数学年刊 A 辑
2017, 38(4):461–468
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2017.0037

Kac-Moody 群及其旗流形的庞加莱级数和有理同伦型*

赵旭安[1] 金春花[2] 张继敏[3]

提要 研究了不定型的 Kac-Moody 群及其旗流形的有理上同调. 通过从庞加莱级数提取关于同调的信息, 能够决定 Kac-Moody 群及其旗流形的有理上同调环. 因为这些空间都是有理 formal 的空间, 也决定了它们的有理同伦群及有理同伦型.

关键词 Kac-Moody 群, 旗流形, 庞加莱级数, Leray-Serre 谱序列
MR (2000) 主题分类 55N45, 55N10
中图法分类 O189.22
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2017)04-0461-08

1 简 介

设 $A=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 整数矩阵, 满足
(1) 对任意 $i, a_{ii}=2$;
(2) 对 $i\neq j, a_{ij}\leqslant 0$;
(3) 若 $a_{ij}=0$, 则 $a_{ji}=0$.
则称 A 为一个 Cartan 矩阵.

根据 Kac[1]和 Moody[2]的工作, 对任意 Cartan 矩阵 A, 有伴随的李代数 $g(A)$, 称为 Kac-Moody 李代数. Kac 和 Peterson[3−5]对李代数 $g(A)$ 构造了 Kac-Moody 群 $G(A)$.

Kac-Moody 李代数和 Kac-Moody 群分为 3 种类型.
(1) 有限型, 此时 A 正定, $G(A)$ 恰好是以 A 为 Cartan 矩阵的单连通复半单李群.
(2) 仿射型, 此时 A 半正定并且秩为 $n-1$.
(3) 不定型, 其他情形.

记 $g(A)$ 的 Weyl 群为 $W(A)$, 则

$$W(A)=\langle\sigma_1,\cdots,\sigma_n \mid \sigma_i^2=1,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ (\sigma_i\sigma_j)^{m_{ij}}=1,\ 1\leqslant i<j\leqslant n\rangle,$$

这里 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 为关于 $g(A)$ 的 n 个单根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的 Weyl 反射. 当 $a_{ij}a_{ji}=0,1,2,3$ 或 $\geqslant 4$ 的时候, m_{ij} 分别为 $2,3,4,6$ 或 ∞.

每个群元素 $w\in W(A)$ 都具有分解 $w=\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_k}$, $1\leqslant i_1,\cdots,i_k\leqslant n$. 元素 w 的长度定义为 w 的所有的分解中最小的整数 k, 记为 $l(w)$. $g(A)$ 的庞加莱级数 $P_A(q)$ 为幂级数 $\sum\limits_{w\in W(A)} q^{2l(w)}$.

本文 2015 年 1 月 21 日收到, 2017 年 1 月 2 日收到修改稿.
[1]北京师范大学数学科学学院, 北京 100875. E-mail: zhaoxa@bnu.edu.cn
[2]信息保障技术重点实验室, 北京 100072. E-mail: jinch799@163.com
[3]天津市宝坻中等专业学校, 天津 301800. E-mail: zhangjimin19870606@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11571038) 的资助.

Kac-Moody 李代数 $g(A)$ 有 Cartan 分解 $g(A) = h \oplus \sum\limits_{\alpha\in\Delta} g_\alpha$, 这里 h 为 Cartan 子代数, Δ 为 $g(A)$ 的根系. 子代数 $b = h \oplus \sum\limits_{\alpha\in\Delta^+} g_\alpha$ 称为 Borel 子代数. 在 $G(A)$ 中有和 b 对应的 Borel 子群 $B(A)$. 齐性空间 $F(A) = G(A)/B(A)$ 称为 $G(A)$ 的旗流形. 根据 Kumar[6], $F(A)$ 为 ind-簇.

旗流形 $F(A)$ 有由 Schubert 胞腔给出的 CW-分解. Schubert 胞腔与 Weyl 群 $W(A)$ 的元素一一对应. 对每个 $w \in W(A)$, Schubert 簇 X_w 的实维数是 $2l(w)$. 因此旗流形 $F(A)$ 的庞加莱级数恰为 $g(A)$ 的庞加莱级数 $P_A(q)$.

由已有的关于旗流形的上同调和庞加莱级数的结果, 如 Kichiloo[7]和 Kumar[6], 可知有理上同调环旗 $H^*(G(A))$ 和 $H^*(F(A))$ 都是局部有限的, 因此它们都可以由可数个乘法生成元生成. Steinberg[8]证明旗流形 $F(A)$ 的庞加莱级数 $P_A(q)$ 可以写成 q 的有理函数.

有限和仿射型的 Kac-Moody 群及其旗流形的有理上同调已经被广泛地研究[6, 9–20]. 但是对于不定型的 Kac-Moody 群及其旗流形, 人们所知甚少. 事实上, 除了 $n \leqslant 2$ [6]以外, 没有任何例子被计算过. 因此自然有如下问题.

问题 1.1 如何决定不定型的 Kac-Moody 群及其旗流形的有理上同调环?

下面关于 Hopf 空间的有理上同调的定理是广为人知的结果.

定理 1.1 (Hopf[10]) 设 G 是具有 CW-复形的同伦型的连通的 H-空间, 则有理上同调环 $H^*(G)$ 为 Hopf 代数, 并且作为代数, 它同构于一个多项式代数 $P(V_0)$ 和一个外代数 $\Lambda(V_1)$ 的张量积, 这里 V_0 和 V_1 分别是 $H^*(G)$ 的奇数维和偶数维生成元的集合.

对于 Kac-Moody 群 $G(A)$, 当 $k \geqslant 0$ 时, $H^k(G(A))$ 为有限维的有理向量空间. 记 $V = V_0 \cup V_1$ 的次数为 k 的生成元的个数为 i_k, 则 $G(A)$ 的庞加莱级数为

$$P_{G(A)}(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2k-1})^{i_{2k-1}}}{(1-q^{2k})^{i_{2k}}}. \tag{1.1}$$

根据 Hopf 的定理, 为了确定同调环 $H^*(G(A))$, 关键是计算 $i_k, k > 0$.

在本文中我们的主要目标是解决前面的问题. 我们的策略是:

(1) 利用 Leray-Serre 谱序列, 从 $P_{G(A)}(q)$ 出发, 计算 $F(A)$ 的庞加莱级数 $P_A(q)$;

(2) 利用文 [21–22] 中的方法, 计算 $F(A)$ 的庞加莱级数 $P_A(q)$;

(3) 通过比较前面 (1) 和 (2) 中庞加莱级数的计算结果, 决定等式 (1.1) 中出现的整数 $i_k, k > 0$.

有限型和仿射型的旗流形的庞加莱级数已经知道了. 双曲型的 Kac-Moody 群的旗流形的庞加莱级数的计算在文 [24–25] 中有讨论. 文 [21–22] 讨论了一般的情形.

设主 $B(A)$-丛 $\pi: G(A) \to F(A)$ 的分类映射为 $j: F(A) \to BB(A)$, 这里 $BB(A)$ 为 Borel 子群 $B(A)$ 的分类空间, 则有同伦纤维化映射 $G(A) \xrightarrow{\pi} F(A) \xrightarrow{j} BB(A)$. 通过分析相应的 Leray-Serre 谱序列, 可得如下定理.

定理 1.2 对于 Kac-Moody 群 $G(A)$, 设它的庞加莱级数 $P_{G(A)}(q)$ 如等式 (1.1) 所示, 则 $F(A)$ 的庞加莱级数为

$$P_A(q) = \frac{1}{(1-q^2)^{n+i_2-i_1}} \frac{1}{\prod\limits_{k=2}^{\infty}(1-q^{2k})^{i_{2k}-i_{2k-1}}}. \tag{1.2}$$

进一步, 我们可以证明如下结果.

定理 1.3 数列 $i_2-i_1, i_4-i_3, \cdots, i_{2k}-i_{2k-1}, \cdots$ 可以由旗流形 $F(A)$ 的庞加莱级数 $P_A(q)$ 计算. 反过来, $P_A(q)$ 也可以由数列 $i_2-i_1, i_4-i_3, \cdots, i_{2k}-i_{2k-1}, \cdots$ 恢复.

为了决定 $G(A)$ 的有理上同调和有理同伦型, 我们需要决定序列 $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$. 因此除了庞加莱级数 $P_A(q)$, 我们需要更多的信息. 如果我们能够决定 V_1 中的所有生成元的次数, 那么我们就决定了数列 $i_1, i_3, \cdots, i_{2k-1}, \cdots$. 结合定理 1.3, 我们也就决定了数列 $i_2, i_4, \cdots, i_{2k}, \cdots$, 于是我们就能计算出 $G(A)$ 的有理同调环和有理同伦型.

由 Kac[25], Kac 和 Peterson[3−5], 序列 $i_1, i_3, \cdots, i_{2k-1}, \cdots$ 能够被 Weyl 群 $W(A)$ 的多项式不变量决定. 实际上 i_{2k-1} 为 $W(A)$ 的次数为 k 的基本不变多项式的个数.

在文 [26] 中, 两位作者证明了下面的定理. 它推广了 Moody[27]的一个猜想.

定理 1.4 设 A 是不可分解的不定型的 Cartan 矩阵, $I(A)$ 是 Weyl 群 $W(A)$ 的多项式不变量构成的环. 若 A 是可对称化的, 则 $I(A)=\mathbb{Q}[\psi]$, 这里 ψ 是 Killing 型; 若 A 是不可对称化的, 则 $I(A)=\mathbb{Q}$.

根据定理 1.4, 对于不可分解的不定型 Cartan 矩阵 A, 除了 $k=2$ 的情形, 总有 $i_{2k-1}=0$. 对于 $k=2$, 若 A 是可对称化的, 则 $i_3=1$; 若 A 是不可对称化的, 则 $i_3=0$. 一旦我们决定了序列 $i_1, i_3, \cdots, i_{2k-1}, \cdots$, 也就决定了序列 $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$. 这样我们就确定了上同调环 $H^*(G(A))$.

由于 Kac-Moody 群及其旗流形是有理 formal 的[28], 它们的有理同伦型被有理同调环决定. 因此我们也决定了 Kac-Moody 群及其旗流形的有理同伦型.

文章的主要内容如下. 第 2 节, 介绍了本文需要的一些代数和组合结果. 第 3 节通过利用 Leray-Serre 谱序列, 从 $G(A)$ 的庞加莱级数出发, 计算了旗流形 $F(A)$ 的庞加莱级数 $P_A(q)$. 文章的主要定理在第 4 节给出. 第 5 节我们给出了一类重要的例子.

2 一些代数和组合结果

令 $\mathbb{Z}_1[q]$ 是 q 的常数项为 1 的整系数幂级数的集合. 即对 $f(q)\in\mathbb{Z}_1[q]$,

$$f(q)=1+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_kq^k+\cdots, a_k\in\mathbb{Z},\quad k>0.$$

我们有下面的结果.

命题 2.1 $f(q)\in\mathbb{Z}_1[q]$ 可以唯一的展开为乘积 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{i_k}$, 这里 $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$ 为整数序列.

证 对 $f(q)$, 我们归纳地定义整数序列 $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$.

首先令 $i_1=a_1$, $f^{(1)}(q)=\frac{f(q)}{(1-q)^{i_1}}$, 则 $f^{(1)}(q)\in\mathbb{Z}_1[q]$. 设

$$f^{(1)}(q)=1+a_2^{(1)}q^2+a_3^{(1)}q^3+\cdots+a_k^{(1)}q^k+\cdots.$$

令 $i_2=a_2^{(1)}$, $f^{(2)}(q)=\frac{f^{(1)}(q)}{(1-q^2)^{i_2}}$, 则 $f^{(2)}(q)\in\mathbb{Z}_1[q]$, 且

$$f^{(2)}(q)=1+a_3^{(2)}q^3+a_4^{(2)}q^4+\cdots+a_k^{(2)}q^k+\cdots.$$

令 $i_3=a_3^{(2)}$ 并且继续同样的过程, 我们得到了整数序列 $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$.

通过检查上述过程, 并且比较幂级数的系数, 我们容易说明序列 $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$ 的唯一性.

我们称序列 $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$ 为幂级数 $f(q)$ 的特征序列. 由命题 2.1, 我们知道 $\mathbb{Z}_1[q]$ 的元素和指标为自然数的整数序列之间存在一一对应, 并且若幂级数 $f_1(q), f_2(q)$ 分别对应序列 $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_k, \cdots$, 则 $f_1(q)f_2(q)$ 对应序列 $i_1+j_1, i_2+j_2, \cdots, i_k+j_k, \cdots$.

特征序列 $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$ 可以利用 Möbius 反演定理来计算.

命题 2.2 设 $f(q) \in \mathbb{Z}_1[q]$, 若 $\ln(f(q)) = b_1 q + \frac{b_2}{2} q^2 \cdots + \frac{b_k}{k} q^k + \cdots$, 则

$$i_k = \frac{1}{k} \sum_{n|k} \mu(n) b_{\frac{k}{n}}.$$

证 对等式 $f(q) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^{i_k}$ 的两边取 "ln", 可得

$$b_1 q + \frac{b_2}{2} q^2 \cdots + \frac{b_k}{k} q^k + \cdots = \ln \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^{i_k},$$

等式右侧 $= \sum\limits_{k=1}^{\infty} i_k \ln(1-q^k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} i_k \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q^{kn}}{n} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i_k}{n} q^{kn} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(\sum\limits_{k|n} \frac{k \cdot i_k}{n} \big) q^n.$

比较两边的系数, 我们有 $\sum\limits_{k|n} k \cdot i_k = b_n$.

我们需要下面的定理计算 i_k.

定理 2.1 (Möbius 反演定理) 设 $F(n), f(n)$ 是指标取值为自然数的整数序列, 若 $F(n) = \sum\limits_{k|n} f(k)$, 则 $f(k) = \sum\limits_{n|k} \mu(n) F\big(\frac{k}{n}\big)$, 这里 $\mu(n)$ 满足:

(1) 当 $n = 1$ 时, $\mu(n) = 1$.

(2) 当 $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i$ 时, $\mu(n) = (-1)^r$, 这里 $p_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 为不同的素数.

(3) 对其他情形, $\mu(n) = 0$.

利用 Möbius 反演定理, 从 $\sum\limits_{k|n} k \cdot i_k = b_n$, 可得

$$k \cdot i_k = \sum_{n|k} \mu(n) b_{\frac{k}{n}}.$$

例 2.1 若 $f(q) = 1 - 2q$, 则 $b_n = 2^n$, 于是

$$k \cdot i_k = \sum_{d|k} \mu(d) 2^{\frac{k}{d}}.$$

取 $k = 18$, 它的所有的因子为 $1, 2, 3, 6, 9, 18$, 由

$$\mu(1) = 1, \quad \mu(2) = -1, \quad \mu(3) = -1, \quad \mu(6) = 1, \quad \mu(9) = \mu(18) = 0,$$

于是 $18 i_{18} = 2^{18} - 2^9 - 2^6 + 2^3$, 即 $i_{18} = 14532$.

我们列出下面的计算结果.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
i_k	2	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335	630	1161	2182	4080	7710	14532

3 Leray-Serre 谱序列

在这一节里, 我们利用纤维化 $G(A) \xrightarrow{\pi} F(A) \xrightarrow{j} BB(A)$ 的 Leray-Serre 谱序列, 从 $G(A)$ 的上同调和庞加莱级数来计算旗流形 $F(A)$ 的上同调和庞加莱级数. 关于谱序列的知识, 请参见文 [29].

$BB(A)$ 同伦等价于空间 $B\mathbb{C}^*(\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\})$ 的 n-重笛卡尔乘积. 记 $H^*(BB(A))$ 的上同调生成元为 $\omega_1, \cdots, \omega_n$, $H^*(G(A))$ 的奇数次数的自由生成元为 $y_1, y_2, \cdots, y_l, \cdots$, 偶数次数的生成元为 $z_1, z_2, \cdots, z_k, \cdots$, 这里 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 对应于李代数 $g(A)$ 的基本控制权. 我们有谱序列 $(E_r^{p,q}, \mathrm{d}_r)$, 其中

$$E_2^{p,q} = H^p(BB(A); H^q(G(A))) \cong \mathbb{Q}[\omega_1, \cdots, \omega_n] \otimes \Lambda(y_1, \cdots, y_l) \otimes \mathbb{Q}[z_1, \cdots, z_k, \cdots].$$

微分 $\mathrm{d}_2 : E_2^{p,q} \to E_2^{p+2,q-1}$ 给出如下: $\mathrm{d}_2(\omega_i \otimes 1) = 0, \mathrm{d}_2(1 \otimes z_k) = 0, \mathrm{d}_2(1 \otimes y_j) = f_j \otimes 1, 1 \leqslant j \leqslant l$, 这里 $f_j \in H^*(BB(A))$ 为关于 $\omega_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 的 $W(A)$ 不变多项式. 常规的计算表明

$$H^*(F(A)) \cong E_3^{*,*} \cong \mathbb{Q}[\omega_1, \cdots, \omega_n]/\langle f_j, 1 \leqslant j \leqslant l\rangle \otimes \mathbb{Q}[z_1, \cdots, z_k, \cdots].$$

根据文 [25], $f_1, f_2, \cdots, f_l, \cdots$ 为 $H^*(BB(A))$ 中的正则序列, 因此是有限个, 并且 $l \leqslant n$. 由此可得

$$P_A(q) = \frac{1}{(1-q^2)^{n+i_2-i_1}} \frac{1}{\prod\limits_{k=2}^{\infty}(1-q^{2k})^{i_{2k}-i_{2k-1}}}. \tag{3.1}$$

这就证明了定理 1.2.

4　主要定理

旗流形 $F(A)$ 的庞加莱级数 $P_A(q)$ 具有形式 $P_A(q) = g(q^2)$. 对 $g(q)$ 使用命题 2.1, 可以证明定理 1.3. 即我们可以从 $P_A(q)$ 计算序列 $i_2 - i_1, i_4 - i_3, \cdots, i_{2k} - i_{2k-1}, \cdots$.

利用文 [26, 定理 4], 对于不可分解的不定型 Cartan 矩阵 A, $i_1, i_3, \cdots, i_{2k+1}, \cdots$ 被决定, 结合定理 1.4, 我们可以决定序列 $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$.

由于 $G(A)$ 为单连通群, 我们有 $i_1 = 0$. 根据 $F(A)$ 的 Schubert 分解, 我们知道 $H^2(F(A))$ 由与 n 个 Weyl 反射对应的 Schubert 类张成. 因此 $n + i_2 - i_1 = n$, 即 $i_2 = 0$. 为了确定 i_3, 我们需要下面的定义.

定义 4.1　若 Cartan 矩阵 A 可以写成对角矩阵 D 和对称矩阵 B 的乘积, 则称 A 是可对称化的.

矩阵 A 是否可对称化与 $g(A)$ 上是否存在非退化的不变双线性型 ψ 紧密相关. 由定理 1.4 可以直接看出, 如果 A 是可对称化的, 则 $i_3 = 1$; 否则 $i_3 = 0$. 并且对于 $k > 3$, $i_{2k-1} = 0$. 现在我们决定了 $i_1, i_3, \cdots, i_{2k-1}, \cdots$, 也就决定了所有的 $i_k, k > 0$.

我们像文 [25] 中一样, 根据 Cartan 矩阵 A 是否可对称化, 令 $\epsilon(A) = 1$ 或 0. 本文的基本定理表达如下.

定理 4.1　设 A 是不可分解的不定型的 Cartan 矩阵, 若 A 是可对称化的, 则

$$H^*(G(A)) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_3) \otimes \mathbb{Q}[z_1, \cdots, z_k, \cdots],$$

并且

$$H^*(F(A)) \cong \mathbb{Q}[\omega_1, \cdots, \omega_n]/\langle\psi\rangle \otimes \mathbb{Q}[z_1, \cdots, z_k, \cdots],$$

若 A 是不可对称化的, 则

$$H^*(G(A)) \cong \mathbb{Q}[z_1, \cdots, z_k, \cdots],$$

并且

$$H^*(F(A)) \cong \mathbb{Q}[\omega_1, \cdots, \omega_n] \otimes \mathbb{Q}[z_1, \cdots, z_k, \cdots],$$

这里对任意的 k, $\deg z_k \geqslant 4$ 为偶数, 它们可以由庞加莱级数 $P_A(q)$ 和 $\epsilon(A)$ 来决定.

Kumar[30]证明了对 Kac-Moody 李代数 $g(A)$, 李代数上同调 $H^*(g(A),\mathbb{C})$ 与 $\cong H^*(G(A))\otimes\mathbb{C}$ 同构, 因此我们也计算出了 $H^*(g(A),\mathbb{C})$.

5 一个例子

我们用下面的例子结束本文.

例 5.1 设 A 是对任意 $i\neq j$, 满足 $a_{ij}a_{ji}\geqslant 4$ 的 $n\times n$ Cartan 矩阵, 则 Weyl 群 $G(A)$ 为

$$W(A)=\langle\sigma_1,\cdots,\sigma_n\mid\sigma_i^2=1,1\leqslant i\leqslant n\rangle.$$

$W(A)$ 中长度为 k 的元素形如 $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}$, 且 $1\leqslant i_1,\cdots,i_k\leqslant k-1, i_t\neq i_{t+1}, 1\leqslant t\leqslant k-1$. 因此 $W(A)$ 中长度为 k 的元素的个数是 $n(n-1)^{k-1}$, 于是庞加莱级数为

$$P_A(q)=\sum_{k=0}^{\infty}n(n-1)^{k-1}q^{2k}=\frac{1+q^2}{1-(n-1)q^2}.$$

根据著名的 Witt 公式[31]

$$1-nq=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{\dim L_n^k},$$

设 L_n 是 n 个次数为 1 的元素自由生成的分次李代数, $L_n=\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty}L_n^k$, 其中 $\dim L_n^k$ 为 L_n 中的 k 次齐次部分的维数. 它可以利用 Möbius 反演定理来计算. 对 $n=2$ 的情形可以参看例 5.1. 则

$$P_A(q)=\frac{1-q^4}{1-q^2}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})^{\dim L_{n-1}^k}}.$$

从 $P_A(q)$ 的表达式, 我们可得如下结论:

(1) 若 A 是可对称化的, 则 $i_1=i_2=0, i_3=1$, 并且当 $k\geqslant 3$ 时, $i_{2k-1}=0$; 当 $k\geqslant 2$ 时 $i_{2k}=\dim L_{n-1}^k$.

(2) 若 A 是不可对称化的, 则 $i_1=i_2=i_3=0, i_4=\dim L_{n-1}^2-1$, 并且对任意 $k>0$, $i_{2k-1}=0$; 当 $k\geqslant 3$ 时, $i_{2k}=\dim L_{n-1}^k$.

参 考 文 献

[1] Kac V G. Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth [J]. *Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat,* 1968, 32:1323–1367.

[2] Moody R V. A new class of Lie algebras [J]. *J Algebra*, 1968, 10:211–230.

[3] Kac V G, Peterson D. Regular functions on certain infinite-dimensional groups, Arithmetic and geometry, II [J]. *Prog Math*, 1983, 36:141–166.

[4] Kac V G, Peterson D. Defining relations of certain infinite-dimensional groups [M]. The mathematical heritage of Elie Cartan, Lyon, 1984, Astérisque 1985, Numéro Hors Série, 165–208.

[5] Kac V G. Constructing groups associated to infinite-dimensional Lie algebras, Infinite-dimensional groups with applications [J]. *Math Sci Res Inst Publ*, 1984, 4:167–216.

[6] Kumar S. Kac-Moody groups, their flag varieties and representation theory [M]//Progress in Mathematics, Vol 204, Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 2002.

[7] Kitchloo N R. Topology of Kac-Moody groups [D]. Ph D thesis of California Institute of Technology, 1998.

[8] Steinberg R. Endomorphisms of linear algebraic groups [M]//Memoirs of the American Mathematical Society, Providence, RI: American Mathematical Society, 1968.

[9] Pontryagin L S. Sur les nombres de Betti des groupes de Lie [J]. *C R Acad Sci*, 1935, 200:1277–1280.

[10] Hopf H. Uber die topologie der gruppenmannigfaltigkeiten und ibre veraligemeinerungen [J]. *Ann Math*, 1941, 42:22–52.

[11] Borel A. Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts [J]. *Ann Math*, 1953, 57:115–207.

[12] Borel A. Homology and cohomology of compact connected Lie groups [J]. *Proc Nat Acad Sci*, 1953, 39:1142–1146.

[13] Borel A. Sur la homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes [J]. *Amer J Math*, 1954, 76:273–342.

[14] Bott R, Samelson H. The cohomology ring of G/T [J]. *Proc Nat Acad Sci*, 1955, 41:490–493.

[15] Bott R. An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups [J]. *Bull Soc Math France*, 1956, 84:251–281.

[16] Milnor J W, Moore J C. On the structure of Hopf algebras [J]. *Ann Math*, 1965, 81(2):211–264.

[17] Chevalley C. Sur les decompositions cellulaires des espaces G/B, in algebraic groups and their generalizations: Classical methods [J]. W Haboushed Proc Symp in Pure Math, 1994, 56(1):1–26.

[18] Bernstein I N, Gel'fand I M, Gel'fand S I. Schubert cells and cohomology of the spaces G/P [J]. *Russian Math Surveys*, 1973, 28:1–26.

[19] Demazure M. Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, Collection of articles dedicated to Henri Cartan on the occasion of his 70th birthday [J]. *I Ann Sci École Norm Sup*, 1974, 7(4):53–88.

[20] Kostant B, Kumar S. The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G [J]. *Adv in Math*, 1986, 62(3):187–237.

[21] 金春花. Kac-Moody 李代数的庞加莱级数 [D]. 北京: 北京师范大学, 2010.

[22] Jin C H, Zhao X. On the Poincaré series of Kac-Moody Lie algebra [J]. arXiv:1210.0648.

[23] Gungormez M, Karadayi H R. On Poincaré series of hyperbolic Lie algebra [J]. arXiv:0706.2563.

[24] Chapovalov M, Leites D, Stekolshchik R. The Poincaré series of the hyperbolic Coxeter groups with finite volume of fundamental domains [J]. *J Nonl Math Phy*, 2010, 17(1):169–215.

[25] Kac V G. Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of reductive algebraic groups, [J]. *Invent Math*, 1985, 80(1):69–79.

[26] Zhao X, Jin C H. Polynomial invariants of Weyl groups for Kac-Moody groups [J]. *Pacific J Math*, 2014, 269(2):491–509.

[27] Moody R V. Polynomial invariants of isometry groups of indefinite quadratic lattices [J]. *Tohoku Math J*, 1978, 30(2):525–535.

[28] Sullivan D. Infinitesimal computations in topology [J]. *Inst Hautesétudes Sci Publ Math*, 1977, 47:269–331.

[29] Whitehead G W. Elements of homotopy theory [M]. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1978.

[30] Kumar S. Rational homotopy theory of flag varieties associated to Kac-Moody group-s [M]//Infinite-dimensional groups with applications, Berkeley, Calif, 1984, 233–273, Math Sci Res Inst Publ, vol. 4, New York: Springer-Verlag, 1985.

[31] Kang S J. Kac-Moody Lie algebras, spectral sequences, and the Witt formula [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1993, 339:463–495.

Poincaré Series and Rational Homotopy Types of Kac-Moody Groups and Their Flag Manifolds

ZHAO Xu'an[1] JIN Chunhua[2] ZHANG Jimin[3]

[1]School of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China.
E-mail: zhaoxa@bnu.edu.cn

[2]Science and Technology on Information Assurance Laboratory, Beijing 100072, China. E-mail: jinch799@163.com

[3]Tianjin Baodi Specialized Secondary School, Tianjin 301800, China.
E-mail: zhangjimin19870606@163.com

Abstract In this paper, the authors study the rational cohomology rings of indefinite Kac-Moody groups and their flag manifolds. By extracting the information of cohomology from the Poincaré series, the rational cohomology rings of these spaces can be determined. Since Kac-Moody groups and their flag manifolds are rational formal, the authors also determine the rational homotopy groups and rational homotopy types.

Keywords Kac-Moody group, Flag manifold, Poincaré series, Leray-Serre spectral sequence

2000 MR Subject Classification 55N45, 55N10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 38 No. 4, 2017
by ALLERTON PRESS, INC., USA