数学年刊 A 辑
2017, 38(4):469–476
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2017.0038

带有共振的二阶哈密顿系统非平凡解的存在性

单　远[1]

提要　本文研究二阶哈密顿系统的非平凡解问题. 假设系统中的非线性项 V' 是渐近线性的. 利用变分法, 通过系统对应泛函的小扰动的临界点来建立系统的 Palais-Smale 序列, 进而说明该序列的有界性. 与一般做法不同的是, 本文对 V' 不限定 Landesman-Lazer 条件.

关键词　二阶哈密顿系统, 共振条件, Morse 理论, 非平凡解
MR (2000) 主题分类　34B15, 47E05
中图法分类　O175.29
文献标志码　A
文章编号　1000-8314(2017)04-0469-08

1　引言与主要结论

本文主要研究如下二阶哈密顿系统的非平凡解的存在性:

$$\ddot{x} + V'(t,x) = 0, \tag{1.1}$$

$$x(0) = 0 = x(1). \tag{1.2}$$

定义 Hilbert 空间: $E = H_0^1([0,1];\mathbb{R}^n) := \{x : [0,1] \to \mathbb{R}^n \mid x(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 满足 (1.2), 且 $x' \in L^2((0,1);\mathbb{R}^n)\}$. 定义 E 的范数 $\|x\| := \big(\int_0^1 |x'(t)|\mathrm{d}t\big)^{\frac{1}{2}}$. 由变分法可知, 方程 (1.1)–(1.2) 的解的研究可转化为研究如下泛函的临界点:

$$I(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x'|^2\mathrm{d}t - \int_0^1 V(t,x)\mathrm{d}t, \quad I(x) \in C^2(E,\mathbb{R}). \tag{1.3}$$

对于 (1.1) 中的非线性项 V, 假设如下的渐近线性条件:

(V_∞) $V \in C^2([0,1]\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, 且存在 $A_1, A_2 \in L_s(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$A_1(t) \leqslant V''(t,x) \leqslant A_2(t), \quad |x| \geqslant M > 0,$$

(V_0) $V'(t,0) \equiv 0,\ A_0(t) = V''(t,0)$.

在本文中, 对于任意的 $A_1, A_2 \in L_s(\mathbf{R}^n)$, 若 $A_2 - A_1$ 半正定, 则称 $A_1 \leqslant A_2$; 若 $A_2 - A_1$ 正定, 则称 $A_1 < A_2$. 假设 $A_1, A_2 \in L^\infty((0,1);L_s(\mathbf{R}^n))$, 若对于几乎处处的 $t \in (0,1)$, $A_1(t) \leqslant A_2(t)$, 则称 $A_1 \leqslant A_2$; 若 $A_1 \leqslant A_2$, 且对于 $(0,1)$ 中的一个非零测集有 $A_1(t) < A_2(t)$, 则称 $A_1 < A_2$.

通常情形下我们称 (V_∞) 为渐近线性条件. 在本文中, 我们将研究带有共振的渐近线性条件. 例如: A_1, A_2 是特征值的情形.

本文 2014 年 7 月 26 日收到, 2016 年 8 月 19 日收到修改稿.

[1]南京审计大学理学院, 南京 211815. E-mail: shannjnu@gmail.com

最初, Landesman-Lazer 在文 [1] 中利用 Schauder 不动点定理研究共振问题, 并提出了著名的 Landesman-Lazer 共振条件. 利用这一条件, Rabinowitz 在文 [2]、张恭庆在文 [3] 中分别运用极小极大方法和 Morse 理论研究了共振问题. 自此以后许多数学家利用各类方法研究了这类问题. 例如, 文 [4–5] 和文 [6] 分别利用 Morse 理论和下降流不变集的方法研究了椭圆共振问题.

在上述文献中, 解决这类问题的最大的困难在于证明 Palais-Smale 序列的有界性. 此外, 在上述文献中都运用一些额外的条件作用在非线性项上, 使得非线性项在无穷远处与线性算子的谱不相交或解具有先验有界性.

在本文中, 我们希望得到在没有限制条件情形时, 共振问题非平凡解的存在性. 在本文中, 解的存在性是通过非线性项在原点处和无穷远处的扭转来实现的. 指标是描述扭转性条件的定量工具. 在文 [7–9] 中, Conley, Zehnder 和龙以明等建立了辛道路上的指标理论. 文 [10–11] 建立了二阶哈密顿系统的指标理论, 文 [11–12] 建立了一阶哈密顿系统的指标理论.

为了描述本文的主要结论, 首先引用文 [10, 12] 中的一些定义: 对于任一 $n \times n$ 的对称矩阵函数 $B(t)$, 我们可以将空间 E 分解为 3 个子空间 $E = E^-(B) \oplus E^0(B) \oplus E^+(B)$, 使得自伴算子 $A = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - B$ 在 $E^-(B)$ 和 $E^+(B)$ 中分别负定和正定, 且 $E^0(B)$ 是 A 的解空间. 定义 $i(B) = \dim E^-(B)$ 且 $\nu(B) = \dim E^0(B)$.

下面的定理是我们的主要结论.

定理 1.1 假设条件 (V_∞) 满足 $i(A_1) + \nu(A_1) = i(A_2)$, $\nu(A_1) \neq 0$, $\nu(A_2) = 0$, 且条件 (V_0) 满足 $\nu(A_0) = 0$. 如果 (1.1)–(1.2) 满足扭转条件 $i(A_1) - i(A_0) \geqslant 2$, 那么方程 (1.1)–(1.2) 至少有一个非平凡解.

在本文中, 首先通过原有系统的近似解来构造 Palais-Smale 序列, 然后通过控制近似解的 Morse 指标得出这一序列的先验有界性. 这一想法最早起源于带有超二次解的哈密顿系统的研究中 (见 [13]). 在这里我们给出张恭庆和 Rabinowitz 的文 [3, 14] 作为参考. 需要特别指出的是在文 [15–16] 中, 刘兆理等分别研究了非线性椭圆方程和一阶哈密顿系统, 并在无穷远处不添加任何共振或不共振条件, 特别地, 他们允许非线性项和谱在无穷远处有任意的相交性.

受上述文献以及文 [17] 的启发, 在本文中, 在原有泛函 (1.3) 的基础上, 研究一列扰动泛函的临界点 (这些临界点可被看作为特殊的 Palais-Smale 序列). 应用 Morse 理论, 将控制这些临界点的 Morse 指数. 最终, 通过将这些临界点的 Morse 指数的估计和扭转性条件相结合, 将建立这一特殊 Palais-Smale 序列的有界性, 从而诱导出一个收敛子列, 并证明这一子列的极限是原有问题的非平凡解.

2 非平凡解的存在性

应用文 [10, 性质 2.1.3, 2.5.2, 定义 2.5.1], 能够得到如下性质.

性质 2.1 (i) 对于 $B_1, B_2 \in L^\infty((0,1), L_s(\mathbb{R}^n))$, 若 $B_1 \leqslant B_2$, 有 $i(B_1) \leqslant i(B_2)$; 若 $B_1 < B_2$, 则有 $i(B_1)+\nu(B_1) \leqslant i(B_2)$.

(ii) 对于任意的 $B \in L^\infty((0,1), L_s(\mathbb{R}^n))$, 存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得对于任意 $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, 有

$$\begin{aligned}&\nu(B+\epsilon) = 0 = \nu(B-\epsilon),\\ &i(B-\epsilon) = i(B),\\ &i(B+\epsilon) = i(B)+\nu(B).\end{aligned}$$

众所周知, 在定理 1.1 中, 若 $i(A_1) = i(A_2)$ 且 $\nu(A_2) \neq 0$, 那么 (V_∞) 被称为非共振条件. 在文 [10] 中, 作者利用 Morse 理论证明了如下的定理.

定理 2.1 ([10, 定理 3.3]) 假设

(i) $V \in C^2([0,1]\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $A_1(t) \leqslant V''(t,x) \leqslant A_2(t)$, $|x| \geqslant M > 0$ 且 $i(A_1)+\nu(A_1) = i(A_2)$, $\nu(A_2) = 0$.

(ii) $V'(t,0) \equiv 0$, $A_0(t) = V''(t,0)$ 且 $i(A_1) \notin [i(A_0), i(A_0)+\nu(A_0)]$.

那么方程 (1.1)–(1.2) 至少含有一个非平凡解. 此外, 如果假设

(iii) $\nu(A_0) = 0$, $|i(A_1)-i(A_0)| \geqslant n$,

那么方程 (1.1)–(1.2) 至少含有两个非平凡解.

设 X 是 Banach 空间且 $f \in C^1(X, \mathbb{R})$. 设 $K = \{x \in X \mid f'(x) = 0\}$, $f^a = \{x \in X \mid f(x) \leqslant a\}$. 对于任意一个孤立的临界点 x_0, 定义如下的临界群 $C_q(f, x_0) = H_q(f^c \cap U, (f^c \backslash \{x_0\} \cap U); G)$, 这里 U 是 x_0 的邻域且满足 $U \cap \{x_0\} = \{x_0\}$, $c = f(x_0)$. 对于任意的 $a < b$, 若 $K \cap F^{-1}[a,b] = \{z_1, \cdots, z_l\}$, 定义 $M_q = \sum\limits_{i=1}^{l} \mathrm{rank} C_q(f, z_i)$ 且 $\beta_q = \mathrm{rank} H_q(f^b, f^a; G)$.

根据文 [10, 定理 3.3] 的证明, 有如下性质.

性质 2.2 由条件 (i), 如下事实成立:

$$H_q(I, f^{-c}; \mathbb{R}) \cong \delta_{q\gamma}\mathbb{R}, \tag{2.1}$$

这里 $c > -\Phi(\theta)$ 充分大, 且 $\gamma = i(A_2)$.

考虑如下的扰动泛函:

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{x}|^2 \mathrm{d}t - \int_0^1 V_\epsilon(t,x)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in E, \tag{2.2}$$

这里 $V_\epsilon(t,x) = V(t,x) + \frac{1}{2}\epsilon|x|^2$. 显然, (2.2) 对应的扰动系统是

$$\ddot{x} + V_\epsilon'(t,x) = 0, \tag{2.3}$$

这里 $(V_\epsilon'(t,x), u) = V'(t,x)x + \epsilon(x,u)$, $\forall u \in E$, 并且 V_ϵ' 满足:

(V_∞^ϵ) $A_1(t) \leqslant V_\epsilon''(t,x) \leqslant A_2(t)$, 同时

$$i(A_1+\epsilon) = i(A_2+\epsilon), \quad \nu(A_2+\epsilon) = 0.$$

(V_0^ϵ) $V_\epsilon'(t,0) = 0$, $V_\epsilon''(t,0) = A_0+\epsilon$, $\nu(A_0+\epsilon) = 0$.

此外, 还有 $i(A_1+\epsilon)-i(A_0+\epsilon)=i(A_2)-i(A_0)>i(A_1)-i(A_0)\geqslant 2$. 从而 $i(A_1+\epsilon)\notin [i(A_0+\epsilon), i(A_0+\epsilon)+\nu(A_0+\epsilon)]=i(A_0)$. 根据定理 2.1, 当 ϵ 充分小时, I_ϵ 在 E 中至少含有一个非平凡解.

根据上述讨论, 可以得到, 当 ϵ 充分小时,

$$I'_\epsilon(x_\epsilon)=0,\quad x_\epsilon\neq 0, \tag{2.4}$$

并且可以得到, 如果 x_ϵ 在 E 中含有一个收敛子列 $x_\epsilon\to x$, 那么 $x\neq 0$ 以及

$$\begin{aligned}&I'(x_\epsilon)v=I'_\epsilon(x_\epsilon)v+\epsilon(x_\epsilon,v)\to 0,\\&I(x_\epsilon)\to I(x).\end{aligned}$$

那么 x 是问题 (1.1) 和 (1.2) 的一个非平凡解.

引理 2.1 $\{x_\epsilon\}$ 是一个有界序列.

证 若 $\{x_\epsilon\}$ 无界, 则 $\|x_\epsilon\|\to\infty$. 设 $y_\epsilon=\frac{x_\epsilon}{\|x_\epsilon\|}$. 那么 $\|y_\epsilon\|=1$ 且在 E 中 $y_\epsilon\rightharpoonup y$. 假设 $w_\epsilon=y_\epsilon-y$, 只需要证明在 E 中 $w_\epsilon\to 0$.

根据条件 (V_∞), 存在常数 $M>0$, 使得 $\left|\frac{V'(t,x)}{x}\right|<M$ 且 $\int_0^1\frac{V'(t,x_\epsilon)}{x_\epsilon}yw_\epsilon\mathrm{d}t\to 0$.

$$\begin{aligned}0&=\frac{I'_\epsilon(x_\epsilon)}{\|x_\epsilon\|}w_\epsilon\\&=(y_\epsilon,w_\epsilon)-\int_0^1\frac{V'(t,x_\epsilon)}{\|x_\epsilon\|}w_\epsilon\mathrm{d}t\\&=o(1)+\|w_\epsilon\|^2-\int_0^1\frac{V'(t,x_\epsilon)}{x_\epsilon}y_\epsilon w_\epsilon\mathrm{d}t\\&=o(1)+\|w_\epsilon\|^2-\int_0^1\frac{V'(t,x_\epsilon)}{x_\epsilon}w_\epsilon w_\epsilon\mathrm{d}t\\&\geqslant o(1)+\|w_\epsilon\|^2-M\|w_\epsilon\|_2^2.\end{aligned}$$

假设 P_1, P_2 分别对应到 $[0,b)$ 和 $[b,\infty)$ 上的投射, 可以得到 $\|P_2u\|_2\leqslant\frac{1}{b}\|P_2u\|$, 这里 $\|\cdot\|_2$ 指 L^2 空间中的范数, 那么 P_1 有限维且 $P_2w_\epsilon\to 0$.

由计算, 易得

$$0\geqslant o(1)+\Big(1-\frac{M}{b}\Big)\|P_2w_\epsilon\|^2. \tag{2.5}$$

由此可得在 E 中 $\|P_2w_\epsilon\|\to 0$. 从而在 E 中 $y_\epsilon\to y$ 且 $\|y\|=1$.

$\{y_\epsilon\}$ 满足

$$\ddot{y}_\epsilon+\frac{V'_\epsilon(t,x_\epsilon)}{\|x_\epsilon\|}=0, \tag{2.6}$$

即

$$\ddot{y}_\epsilon+\frac{V'(t,x_\epsilon)}{x_\epsilon}y_\epsilon+\epsilon y_\epsilon=0.$$

根据 (V_∞), 可以推导出

$$V'(t,x)=B_\infty(t,x)x+h(t,x),$$

这里 $B_\infty(t,x)+h(t,x)$ 连续, 且 $h(t,x)$ 有界.

$$\ddot{y}_\epsilon + B_\infty(t,x_\epsilon)y_\epsilon + \epsilon y_\epsilon + e_\epsilon = 0, \tag{2.7}$$

这里在 $C(0,1)$ 中, $e_\epsilon = \frac{V'(t,x_\epsilon)-B_\infty(t,x_\epsilon)x_\epsilon}{\|x_\epsilon\|} \to 0$. 假设在 $L^2(0,1)$ 中, $b_{ij}^\epsilon \rightharpoonup b_{ij}$, 这里 $B_\infty(t,x_\epsilon)=(b_{ij}^\epsilon)_{n\times n}(t)$ (不失一般性, 设子列为此记号). 定义 $B_0(t)=(b_{ij})_{n\times n}(t)$, 在等式 (2.7) 的两边取极限, 可得

$$\ddot{y}(t) + B_0(t)y(t) = 0. \tag{2.8}$$

又由 (V_∞) 可得 $A_1 \leqslant B_0 \leqslant A_2$.

情形 1　$A_1 < B_0 < A_2$. 由指标的单调性可知 $\nu(B_0)=0$. 这一结论与 $y \neq 0$ 矛盾.

情形 2　$B_0 = A_1$.

因为 $y\neq 0$, 以及唯一连续定理, 可得 $y(t)\neq 0$, $\forall t\in(0,1)$, 从而 $x_\epsilon(t)\to\infty$, $\forall t\in(0,1)$. 对于任意的 $z\in E^-(A_1)$, 可得

$$(I''_\epsilon(x_\epsilon)z,z) = \|z\|^2 - \int_0^1 V''(t,x_\epsilon)zz\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

由 Fatou 引理, 有

$$\begin{aligned}\liminf_{\epsilon\to 0}\int_0^1 V''(t,x_\epsilon)zz\mathrm{d}t &\geqslant \int_0^1 \liminf_{\epsilon\to 0} V''(t,x_\epsilon)zz\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^1 A_1(t)zz\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

这就说明了

$$\limsup_{\epsilon\to 0}(I''_\epsilon(x_\epsilon)z,z) \leqslant \int_0^1 |\dot{z}|^2\mathrm{d}t - \int_0^1 A_1(t)zz\mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

因此, 若 ϵ 充分小, 有

$$(I''_\epsilon(x_\epsilon)z,z) < 0. \tag{2.11}$$

从而, 当 ϵ 充分小时, Morse 指标 $\mu(x_\epsilon)\geqslant i(A_1)$.

$$C_q(I_\epsilon,x_\epsilon)=0, \quad q<i(A_1) \tag{2.12}$$

且

$$M_q = \begin{cases} 1, & q=i(A_0), \\ 0, & q\in\{0,1,2,\cdots,i(A_0)-1\}\cup\{i(A_0)+1\}. \end{cases}$$

由文 [10] 中的 (3.16), 可得

$$H_q(E,I_\epsilon^a,G) \cong \delta_{q\gamma}G, \tag{2.13}$$

这里 $\gamma = i(A_2)$. 因此

$$\beta_q = 0, \quad q<i(A_2). \tag{2.14}$$

根据 $i(A_0)+1$ 步的 Morse 不等式, 可得

$$\sum_{j=0}^{i(A_0)+1}(-1)^{i(A_0+1-j)}M_j \geqslant \sum_{j=0}^{i(A_0)+1}(-1)^{i(A_0+1-j)}\beta_j, \tag{2.15}$$

由此可得 $-1\geqslant 0$, 显然矛盾.

引理 2.2 当 ϵ 充分小时, 临界值 0 在 I_ϵ 的临界值集合中一致孤立, 即存在 $\delta>0$, 使得在子列的意义下, I_ϵ 的临界点 $x_\epsilon\neq 0$, 满足

$$\|x_\epsilon\|\geqslant\delta>0.$$

证 如果 $\|x_\epsilon\|$ 有界, 则有

$$x_\epsilon \rightharpoonup x \text{ 在 } E \text{ 中}.$$

运用引理 2.1 的过程到 $x_\epsilon - x$ 上, 可得在 E 中 $x_\epsilon - x\to 0$. 下面证明 $x\neq 0$. 根据 (V_0) 和 (V_∞), 对于任意的 $\rho>0$, 存在常数 $C_\rho>0$, 使得

$$|r(t,x)|\leqslant\rho|x|+C_\rho|x|^{p-1}. \tag{2.16}$$

设 x_ϵ 是 I_ϵ 的一个临界点, 有如下的分解: $x_\epsilon = x_\epsilon^+ + x_\epsilon^-$, 分别对应到空间 $E^+(A_0)$ 和 $E^-(A_0)$ 中, 且有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \dot{x}_\epsilon\dot{x}_\epsilon^\pm\mathrm{d}t &= \int_0^1 V_\epsilon'(t,x_\epsilon)x_\epsilon^\pm\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (A_0(t)x_\epsilon,x_\epsilon^\pm)\mathrm{d}t+\int_0^1\epsilon(x_\epsilon,x_\epsilon^\pm)\mathrm{d}t+\int_0^1 r(t,x_\epsilon)x_\epsilon^\pm\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.17}$$

因此

$$\begin{aligned}\pm q_{A_0}(x_\epsilon^\pm,x_\epsilon^\pm) &= \pm\epsilon\int_0^1 x_\epsilon x_\epsilon^\pm\mathrm{d}t \pm\int_0^1 r(t,x_\epsilon)x_\epsilon^\pm\mathrm{d}t\\ &\leqslant(\epsilon+\rho)\int_0^1|x_\epsilon||x_\epsilon^\pm|\mathrm{d}t + C_\rho\int_0^1|x_\epsilon|^{p-1}|x_\epsilon^\pm|\mathrm{d}t\\ &\leqslant(\epsilon+\rho)C_1\|x_\epsilon\|\|x_\epsilon^\pm\|+C_2\|x_\epsilon\|^{p-1}\|x_\epsilon^\pm\|,\end{aligned} \tag{2.18}$$

这里的 C_1, C_2 是 Sobolev 常数. 此外 $q_{A_0}(x_\epsilon^+,x_\epsilon^+)$ 和 $-q_{A_0}(x_\epsilon^-,x_\epsilon^-)$ 分别是空间 $E^+(A_0)$ 和 $E^-(A_0)$ 中的等价范数. 将上式两边相加, 可得

$$\begin{aligned}\|x_\epsilon\|^2 &= \|x_\epsilon^+\|^2+\|x_\epsilon^-\|^2\\ &\leqslant C_3(q_{A_0}(x_\epsilon^+,x_\epsilon^+)-q_{A_0}(x_\epsilon^-,x_\epsilon^-))\\ &\leqslant 2(\epsilon+\rho)C_1C_3\|x_\epsilon\|\|x_\epsilon^\pm\|+2C_2C_3\|x_\epsilon\|^{p-1}\|x_\epsilon^\pm\|,\end{aligned} \tag{2.19}$$

这里 C_3 仅与 A_0 有关. 由于 $p>2$, 可知存在 $\delta>0$, 使得 $\|x_\epsilon\|\geqslant\delta$ 对于任意的 ϵ 都成立.

定理 1.1 的证明 根据引理 2.1, 得到 $\{x_\epsilon\}$ 有界. 从而, 在 E 中, $x_\epsilon\rightharpoonup x$, 并且应用引理 2.1 的证明过程至 $x_\epsilon - x$ 上, 可得 $\{x_\epsilon\}$ 的强收敛性. 又根据引理 2.2, 可得 $\|x_\epsilon\|\geqslant\delta$. 因此, x 是问题 (1.1)–(1.2) 的非平凡解.

参 考 文 献

[1] Landesman E, Lazer A. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance [J]. *J Math Mech*, 1970, 19:609–623.

[2] Rabinowitz P H. Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations [J]. *Ann Scuola Norm Sup Posa CI Sci*, 1978, 5:215–223.

[3] Chang K C. Infinite-dimensional Morse theory and multiple solution problems [M]//Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, Boston, 1993.

[4] Su J B, Tang C L. Multiplicity results for semilinear elliptic equations with resonance at higher eigenvalues [J]. *Nonlinear Anal*, 2001, 44:311–321.

[5] Su J B. Semilinear elliptic boundary value problems with double resonance between two consecutive eigenvalues [J]. *Nonlinear Anal*, 2002, 48:881–895.

[6] Liu Z L, Sun J X. Invariant sets of descending flow in critical point theory with applications to nonlinear differential equations [J]. *J Differ Equ*, 2001, 172:257–299.

[7] Conley C, Zehnder E. Morse-type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations [J]. *Comm Pure Appl Math*, 1984, 37:207–253.

[8] Long Y. Maslov-type index theory, degenerate critical points, and asymptotically linear Hamiltonian systems [J]. *Sci China, Ser A*, 1990, 33:1409–1419.

[9] Long Y. A Maslov-type index theory for symplectic paths, Topol [J]. *Methods Nonlinear Anal*, 1997, 10:47–78.

[10] Dong Y. Index theory, nontrivial solutions, and asymptotically linear second-order Hamiltonian systems [J]. *J Diff Equ*, 2005, 214:233–255.

[11] Dong Y. Index theory for linear selfadjoint operator equations and nontrivial solutions for asymptotically linear operator equations [J]. *Calc Var*, 2010, 38:75–109.

[12] Dong Y. Maslov type index theory for linear Hamiltonian systems with Bolza boundary value conditions and multiple solutions for nonlinear Hamiltonian systems [J]. *Pacif J Math*, 2005, 221:253–280.

[13] Coti Zelati V, Ekeland I, Lions P L. Index estimates and critical points of functionals not satisfying Palais-Smale [J]. *Ann Scuola Norm Sup Pisa Cl Sci*, 1990, 17:569–581.

[14] Rabinowitz P H. Minimax methods in critical point theory with application to differential equations [M]. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Washington D C: Conference Board of the Mathematical Society, 1986.

[15] Liu Z, Su J, Wang Z. A twist condition and periodic solutions of Hamiltonian system [J]. *Adv Math*, 2008, 218:1895–1913.

[16] Liu Z, Su J, Wang Z. Solution of elliptic problems with nonlinearities of linear growth [J]. *Calc Var*, 2009, 35:463–480.

[17] Jeanjean L. On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer type problem set on $\mathbb{R}^N$ [J]. *Proc Roy Soc*, 1999, 129:787–809.

The Existence of Nontrivial Solutions to Second Order Hamiltonian Systems Which Are Resonant at Infinity

SHAN Yuan[1]

[1]School of Science, Nanjing Audit University, Nanjing 211815, China.
E-mail: shannjnu@gmail.com

Abstract In this paper, the author considers nontrivial solutions to the second order Hamiltonian system. Nontrivial solutions are obtained under the assumption that the asymptotically linear nonlinearity V' is resonant at infinity. The arguments are variational. The author constructs the Palais-Smale sequence from a sequence of exact critical points of nearby functionals, possessing extra properties which help to insure its boundness. Different from the existing results in the literature, we do not make any Landesman-Lazer resonance conditions on V'.

Keywords Second-order Hamiltonian system, Resonant condition, Morse theory, Nontrivial solution

2000 MR Subject Classification 34B15, 47E05

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 38 No. 4, 2017
by ALLERTON PRESS, INC., USA