}(\mathbf{z})\right]=0,$$

所以 $\left(\mathbf{f},\frac{-1}{2}\mathbf{f},\frac{-1}{2}\mathbf{f},0\right)\in\Delta(\mathbf{A})$, $\mathbf{f}\in\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$. 类似地, 可得 (3.2)–(3.4) 成立.

如果 $\mathbf{A}$ 是 Abel 的 3-李代数, 则 $\mathrm{Der}(\mathbf{A})=\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})=\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})=\mathrm{gl}(\mathbf{A})$.

设 $\mathbf{A}$ 是 3-维 3-李代数, 且 $\mathbf{A}^1\neq 0$, 则存在一组基 $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3\}$, 使得 $\mathbf{A}$ 的乘法为 $[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3]=\mathbf{x}_1$. 设 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbf{A}$ 的任意线性映射, 满足 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)=\sum\limits_{j=1}^{3}\mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j,\mathbf{a}_{ij}\in\mathbb{F}$, 定义 $\mathbf{A}$ 的线性映射 $\mathbf{f}'$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)=\sum\limits_{j=1}^{3}\mathbf{b}_{ij}\mathbf{x}_j$, 其中 $\mathbf{b}_{ij}$ 满足 $\mathbf{b}_{11}=\mathbf{a}_{11}+\mathbf{a}_{22}+\mathbf{a}_{33}$, $\mathbf{b}_{12}=\mathbf{b}_{13}=0$. 则 $(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}')\in\Delta(\mathbf{A})$, $\mathrm{Der}(\mathbf{A})\neq\mathrm{gl}(\mathbf{A})$, 所以 $\mathrm{Der}(\mathbf{A})\subsetneq\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})=\mathrm{gl}(\mathbf{A})$.

设 $\mathbf{B}$ 是 4-维 3-李代数, $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4\}$ 是 $\mathbf{B}$ 的一组基, 乘法表为 $[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3]=\mathbf{x}_1$. 则 $\mathbf{Z}(\mathbf{B})=\mathbb{F}\mathbf{x}_4\neq 0$, 设 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)=\sum\limits_{k=1}^{4}\mathbf{a}_{ik}\mathbf{x}_k$. 若 $(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}')\in\Delta(\mathbf{A})$, 则 $[\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j,\mathbf{f}(\mathbf{x}_4)]=$

$\left[\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j,\sum\limits_{k=1}^{4}\mathbf{a}_{4k}\mathbf{x}_k\right]=0$. 得到 $\mathbf{a}_{41}=\mathbf{a}_{42}=\mathbf{a}_{43}=0$. 所以 $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})\neq \mathrm{gl}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Der}(\mathbf{A})\neq \mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$. 因此 $\mathrm{Der}(\mathbf{A})\subsetneq \mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})\subsetneq \mathrm{gl}(\mathbf{A})$.

定理 3.2 设 $\mathbf{A}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数, 则

(1) $\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})=\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})\oplus\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ (子空间的直和),

(2) $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 是 $\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ 的理想. 如果 $\mathbf{Z}(\mathbf{A})=0$, 则 $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 是 $\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ 的 Abel 理想.

证 对任意 $\mathbf{g}\in\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, 及 $(\mathbf{g},\mathbf{g}',\mathbf{g}'',\mathbf{g}''')\in\Delta(\mathbf{A})$,

$$\begin{aligned}(\mathbf{g},\mathbf{g}',\mathbf{g}'',\mathbf{g}''')=&\Big(\frac{\mathbf{g}+\mathbf{g}'+\mathbf{g}''}{3},\frac{\mathbf{g}+\mathbf{g}'+\mathbf{g}''}{3},\frac{\mathbf{g}+\mathbf{g}'+\mathbf{g}''}{3},\mathbf{g}'''\Big)\\&+\Big(\frac{2\mathbf{g}-\mathbf{g}'-\mathbf{g}''}{3},\frac{2\mathbf{g}'-\mathbf{g}-\mathbf{g}''}{3},\frac{2\mathbf{g}''-\mathbf{g}-\mathbf{g}'}{3},0\Big).\end{aligned}$$

现在证明 $\frac{g+g'+g''}{3}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, $\frac{2g-g'-g''}{3}$, $\frac{2g'-g-g''}{3}$, $\frac{2g''-g-g'}{3}\in\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$.

根据 (2.2), 得到 $\left[\frac{g+g'+g''}{3}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}\right]+\left[\mathbf{x},\frac{g+g'+g''}{3}(\mathbf{y}),\mathbf{z}\right]+\left[\mathbf{x},\mathbf{y},\frac{g+g'+g''}{3}(\mathbf{z})\right]=\mathbf{g}'''([\mathbf{z},\mathbf{y},\mathbf{z}])$. 所以 $\frac{g+g'+g''}{3}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$. 由等式 (2.2)–(2.3),

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{2\mathbf{g}-\mathbf{g}'-\mathbf{g}''}{3}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}\Big]-\Big[\mathbf{x},\frac{2\mathbf{g}-\mathbf{g}'-\mathbf{g}''}{3}(\mathbf{y}),\mathbf{z}\Big]\\&=-\frac{1}{3}[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{g}''(\mathbf{z})]+\frac{1}{3}[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{g}(\mathbf{z})]-\frac{1}{3}[\mathbf{x},\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]+\frac{1}{3}[\mathbf{x},\mathbf{g}''(\mathbf{y}),\mathbf{z}]\\&=\frac{1}{3}([\mathbf{x},\mathbf{y},(\mathbf{g}-\mathbf{g}'')(\mathbf{z})]+[\mathbf{x},(\mathbf{g}''-\mathbf{g})(\mathbf{y}),\mathbf{z}]),\\&\quad\mathbf{g}'''([\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}])=[\mathbf{g}'(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{g}''(\mathbf{z})],\\&\quad\mathbf{g}'''([\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}])=[\mathbf{g}'(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{g}''(\mathbf{y}),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{g}(\mathbf{z})],\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{2\mathbf{g}-\mathbf{g}'-\mathbf{g}''}{3}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}\Big]=\Big[\mathbf{x},\frac{2\mathbf{g}-\mathbf{g}'-\mathbf{g}''}{3}(\mathbf{y}),\mathbf{z}\Big]=\Big[\mathbf{x},\mathbf{y},\frac{2\mathbf{g}-\mathbf{g}'-\mathbf{g}''}{3}(\mathbf{z})\Big],\\&\Big[\frac{2\mathbf{g}'-\mathbf{g}-\mathbf{g}''}{3}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}\Big]=\Big[\mathbf{x},\frac{2\mathbf{g}'-\mathbf{g}-\mathbf{g}''}{3}(\mathbf{y}),\mathbf{z}\Big]=\Big[\mathbf{x},\mathbf{y},\frac{2\mathbf{g}'-\mathbf{g}-\mathbf{g}''}{3}(\mathbf{z})\Big],\\&\Big[\frac{2\mathbf{g}''-\mathbf{g}-\mathbf{g}'}{3}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}\Big]=\Big[\mathbf{x},\frac{2\mathbf{g}''-\mathbf{g}-\mathbf{g}'}{3}(\mathbf{y}),\mathbf{z}\Big]=\Big[\mathbf{x},\mathbf{y},\frac{2\mathbf{g}''-\mathbf{g}-\mathbf{g}'}{3}(\mathbf{z})\Big].\end{aligned}$$

由此得到结论 (1). 由引理 3.1 可得结论 (2).

设 $\mathbf{A}$ 是可分解的 3-李代数, 即 $\mathbf{A}=\mathbf{H}\oplus\mathbf{K}$ (理想的直和), 得到如下结论.

定理 3.3 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数, $\mathbf{K},\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{A}$ 的理想, 且 $\mathbf{A}=\mathbf{H}\oplus\mathbf{K}$, 若 $\mathbf{Z}(\mathbf{A})=0$. 则对任意的 $\mathbf{g}\in\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, $\mathbf{g}$ 满足 $\mathbf{g}(\mathbf{H})\subseteq\mathbf{H}$, $\mathbf{g}(\mathbf{K})\subseteq\mathbf{K}$, 且

$$\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})=\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{H})\oplus\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{K}),\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})=\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{H})\oplus\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{K}).$$

证 由 (2.3)–(2.4) 可得到结论.

本章最后, 我们来描述 3-李代数的拟导子可以作为具有更大维数的 3-李代数的导子. 为此我们需要 3-李代数的张量积的结构[17].

设 $\mathbf{A}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数, $\mathbf{t}$ 是变量, 则商代数 $\mathbf{t}\mathbb{F}[\mathbf{t}]/(\mathbf{t}^4)$ 是 3-维交换结合代数. 令

$\widetilde{\mathbf{A}}=\mathbf{A}\otimes(\mathbf{t}\mathbb{F}[\mathbf{t}]/(\mathbf{t}^4))$, 下面我们把 $\mathbf{a}\otimes\mathbf{t}$, $\mathbf{a}\otimes\mathbf{t}^2$ 和 $\mathbf{a}\otimes\mathbf{t}^3$ 分别简写成 $\mathbf{at}$, $\mathbf{at}^2$ 和 $\mathbf{at}^3$, 则 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 按下面乘积构成 3-李代数,

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{t}^l,\mathbf{a}_2\mathbf{t}^1,\mathbf{a}_3\mathbf{t}^1]=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]\mathbf{t}^3,\quad \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\in\mathbf{A}. \tag{3.5}$$

显然, 当 $\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n}$ 中有一个大于 1 时, $[\mathbf{a}_1\mathbf{t}^l,\mathbf{a}_2\mathbf{t}^m,\mathbf{a}_3\mathbf{t}^n]=0$.

设 $\mathbf{U}$ 是 $\mathbf{A}$ 的子空间, 满足 $\mathbf{A}=\mathbf{U}\oplus\mathbf{A}^1$, 即子空间 $\mathbf{U}$ 是导子代数 $\mathbf{A}^1=[\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}]$ 的补空间, 于是 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 可分解为

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\mathbf{At}\oplus\mathbf{At}^2\oplus\mathbf{At}^3=\mathbf{At}\oplus\mathbf{At}^2\oplus\mathbf{A}^1\mathbf{t}^3\oplus\mathbf{Ut}^3. \tag{3.6}$$

定义线性映射 $\mathbf{l}_u:\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})\to\mathrm{Hom}(\widetilde{\mathbf{A}},\widetilde{\mathbf{A}})$, 对 $(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}')\in\Delta(\mathbf{A})$, $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{A},\mathbf{c}\in\mathbf{A}^1,\mathbf{u}\in\mathbf{U}$,

$$\mathbf{l}_u(\mathbf{f})(\mathbf{at}+\mathbf{bt}^2+\mathbf{ct}^3+\mathbf{ut}^3)=\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{t}+\mathbf{f}'(\mathbf{c})\mathbf{t}^3, \tag{3.7}$$

则 $\mathbf{l}_u$ 是单射, 且 $\mathbf{l}_u(\mathbf{f})$ 不依赖 $\mathbf{f}'$ 的选择.

定理 3.4 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数. 则 $\mathbf{l}_u(\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A}))\subseteq\mathrm{Der}(\widetilde{\mathbf{A}})$. 如果 $\mathbf{Z}(\mathbf{A})=0$, 则 $\mathrm{Der}(\widetilde{\mathbf{A}})=\mathbf{l}_u(\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A}))\oplus\mathbf{Z}(\mathrm{Der}(\widetilde{\mathbf{A}}))$.

证 对任意 $\mathbf{a}_i\mathbf{t}+\mathbf{b}_i\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_i\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_i\mathbf{t}^3\in\widetilde{\mathbf{A}},\mathbf{i}=1,2,3$, 根据 (3.6)–(3.7),

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{l}_u(\mathbf{f})(\mathbf{a}_1\mathbf{t}+\mathbf{b}_1\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_1\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_1\mathbf{t}^3),\mathbf{a}_2\mathbf{t}+\mathbf{b}_2\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_2\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_2\mathbf{t}^3,\mathbf{a}_3\mathbf{t}+\mathbf{b}_3\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_3\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_3\mathbf{t}^3]\\
&+[\mathbf{a}_1\mathbf{t}+\mathbf{b}_1\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_1\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_1\mathbf{t}^3,\mathbf{l}_u(\mathbf{a}_2\mathbf{t}+\mathbf{b}_2\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_2\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_2\mathbf{t}^3),\mathbf{a}_3\mathbf{t}+\mathbf{b}_3\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_3\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_3\mathbf{t}^3]\\
&+[\mathbf{a}_1\mathbf{t}+\mathbf{b}_1\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_1\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_1\mathbf{t}^3,\mathbf{a}_2\mathbf{t}+\mathbf{b}_2\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_2\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_2\mathbf{t}^3,\mathbf{l}_u(\mathbf{f})(\mathbf{a}_3\mathbf{t}+\mathbf{b}_3\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_3\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_3\mathbf{t}^3)]\\
=&[\mathbf{f}(\mathbf{a}_1),\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]\mathbf{t}^3+[\mathbf{a}_1,\mathbf{f}(\mathbf{a}_2),\mathbf{a}_3]\mathbf{t}^3+[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{f}(\mathbf{a}_3)]\mathbf{t}^3=\mathbf{f}'([\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3])\mathbf{t}^3,\\
&\mathbf{l}_u(\mathbf{f})([\mathbf{a}_1\mathbf{t}+\mathbf{b}_1\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_1\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_1\mathbf{t}^3,\mathbf{a}_2\mathbf{t}+\mathbf{b}_2\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_2\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_2\mathbf{t}^3,\mathbf{a}_3\mathbf{t}+\mathbf{b}_3\mathbf{t}^2+\mathbf{c}_3\mathbf{t}^3+\mathbf{u}_3\mathbf{t}^3])\\
=&\mathbf{l}_u(\mathbf{f})([\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]\mathbf{t}^3)=\mathbf{f}'([\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3])\mathbf{t}^3.
\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{l}_u(\mathbf{f})\in\mathrm{Der}(\widetilde{\mathbf{A}})$. 若 $\mathbf{Z}(\mathbf{A})=0$, 根据 (3.5), 3-李代数 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 中心可表示为

$$\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{A}})=\mathbf{At}^2+\mathbf{At}^3, \tag{3.8}$$

且对任意的 $\mathbf{D}\in\mathrm{Der}(\widetilde{\mathbf{A}})$, $\mathbf{D}(\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{A}}))\subseteq\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{A}})$, 及线性映射

$$\mathbf{f}:\mathbf{At}\oplus\mathbf{At}^2\oplus\mathbf{Ut}^3\mapsto\mathbf{At}^2\oplus\mathbf{At}^3,$$

如果 $\mathbf{f}(\mathbf{A}^1\mathbf{t}^3)=0$, 则 $\mathbf{f}\in\mathbf{Z}(\mathrm{Der}(\widetilde{\mathbf{A}}))$. 对任意 $\mathbf{g}\in\mathrm{Der}(\widetilde{\mathbf{A}})$ 和 $\mathbf{a}\in\mathbf{A}$, 设

$$\mathbf{g}(\mathbf{at})=\mathbf{a}'\mathbf{t}+\mathbf{b}'\mathbf{t}^2+\mathbf{c}'\mathbf{t}^3+\mathbf{u}'\mathbf{t}^3,\quad \mathbf{a}',\mathbf{b}'\in\mathbf{A},\mathbf{c}'\in\mathbf{A}^1,\mathbf{u}'\in\mathbf{U}. \tag{3.9}$$

定义线性映射 $\mathbf{f}:\widetilde{\mathbf{A}}\to\widetilde{\mathbf{A}}$, $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{A},\mathbf{c}\in\mathbf{A}^1,\mathbf{u}\in\mathbf{U}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{at})=\mathbf{b}'\mathbf{t}^2+\mathbf{c}'\mathbf{t}^3+\mathbf{u}'\mathbf{t}^3,\quad \mathbf{f}(\mathbf{ct}^3)=0,\quad \mathbf{f}(\mathbf{bt}^2+\mathbf{ut}^3)=\mathbf{g}(\mathbf{bt}^2+\mathbf{ut}^3).$$

根据 (3.8), 可得 $\mathbf{f}\in\mathbf{Z}(\mathrm{Der}(\widetilde{\mathbf{A}}))$, 且

$$(\mathbf{g}-\mathbf{f})(\mathbf{at})=\mathbf{a}'\mathbf{t},\quad (\mathbf{g}-\mathbf{f})(\mathbf{ct}^3)=\mathbf{c}'\mathbf{t}^3.$$

根据 (3.9), 存在线性映射 $\mathbf{h},\mathbf{h}'$ 使得对任意的 $\mathbf{a}\in\mathbf{A},\mathbf{c}\in\mathbf{A}^1,\mathbf{u}\in\mathbf{U}$, $\mathbf{h}(\mathbf{a})=\mathbf{a}'$, $\mathbf{h}'(\mathbf{c})=\mathbf{c}'$, $\mathbf{h}'(\mathbf{u})=0$, 所以 $(\mathbf{h},\mathbf{h},\mathbf{h},\mathbf{h}')\in\Delta(\mathbf{A})$, 得到 $\mathbf{h}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, $\mathbf{g}-\mathbf{f}=\mathbf{l}_u(\mathbf{h})$. 结论得证.

4 3-李代数的拟导子

假设 3-李代数包含对角环面 $\mathbf{T}$. 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{A}$, 用 $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ 表示乘积运算 $[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}]$. 设 $(\mathbf{A},\boldsymbol{\mu})$ 是 3-李代数, 称集合 $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\mu})$ 为 $\boldsymbol{\mu}$ 的核, 其中

$$\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\mu})=\{\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}\mid\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u})=0,\ \mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}\in\mathbf{A}\},\tag{4.1}$$

设 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbf{A}$ 上的线性映射, 定义新的线性映射 $\mathbf{f}^*:\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\to\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}$,

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\otimes\mathbf{u})=\mathbf{f}(\mathbf{v})\otimes\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}+\mathbf{v}\otimes\mathbf{f}(\mathbf{w})\otimes\mathbf{u}+\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\otimes\mathbf{f}(\mathbf{u}),\quad \mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}\in\mathbf{A}.\tag{4.2}$$

定理 4.1 设 $(\mathbf{A},\boldsymbol{\mu})$ 是 3-李代数, $\mathbf{f}\in\mathrm{Hom}(\mathbf{A},\mathbf{A})$. 则 $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A},\boldsymbol{\mu})$ 的充要条件为

$$\mathbf{f}^*(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\mu}))\subseteq\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\mu}),\tag{4.3}$$

即, 对 $\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}\in\mathbf{A}$, 如果 $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u})=0$, 则 $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{f}(\mathbf{v}),\mathbf{w},\mathbf{u})+\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v},\mathbf{f}(\mathbf{w}),\mathbf{u})+\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{f}(\mathbf{u}))=0$.

证 如果 $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, 设 $(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}')\in\Delta(\mathbf{A})$, 由 (4.1), (4.2), 对任意 $\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}\in\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\mu})$, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{f}^*(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}))=\boldsymbol{\mu}(\mathbf{f}(\mathbf{v}),\mathbf{w},\mathbf{u})+\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v},\mathbf{f}(\mathbf{w}),\mathbf{u})+\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{f}(\mathbf{u}))=\mathbf{f}'(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}))=0$. 所以 $\mathbf{f}^*(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\mu}))\subseteq\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\mu})$.

反之, 设 $\mathbf{U}$ 是 $\mathbf{A}^1$ 的补空间. 若 $\mathbf{f}\in\mathrm{Hom}(\mathbf{A},\mathbf{A})$ 满足 (4.3), 定义线性映射 $\mathbf{f}':\mathbf{A}\to\mathbf{A}$, 对 $\mathbf{u}\in\mathbf{U}$, $\mathbf{f}'(\mathbf{u})=0$, 对 $\mathbf{z}=\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i,\mathbf{u}_i)\in\mathbf{A}^1$, $\mathbf{f}'(\mathbf{z})=\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{f}^*(\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_i\otimes\mathbf{u}_i))$.

事实上, 如果 $\mathbf{z}=\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i,\mathbf{u}_i)$ 且 $\mathbf{z}=\sum\limits_{j=1}^{l}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}'_j,\mathbf{w}'_j,\mathbf{u}'_j)$, $\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i,\mathbf{u}_i,\mathbf{v}'_i,\mathbf{w}'_i,\mathbf{u}'_i\in\mathbf{A}$, $1\leqslant\mathbf{i}\leqslant\mathbf{m}$, $1\leqslant\mathbf{j}\leqslant\mathbf{l}$. 根据 (4.3), $\sum\limits_{i=1}^{m}(\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_i\otimes\mathbf{u}_i)-\sum\limits_{j=1}^{l}(\mathbf{v}'_j\otimes\mathbf{w}'_j\otimes\mathbf{u}'_j)\in\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\mu})$, 即 $\boldsymbol{\mu}\big(\mathbf{f}^*\big(\sum\limits_{i=1}^{m}(\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_i\otimes\mathbf{u}_i)\big)\big)=\boldsymbol{\mu}\big(\mathbf{f}^*\big(\sum\limits_{j=1}^{l}(\mathbf{v}'_j\otimes\mathbf{w}'_j\otimes\mathbf{u}'_j)\big)\big)$. 则 $\mathbf{f}'$ 有意义. 且有 $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{f}(\mathbf{v}),\mathbf{w},\mathbf{u})+\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v},\mathbf{f}(\mathbf{w}),\mathbf{u})+\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{f}(\mathbf{u}))=\boldsymbol{\mu}(\mathbf{f}^*(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}))=\mathbf{f}'(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u})).\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}\in\mathbf{A}$. 所以 $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$.

在文 [17–19] 中, 详细介绍了 3-李代数的模和上同调理论. 根据拟导子的描述, 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数, $\mathbf{V}$ 是向量空间, 如果存在线性映射 $\boldsymbol{\alpha}:\mathbf{A}\wedge\mathbf{A}\to\mathrm{End}(\mathbf{V})$, 对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}\in\mathbf{A}$,

$$\boldsymbol{\alpha}([\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}],\mathbf{w})=\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y},\mathbf{z})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{w})+\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z},\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y},\mathbf{w})+\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z},\mathbf{w}),$$
$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z},\mathbf{w})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{y})-\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z},\mathbf{w})+\boldsymbol{\alpha}([\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}],\mathbf{w})+\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z},[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w}])=0,$$

则 $(\mathbf{V},\boldsymbol{\alpha})$ 称为 $\mathbf{A}$ 的表示, 或 $\mathbf{V}$ 称为 $\mathbf{A}$-模. 如果 $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{A}$, 那么 $\mathbf{V}$ 称为平凡模. 若 $\mathbf{V}=\mathbf{A}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathrm{ad}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{A}$, 则称为 $\mathbf{A}$ 的伴随模.

在 3-李代数 $\mathbf{A}$ 中, 给出如下定义:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{f})(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)=&\,\mathbf{f}([\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3])-[\mathbf{f}(\mathbf{x}_1),\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3]-[\mathbf{x}_1,\mathbf{f}(\mathbf{x}_2),\mathbf{x}_3]\\&-[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{f}(\mathbf{x}_3)],\end{aligned}\tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_1(\mathbf{f})(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5)=&\sum_{i=1}^{3}\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,[\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5],\cdots,\mathbf{x}_3])-\mathbf{f}([\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3],\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5)\\&+\sum_{i=1}^{3}([\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{f}(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5),\cdots,\mathbf{x}_3])\\&-[\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3),\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5].\end{aligned}\tag{4.5}$$

记 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\delta}_i=\mathbf{Z}^i(\mathbf{A},\mathbf{A})\subseteq\mathbf{C}^i(\mathbf{A},\mathbf{A})$, $\mathbf{B}^{i+1}(\mathbf{A},\mathbf{A})=\mathrm{Im}(\boldsymbol{\delta}_i)\subseteq\mathbf{C}^{i+1}(\mathbf{A},\mathbf{A})$, $\mathbf{i}=0,1$. 由 (4.4)–(4.5), $\boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}_0=0$.

设 $\dot{\mathbf{A}}$ 是 $\mathbf{A}$ 的一个平凡模, 且 $\mathbf{C}^0(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})=\mathrm{Hom}(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})$, $\mathbf{C}^1(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})=\mathrm{Hom}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\otimes\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})$, $\mathbf{C}^2(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})=\mathbf{H}(\mathbf{A}^{\otimes 5},\dot{\mathbf{A}})$. 定义 $\dot{\boldsymbol{\delta}}_0:\mathbf{C}^0(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})\to\mathbf{C}^1(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})$, $\dot{\boldsymbol{\delta}}_1:\mathbf{C}^1(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})\to\mathbf{C}^2(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})$, $\mathbf{x}_i\in\mathbf{A}, 1\leqslant\mathbf{i}\leqslant 5$,

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_0(\mathbf{f})(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\mathbf{f}([\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}]),\tag{4.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_1(\mathbf{f})(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5)=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,[\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5],\mathbf{x}_3)-\mathbf{f}([\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3],\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5),\tag{4.7}$$

那么 $\dot{\boldsymbol{\delta}}_1\dot{\boldsymbol{\delta}}_0=0$.

定理 4.2 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数, $\mathbf{f},\mathbf{f}'$ 是 $\mathbf{A}$ 的线性映射, 则

(1) $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ 当且仅当 $\boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{f})\in\mathbf{B}^1(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})$, $(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}')\in\Delta(\mathbf{A})$ 当且仅当 $\boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{f})=\dot{\boldsymbol{\delta}}_0(\mathbf{f}-\mathbf{f}')$.

(2) 设 $\dot{\boldsymbol{\delta}}_0(\mathbf{f})\in\mathbf{Z}^1(\mathbf{A},\mathbf{A})$, $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{A}$, 则

$$[\mathbf{f}([\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}]),\mathbf{u},\mathbf{v}]=[\mathbf{f}([\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}]),\mathbf{y},\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{f}([\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v}]),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}([\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v}])].\tag{4.8}$$

如果 $(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}')\in\Delta(\mathbf{A})$, 则

$$\begin{aligned}&[(\mathbf{f}-\mathbf{f}')([\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}]),\mathbf{u},\mathbf{v}]\\&=[(\mathbf{f}-\mathbf{f}')([\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}]),\mathbf{y},\mathbf{z}]+[\mathbf{x},(\mathbf{f}-\mathbf{f}')([\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v}]),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{y},(\mathbf{f}-\mathbf{f}')([\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v}])].\end{aligned}$$

证 设 $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, $(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}')\in\Delta(\mathbf{A})$, 根据 (4.4), 可得

$$\boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{f})(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=(\mathbf{f}-\mathbf{f}')([\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}])=\dot{\boldsymbol{\delta}}_0(\mathbf{f}-\mathbf{f}')(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

所以 $\boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{f})\in\mathbf{B}^1(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})$ 且 $\boldsymbol{\delta}_0\mathbf{f}=\dot{\boldsymbol{\delta}}_0(\mathbf{f}-\mathbf{f}')$.

反之, 若 $\boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{f})\in\mathbf{B}^1(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})$, 则存在 $\mathbf{f}'\in\mathbf{C}^0(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}})$ 满足 $\boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{f})=\dot{\boldsymbol{\delta}}_0\mathbf{f}',\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{A}$,

$$\boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{f})(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\mathbf{f}[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}]-[\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}]-[\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]-[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{z})]=\boldsymbol{\delta}_0\mathbf{f}'[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}]=\mathbf{f}'[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}],$$

所以 $(\mathbf{f}'-\mathbf{f})([\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}])=[\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{z})]$ 成立.

设 $\mathbf{f}\in\mathrm{Hom}(\mathbf{A},\mathbf{A})$ 满足 $\dot{\boldsymbol{\delta}}_0\mathbf{f}\in\mathbf{Z}^1(\mathbf{A},\mathbf{A})$, 则 $\boldsymbol{\delta}_1\dot{\boldsymbol{\delta}}_0(\mathbf{f})=0$. 根据 (4.5), 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\delta}_1\dot{\boldsymbol{\delta}}_0(\mathbf{f})(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v})=[\mathbf{f}([\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}]),\mathbf{y},\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{f}([\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v}]),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}([\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v}])]-[\mathbf{f}[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}],\mathbf{u},\mathbf{v}]=0$. 可得 (4.8).

设 $(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}')\in\Delta(\mathbf{A})$. 利用结论 (1), 可得 $\boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{f})=\dot{\boldsymbol{\delta}}_0(\mathbf{f}-\mathbf{f}')$. 因为 $\dot{\boldsymbol{\delta}}_0(\mathbf{f})\in\mathbf{Z}^1(\mathbf{A},\mathbf{A})$ 且 $\boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{f})\in\mathbf{Z}^1(\mathbf{A},\mathbf{A})$, 得到 $\mathbf{f}-\mathbf{f}'$ 满足 (4.8).

设 $\mathbf{A}$ 是特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数, 包含可对角化的环面 $\mathbf{T}$, 且 $\mathbf{A}$ 关于 $\mathbf{T}$ 的特征根子空间为

$$\mathbf{A}=\sum_{\gamma\in\Omega}\mathbf{A}_\gamma,\quad \mathbf{A}_\gamma=\{\mathbf{x}\in\mathbf{A}\mid\ \mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T},\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{x})=\mathbf{y}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{x},\},\quad \mathbf{A}_0=\mathbf{T},\tag{4.9}$$

其中 $\Omega\subseteq(\mathbf{T}\wedge\mathbf{T})^*-\{0\}$ 是 $\mathbf{T}\wedge\mathbf{T}$ 的对偶空间. 若 $\mathbf{A}_\alpha\neq 0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\mathbf{A}$ 关于 $\mathbf{T}$ 的权.

例如, 设 $\mathbf{A}$ 是复数域 $\mathbb{F}$ 上的 4-维 3-李代数[20, 引理3.1], 除去 $(\mathbf{b}^1)$ 和 $(\mathbf{c}^2)$ 的情形, $\mathbf{A}$ 的对角化环面是由 $\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$ 张成的线性空间.

设 $\mathbf{A}$ 是包含对角环面 $\mathbf{T}$ 的 3-李代数, 定义线性映射

$$(\mathbf{d}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f})(\mathbf{x})=[\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{f}(\mathbf{x})]-\mathbf{f}([\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{x}])=(\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}-\mathbf{f}\,\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2))(\mathbf{x}).\tag{4.10}$$

对任意 $\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T},\ \mathbf{f}\in\mathrm{Hom}(\mathbf{A},\mathbf{A})$, 用 $(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}$ 代替 $\mathbf{d}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f},\ \mathbf{A}_0=\mathbf{T}.$

引理 4.1 设 $\mathbf{A}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数. 则对任意 $\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3,\mathbf{t}_4\in\mathbf{T},\ \mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$,

(1) $(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, 即 $(\mathbf{T},\mathbf{T})\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})\subseteq\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$,

(2) $(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{t}_3,\mathbf{t}_4)\mathbf{f}-(\mathbf{t}_3,\mathbf{t}_4)(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}=0$,

(3) $$((\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)^n\cdot\mathbf{f})(\mathbf{x})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\mathbf{C}_n^k\mathrm{ad}^{n-k}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}\,\mathrm{ad}^k(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{x}).\tag{4.11}$$

证 设 $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, $(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}')\in\Delta(\mathbf{A})$, 对任意 $\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T},\ \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{A}$, 根据 (4.10),

$$\begin{aligned}
&[(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{y},(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{y},(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{z})]\\
={}&[\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{z}]+[\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{y}),\mathbf{z}]+[\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{z})]\\
&+[\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{x}),\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{z})]\\
&+[\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{z})]+[\mathbf{x},\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{y}),\mathbf{f}(\mathbf{z})]+[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{z})]\\
&-([\mathbf{f}(\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{x})),\mathbf{y},\mathbf{z}]+[\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{x}),\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]+[\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{z})])\\
&-([\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{y}),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{y})),\mathbf{z}]+[\mathbf{x},\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{y}),\mathbf{f}(\mathbf{z})])\\
&-([\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{z})]+[\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{z})]+[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{z}))])\\
={}&\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}'([\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}])-\mathbf{f}'\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)([\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}]).
\end{aligned}$$

所以 $((\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f},(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f},(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f},\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}'-\mathbf{f}'\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2))\in\Delta(\mathbf{A})$. 结论 (1) 得证.

从 (4.10) 可得结论 (2). 下面证明 (4.11).

如果 $\mathbf{n}=2$, 则有

$$\begin{aligned}
((\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)^2\mathbf{f})(\mathbf{x})&=[\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\ ((\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f})(\mathbf{x})]-((\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f})([\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{x}])\\
&=\mathrm{ad}^2(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{x})-2\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}\,\mathrm{ad}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{x})+\mathbf{f}\,\mathrm{ad}^2(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

假设 (4.11) 在 $\mathbf{n}$ 的情形成立. 所以

$$((\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)^{n+1}\mathbf{f})(\mathbf{x})=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k+1}\mathbf{C}_{n+1}^k\mathrm{ad}^{n+1-k}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}\,\mathrm{ad}^k(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)(\mathbf{x}).$$

结论得证.

根据引理 4.1, $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ 关于 $\mathbf{T}$ 的 Fitting 分解为

$$\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})=\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_0\oplus\sum_{\alpha\in\Lambda}\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_\alpha, \tag{4.12}$$

其中 $\Lambda\subseteq(\mathbf{T}\wedge\mathbf{T})^*-\{0\}$,

$\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_0=\{\mathbf{f}\mid\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A}),\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T}$, 存在正整数 $\mathbf{m}$ 使得 $(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)^m\mathbf{f}=0\}$,

$\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_\alpha=\{\mathbf{f}\mid\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ 对所有的 $\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T}$, 存在正整数 $\mathbf{m}$ 使得 $((\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)-\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{I}_d)^m\mathbf{f}=0\}$.

设 $\boldsymbol{\alpha}\in\Lambda$, 如果 $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_\alpha\neq0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为 $\mathbf{T}$ 的一个权.

引理 4.2 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数, $\boldsymbol{\alpha}\in\Lambda$, $\boldsymbol{\gamma}\in\Omega$, 则 $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_\alpha(\mathbf{A}_\gamma)\subseteq\mathbf{A}_{\alpha+\gamma}$.

证 对 $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_\alpha,\mathbf{x}_\gamma\in\mathbf{A}_\gamma$, 及 $\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T}$, 有 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_\gamma)=\sum\limits_{\beta\in(T\wedge T)^*}\mathbf{x}_\beta$, $\mathbf{x}_\beta\in\mathbf{A}_\beta$. 根据 (4.9)–(4.11) 和引理 4.1, 存在整数 $\mathbf{m}$, 使得 $((\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)-\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{I}_d)^m\mathbf{f}=0$. 因为

$$\begin{aligned}(((\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)-\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{I}_d)^m\mathbf{f})(\mathbf{x}_\gamma)&=\sum_{s=0}^{m}(-1)^{(m-s)}\mathbf{C}_m^s\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)^{m-s}((\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)^s\mathbf{f})(\mathbf{x}_\gamma)\\&=\sum_{\beta\in(T\wedge T)^*}\sum_{s=0}^{m}(-1)^{(m-s-1)}\mathbf{C}_m^s\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)^{m-s}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)^s\mathbf{x}_\beta\\&=-\sum_{\beta\in(T\wedge T)^*}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{x}_\beta\\&=(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}_\gamma)-(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}_\gamma),\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_\gamma)\in\mathbf{A}_{\alpha+\gamma}$.

定理 4.3 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数. 则 $\mathbf{T}$ 在 $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ 上的作用是对角化的, 即

$$\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_\alpha=\{\mathbf{f}\mid\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A}),\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T},(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}=\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}\}. \tag{4.13}$$

对 $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_0$, 如果 $\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T}$, 则 $(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}=0$. 若 $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_0\cap\mathrm{Der}(\mathbf{A})$, 则对任意 $\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T}$, $\boldsymbol{\gamma}\in\Omega$, 有 $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{f}(\mathbf{t}_1),\mathbf{t}_2)+\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t}_1,\mathbf{f}(\mathbf{t}_2))=0$.

证 根据 (4.10) 和引理 4.2, 设 $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_\alpha,\mathbf{x}_\gamma\in\mathbf{A}_\gamma$ 且 $\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T}$, $((\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f})(\mathbf{x}_\gamma)=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}_\gamma)-\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}_\gamma)=\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}_\gamma)$. 等式 (4.13) 得证.

设 $\mathbf{f}\in\mathrm{Der}(\mathbf{A})\cap\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})_0$, $\boldsymbol{\gamma}\in\Omega$, $\mathbf{x}_\gamma\in\mathbf{A}_\gamma$, $\mathbf{x}_\gamma\neq0$, 根据引理 4.2 $[\mathbf{f}(\mathbf{t}_1),\mathbf{t}_2,\mathbf{x}_\gamma]+[\mathbf{t}_1,\mathbf{f}(\mathbf{t}_2),\mathbf{x}_\gamma]+[\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{f}(\mathbf{x}_\gamma)]=\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}_\gamma)$. 因此 $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{f}(\mathbf{t}_1),\mathbf{t}_2)+\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t}_1,\mathbf{f}(\mathbf{t}_2)=0$, 结论得证.

5　3-李代数的拟型心

根据定理 3.2, 3-李代数的广义导子可分解为拟导子和拟型心的直和, 在本章中, 我们研究 3-李代数拟型心的结构. 由第 3 章可知, $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ 包含 $\Gamma(\mathbf{A})$, 且 $\Gamma(\mathbf{A})$ 和 $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 是结合代数. 如果 $\mathbf{Z}(\mathbf{A})=0$, $\Gamma(\mathbf{A})$ 和 $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 是可交换的.

引理 5.1 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数, 则

(1) $[\Gamma(\mathbf{A}), \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})] \subseteq \mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{Z}(\mathbf{A}))$,

(2) 如果 $\mathbf{f} \in \Gamma(\mathbf{A})$, 则 $\mathrm{Ker}(\mathbf{f})$ 和 $\mathrm{Im}(\mathbf{f})$ 是 $\mathbf{A}$ 的理想,

(3) 如果 $\mathbf{A}$ 不可分解, 并且对于 $\mathbf{f} \in \Gamma(\mathbf{A})$, $\mathbf{x}^2$ 不能整除 $\mathbf{f}$ 的最小多项式, 则 $\mathbf{f}$ 是可逆的,

(4) 如果 $\mathbf{A}$ 是不可分解, 且 $\Gamma(\mathbf{A})$ 由半单元构成, 则 $\Gamma(\mathbf{A})$ 是个域.

证 直接进行计算可得到结论, 省略计算过程.

根据引理 3.1, 拟型心 $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 是 3-李代数 $\mathbf{A}$-模, 其作用如下

$$((\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{f})(\mathbf{z}) = (\mathrm{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{f} - \mathbf{f}\,\mathrm{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))(\mathbf{z}), \quad \mathbf{f} \in \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A}),\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{A}, \tag{5.1}$$

因此 $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 是 $\mathbf{T}$-模.

引理 5.2 设 $\mathbf{A}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数, 且 $\mathrm{ch}\mathbb{F} \neq 2$. 则对 $\mathbf{f} \in \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{A}$, 有

$$\begin{aligned}&[\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}] = 0, \mathrm{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathrm{ad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \mathrm{ad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y})\mathrm{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\\ &((\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{f})(\mathbf{z}) = ((\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{f})(\mathbf{x}) = ((\mathbf{z}, \mathbf{x})\mathbf{f})(\mathbf{y}), \mathrm{ad}^m(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \mathrm{ad}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{f}^m,\\ &\mathrm{ad}^{m+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{f} = \mathrm{ad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y})\mathrm{ad}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{m}$ 是正整数.

证 对任意 $\mathbf{f} \in \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{A}$, 因为 $[\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}] = [\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, \mathbf{y}]$ 且 $\mathrm{ch}\mathbb{F} \neq 2$, 则 $[\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}] = 0$. 又因为

$$[\mathrm{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathrm{ad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y})] = \mathrm{ad}([\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x})], \mathbf{y}) + \mathrm{ad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}]) = 0,$$

所以 $\mathrm{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和 $\mathrm{ad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y})$ 是可交换的, 得等式 $((\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{f})(\mathbf{z}) = ((\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{f})(\mathbf{x}) = ((\mathbf{z}, \mathbf{x})\mathbf{f})(\mathbf{y})$.

当 $\mathbf{m} = 2$ 时, $\mathrm{ad}^2(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y})(\mathbf{z}) = \mathrm{ad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y})\mathrm{ad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y})(\mathbf{z}) = [\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{z})]] = [[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}, \mathbf{x}], \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{z})] + [\mathbf{x}, [\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}, \mathbf{y}], \mathbf{f}(\mathbf{z})] + [\mathbf{x}, \mathbf{y}, [\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{z})]] = \mathrm{ad}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{f}^2(\mathbf{z})$. 所以 $\mathbf{m}$ 的情形得到 $\mathrm{ad}^m(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y})(\mathbf{z}) = \mathrm{ad}^{m-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})([\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{f}^m])(\mathbf{z}) = \mathrm{ad}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{f}^m(\mathbf{z})$.

设 $\mathbf{A}$ 是特征为零代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 3-李代数, 且包含对角环面 $\mathbf{T}$. 经过第 4 章的讨论, $\mathbf{A}$ 有分解 (4.9), 并且 $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 作为 $\mathbf{T}$-模具有 Fitting 分解

$$\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A}) = \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0 + \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_1, \quad \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_1 = \sum_{\alpha\in\Pi} \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_\alpha, \tag{5.2}$$

$\Pi \subseteq (\mathbf{T} \wedge \mathbf{T})^* - \{0\}$, 且 $\mathbf{m}$ 为正整数,

$$\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_\alpha = \{\mathbf{f} \in \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A}) \mid \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}, (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)\mathbf{f} = ((\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)\mathbf{I}_d)^m\mathbf{f} = 0\}.$$

设 $\mathbf{A}$ 是代数闭域 $\mathbb{F}$ 上特征为零的 3-李代数, 并且包含可对角化的环面 $\mathbf{T}$, 即 $\mathbf{A}_0 = \mathbf{T}$.

定理 5.1 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数, 则

(1) 作为 $\mathbf{T}$-模, $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ 分解 (5.2) 可以对角化, 即

$$\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_\alpha = \{\mathbf{f} \mid \mathbf{f} \in \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A}), (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)\mathbf{f} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)\mathbf{f}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}\}. \tag{5.3}$$

(2) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in \Pi$ 且 $\boldsymbol{\gamma} \in \Omega$, $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_\alpha(\mathbf{A}_\gamma) \subseteq \mathbf{A}_{\alpha+\gamma}$, $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{T}$.

证 根据引理 4.2 和定理 4.3 可得结论 (1).

根据引理 5.2, 对任意的 $\mathbf{f} \in \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$, $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbf{T}$, $\mathrm{ad}^{m+1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathrm{ad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{y})\mathrm{ad}^{m}(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{z}) = 0$. 所以 $\mathbf{f}(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{T}$.

定理 5.2 设 $\mathbf{A}$ 是 3-李代数, 则

(1) $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0(\mathbf{A}_1) \subseteq \mathbf{A}_1$, (2) $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_1(\mathbf{T}) = 0$,

(3) $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_1(\mathbf{A}_1) \subseteq \mathbf{Z}_A(\mathbf{T}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \mid [\mathbf{x},\mathbf{T},\mathbf{A}] = 0\}$, 因此 $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_1(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{Z}_A(\mathbf{T})$,

(4) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \Omega$, 若 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \neq 0$, 则

$$(\mathbf{A}_\alpha,\mathbf{A}_\beta)\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0 = 0, (\mathbf{A}_\alpha,\mathbf{A}_{-\alpha})\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0 \subseteq \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0,$$
$$(\mathbf{A}_\alpha,\mathbf{A}_{-\alpha})\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0(\mathbf{A}_1) = 0,$$

(5) $((\mathbf{T},\mathbf{A}_1)\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0)(\mathbf{T}) = 0$,

证 定义线性映射 $\boldsymbol{\sigma}: \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, 对 $\mathbf{f} \in \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$, $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{f} \otimes \mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z})$. 根据 (5.1), $\boldsymbol{\sigma}((\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{f} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{f} \otimes \mathrm{ad}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{z}) = \mathrm{ad}(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{f} \otimes \mathbf{z})$, 即 $\boldsymbol{\sigma}$ 是模同构. 所以 $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0(\mathbf{A}_1) \subseteq \mathbf{A}_1$, 结论 (1) 成立.

根据定理 5.1, $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_1(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{T}$, $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_1(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{A}_1$, 所以 $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_1(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{T} = 0$. 结论 (2) 成立. 根据结论 (2) 可得 (3).

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \Omega$, $\mathbf{x}_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha$, $\mathbf{y}_\beta \in \mathbf{A}_\beta$, $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2 \in \mathbf{T}$, $\mathbf{f}_0 \in \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0$.

如果 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \neq 0$, 则 $((\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2)(\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\beta)\mathbf{f}_0)(\mathbf{z}) = (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2)((\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\beta)\mathbf{f}_0)(\mathbf{z})$, 可得

$$(\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\beta)\mathbf{f}_0 \in \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_{\alpha+\beta} \subseteq \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{L})_1. \tag{5.4}$$

根据定理 5.1 和结论 (3), $\boldsymbol{\delta} \in \Omega$, 且

$$(\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\beta)\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0(\mathbf{A}_\delta) \subseteq \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_{\alpha+\beta}(\mathbf{A}_\delta) \subseteq \mathbf{A}_{\alpha+\beta+\delta}, \tag{5.5}$$

$(\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\beta)\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0(\mathbf{A}_\delta) \subseteq \mathbf{T}$. 如果 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\delta} \neq 0$, 则 $(\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\beta)\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0(\mathbf{A}_\delta) = 0$.

设 $((\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\beta)\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0)(\mathbf{A}_1) \neq 0$, 存在 $\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu} \in \Omega$, 及非零 $\mathbf{z}_\delta \in \mathbf{A}_\delta$, $\mathbf{m}_\lambda \in \mathbf{A}_\lambda$, $\mathbf{n}_\mu \in \mathbf{A}_\mu$, $\mathbf{f} \in \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0$ 满足 $[((\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{y}_\beta)\mathbf{f})(\mathbf{z}_\delta), \mathbf{m}_\lambda,\mathbf{n}_\mu] \neq 0$. 则 $[((\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\beta)\mathbf{f})(\mathbf{z}_\delta), \mathbf{m}_\lambda,\mathbf{n}_\mu] = [\mathbf{z}_\delta,((\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\beta)\mathbf{f})(\mathbf{m}_\lambda),\mathbf{n}_\mu] = [\mathbf{z}_\delta,\mathbf{m}_\lambda,((\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\beta)\mathbf{f})(\mathbf{n}_\mu)] \neq 0$. 根据上面的讨论, 我们得到 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\lambda} = 0$, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\mu} = 0$, $\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\lambda}$, 可得 $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} = 0$, 矛盾. 所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \neq 0$, $(\mathbf{A}_\alpha,\mathbf{A}_\beta)\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0 = 0$.

如果 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} = 0$, $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2 \in \mathbf{T}$, $\mathbf{f}_0 \in \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0$, $(\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2)(\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_{-\alpha})\mathbf{f}_0 = (\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_{-\alpha})(\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2)\mathbf{f}_0 + [(\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2),(\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_{-\alpha})]\mathbf{f}_0 = 0$. 即 $(\mathbf{A}_\alpha,\mathbf{A}_{-\alpha})\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0 \subseteq \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0$. 根据引理 5.2 和定理 5.1, $\mathbf{f}_0 \in \Gamma(\mathbf{A})_0$, $\boldsymbol{\delta} \in \Omega$, $\mathbf{x}_\delta \in \mathbf{A}_\delta$, $(\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_\delta) = (\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\delta)\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_\alpha) = (\mathbf{x}_\delta,\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_{-\alpha}) = 0$. 因此 $((\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_{-\alpha})\mathbf{f}_0)(\mathbf{A}_1) = 0$. 结论 (4) 得证.

根据引理 5.2 和定理 5.1, $(\mathbf{T},\mathbf{T})\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{L})_0 = 0$, $((\mathbf{T},\mathbf{A}_1)\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0)(\mathbf{T}) = ((\mathbf{T},\mathbf{T})\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0)(\mathbf{A}_1) = 0$. 结论 (5) 成立.

定理 5.3 设 $\mathbf{A}$ 是具有平凡中心的 3-李代数, 则

$$\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A}) = \Gamma(\mathbf{A}) \oplus \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_1, \quad \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_1\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_1 = 0.$$

证 首先证明 $\Gamma(\mathbf{A}) = \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0$. 易见 $\Gamma(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})_0$. 根据引理 5.2, 对任意 $\mathbf{f}_0 \in$

$Q\Gamma(A)_0$, $t_1,t_2\in T$,

$$(t_1,t_2)f_0=0,\quad x\in A,\ t\in T,$$

$$[t_1,t_2,f_0(x)]=f_0([t_1,t_2,x]),\quad [t_1,t_2,f_0(t)]=f_0([t_1,t_2,t])=0.$$

由定理 5.2, 对任意 $\alpha,\beta\in\Omega$, $x_\alpha\in A_\alpha$, $x_\beta\in A_\beta$, $x\in A$, $f_0\in Q\Gamma(A)_0$, $\alpha+\beta\neq 0$, $((x_\alpha,x_\beta)f_0)(x)=0$, $f_0([x_\alpha,x_\beta,x])=[x_\alpha,x_\beta,f_0(x)]$.

若 $\alpha+\beta=0$, 则 $t\in T,\delta\in\Omega,x_\delta\in A_\delta$, $((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(x_\delta)=0$. 因此 $f_0([x_\alpha,\ x_{-\alpha},x_\delta])=[x_\alpha,x_{-\alpha},f_0(x_\delta)]-((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(x_\delta)=[x_\alpha,x_{-\alpha},f_0(x_\delta)]$.

因为 $((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(t)\in T$, 所以 $[((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(t),T,T]=0,[((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(t),x_\delta,A]=[t,((x_\alpha,\ x_{-\alpha})f_0)(x_\delta),A]=0$, 即 $((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(t)\in Z(A)=0$, $((x_\alpha,x_{-\alpha})f_0)(T)=0$. 所以 $f_0([x_\alpha,x_{-\alpha},t])=[x_\alpha,x_{-\alpha},f_0(t)]$.

综上所述, $f_0\in\Gamma(A),\Gamma(A)=Q\Gamma(A)_0$, $Q\Gamma(A)_1Q\Gamma(A)_1(A)\subseteq Q\Gamma(A)_1(T)=0$, 结论得证.

定理 5.4 设 3-李代数 A 满足 $A=A_1\oplus A_2$, $[A_1,A_2,A]=0$. 则

$$Q\Gamma(A)=Q\Gamma(A_1)+Q\Gamma(A_2)+\Gamma_1+\Gamma_2,$$

其中 $\Gamma_i=\{f\in\mathrm{Hom}(A_i,A_j)\mid f(A_i)\subseteq Z(A_j),1\leqslant i\neq j\leqslant 2\}$.

证 由上面的讨论可知 $Q\Gamma(A_1)+Q\Gamma(A_2)+\Gamma_1+\Gamma_2\subseteq Q\Gamma(A)$.

设 $p_i\in\mathrm{Hom}(A,A_i)$, $i=1,2$ 是投影映射, 即对 $x=x_1+x_2\in A$, $x_i\in A_i$, $p_i(x)=x_i$, $i=1,2$. 对 $f\in Q\Gamma(A)$, 定义 $f_i\in\mathrm{Hom}(A_i,A_i)$, $i=1,2$, $f_3\in\mathrm{Hom}(A_1,A_2)$, $f_4\in\mathrm{Hom}(A_2,A_1)$,

$$f_1(x)=p_1f(x),\quad f_2(y)=p_2f(y),\quad f_3(x)=p_2f(x),\quad f_4(y)=p_1f(y),\quad x\in A_1,\ y\in A_2.$$

不失一般性, 设 $f_1(A_2)=f_3(A_2)=0$, $f_2(A_1)=f_4(A_1)=0$. 则对任意 $x=x_1+x_2\in A$, $x_1\in A_1$, $x_2\in A_2$, $f(x)=f(x_1)+f(x_2)=(f_1+f_2+f_3+f_4)(x)$.

因为 $[A,A_1,A_2]=0$, $f_1\in QC(A_1)$, $f_2\in QC(A_2)$, 则对任意 $x\in A_1,y,z\in A_2$,

$$[f_3(x),y,z]=[f(x),y,z]=[x,f(y),z]=0,\quad [f_3(A_1),A_2,A_2]=0,$$

即 $f_3\in\Gamma_1$. 类似讨论, 得到 $f_4\in\Gamma_2$, $Q\Gamma(A)\subseteq Q\Gamma(A_1)+Q\Gamma(A_2)+\Gamma_1+\Gamma_2$. 结论得证.

根据定理 5.4, 可得下面推论.

推论 5.1 设 A 是 3-李代数且具有分解 $A=A_1\oplus\cdots\oplus A_m$, 其中 $[A_i,A_j,A]=0$, $1\leqslant i\neq j\leqslant m$. 则 $Q\Gamma(A)=Q\Gamma(A_1)+\cdots+Q\Gamma(A_m)+\sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant m}\Gamma_{ij}$, 其中 $\Gamma_{ij}=\{f\in\mathrm{Hom}(A_i,A_j)\mid f(A_i)\subseteq Z(A_j),1\leqslant i\neq j\leqslant m\}$.

参 考 文 献

[1] Filippov V. n-Lie algebras [J]. *Sib Mat Zh,* 1985, 26(6):126–140.

[2] Bagger J, Lambert N. Gauge symmetry and supersymmetry of multiple M2-branes [J]. *Phys Rev D,* 2008, 77(6):215–240.

[3] Ho P, Hou R, Matsuo Y. Lie 3-algebra and multiple $M2$-branes [J]. *GHEP*, 2008, 2008(6):561–565.

[4] Gustavsson A. Algebraic structures on parallel $M2$-branes [J]. *Nuclear Physics B*, 2009, 81(1):66–76.

[5] Papadopoulos G. $M2$-branes, 3-Lie algebras and Plucker relations [J]. *JHEP*, 2008, 2008(5):645–677.

[6] Ho P, Imamura Y, Matsuo Y. $M2$ to $D2$ revisited, [J]. *JHEP*, 2008, 2008(7):807–813.

[7] Wang D, Yu Q. Derivations of the parabolic subalgebras of the general linear Lie algebra over a commutative ring [J]. *Linear Algebra Appl*, 2006, 418(2):763–774.

[8] Lu F. Lie triple derivations on nest algebras [J]. *Math Nachr*, 2007, 280(8):882–887.

[9] Cheung W. Lie derivations of triangular algebras [J]. *Linear Multi Algebra*, 2003, 51(51):299–310.

[10] Yu W, Zhang G. Nonlinear Lie derivations of triangular algebras [J]. *Linear Algebra Appl,* 2010, 432(11):2953–2960.

[11] Bai R, Wu W, Li Y, Li Z. Module extensions of 3-Lie algebras [J]. *Linear Multi Algebra*, 2012, 60(4):433–447.

[12] Bai R, Wang J, Li Z. Derivations of the 3-Lie algebra realizated by gl(n, C) [J]. *J Nonl Math Phys,* 2011, 18(1):151–160.

[13] Bai R, Zhang Z, Li H, Shi H. Inner derivation algebras [J]. *Commu Algebra*, 2000, 28(6):2927–2934.

[14] Dzhumadil'daev A. Representations of n-Lie algebras [J]. *Czechoslovak journal of Physics,* 2002, 48(2):1457–1464, arXiv:math/0202041v1.

[15] Leger G, Luks E. Generalized derivations of Lie algebras [J]. *J Algebra*, 2000, 228(1):165–203.

[16] Bai R, An H, Li Z. Centroid structures of n-Lie algebras [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2009, 430(430):229–240.

[17] Kasymov S. Solvability in representations of n-Lie algebras [J]. *Siberian Math Journal,* 1998, 39(2):289–291.

[18] Azcárraga J, Izquierdo J. Cohomology of Filippov algebras and an analogue of Whitehead's lemma [J]. *J Phys Conf Ser,* 2009, 2009(175):012001.

[19] Azcárraga J, Izquierdo J. n-ary algebras: A review with applications [J]. *J Phys A: Math Theor,* 2010, 43(29):18399–1860.

[20] Bai R, Zhang G, Zhang Y. On classification of n-Lie algebras [J]. *Front Math China*, 2011, 6(4):581–606.

Generalized Derivations of 3-Lie Algebras

BAI Ruipu[1] LI Qiyong[1] ZHANG Kai[2]

[1]College of Mathematics and Computer Science, Hebei University, Baoding 071002, Hebei, China.
E-mail: bairuipu@hbu.edu.cn; liqiyong@163.com
[2]Library, Agricultural University of Hebei, Baoding, 071001, Hebei, China.
E-mail: zhangkai@hebau.edu.cn

Abstract The authors introduce generalized derivations, quasiderivations and quasicentroid of 3-Lie algebras, and studied their relations. They also investigate the structure of quasiderivations and quasicentroid of 3-Lie algebras that contains a maximal diagonalized torus. It is proved that (1) the generalized derivation algebra $\mathbf{G}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ of a 3-Lie algebra $\mathbf{A}$ is the direct sum of quasiderivation algebra $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ and quasicentroid $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$; (2) quasiderivations of $\mathbf{A}$ can be embedded as derivations in a larger algebra; (3) quasiderivation algebra $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ normalizes quasicentroid, that is, $[\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A}), \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})] \subseteq \mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$; (4) if $\mathbf{A}$ contains a maximal diagonalized torus $\mathbf{T}$, then $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ and $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$ are diagonalized $\mathbf{T}$-modules, that is, as $\mathbf{T}$-modules, $(\mathbf{T}, \mathbf{T})$ semi-simplely acts on $\mathbf{Q}\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ and $\mathbf{Q}\Gamma(\mathbf{A})$, respectively.

Keywords 3-Lie algebra, Derivation, Generalized derivation, Quasiderivation, Quasicentroid

2000 MR Subject Classification 17B05, 17B30

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 38 No. 4, 2017
by ALLERTON PRESS, INC., USA