数 学 年 刊 A 辑
2018, 39(3):249–272
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2018.0023

单位球面中具有 3 个不同 Blaschke 特征值的 Blaschke 平行子流形*

李兴校[1] 宋虹儒[2]

提要 Blaschke 张量 A 是单位球面 $\mathbb{S}^n$ 中子流形的 Möbius 微分几何的一个基本不变量, 而 A 的特征值称为 Blaschke 特征值. 作者研究了 $\mathbb{S}^n$ 中具有平行 Blaschke 张量的子流形 (简称为Blaschke 平行子流形). 主要结果是对 $\mathbb{S}^n$ 中具有 3 个不同 Blaschke 特征值的 Blaschke 平行子流形进行了完全的分类.

关键词 平行 Blaschke 张量, 消失的 Möbius 形式, 常数量曲率, 平行平均曲率向量
MR (2000) 主题分类 53A30, 53B25
中图法分类 O186.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2018)03-0249-24

1 引 言

设 $\mathbb{S}^n(r)$ 是 $(n+1)$-维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中半径为 r 的 n-维标准球面, 并记 $\mathbb{S}^n=\mathbb{S}^n(1)$. 设 $\mathbb{H}^n(c)$ 是有常曲率 $c<0$ 的 n-维双曲空间, 其定义为

$$\mathbb{H}^n(c)=\Big\{y=(y_0,y_1)\in\mathbb{R}^{n+1}_1;\ \langle y,y\rangle_1=\frac{1}{c},\ y_0>0\Big\},$$

其中对于任意的整数 $N\geqslant 2$, $\mathbb{R}^N_1\equiv\mathbb{R}_1\times\mathbb{R}^{N-1}$ 是具有标准 Lorentz 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 的 N-维 Lorentz 空间, 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 的定义如下:

$$\langle y,y'\rangle_1=-y_0y'_0+y_1y'_1,\quad y=(y_0,y_1),\quad y'=(y'_0,y'_1)\in\mathbb{R}^N_1,$$

式中的 “$\cdot$” 表示 $\mathbb{R}^{N-1}$ 上的标准 Euclid 内积. 从现在开始, 我们把 $\mathbb{H}^n(-1)$ 简记为 $\mathbb{H}^n$.

用 $\mathbb{S}^n_+$ 表示 $\mathbb{S}^n$ 中第一个坐标为正数的半球面, 则有两个共形的微分同胚

$$\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^n\backslash\{(-1,0)\},\quad \tau:\mathbb{H}^n\to\mathbb{S}^n_+,$$

$$\sigma(u)=\Big(\frac{1-|u|^2}{1+|u|^2},\frac{2u}{1+|u|^2}\Big),\quad u\in\mathbb{R}^n,\tag{1.1}$$

$$\tau(y)=\Big(\frac{1}{y_0},\frac{y_1}{y_0}\Big),\quad y=(y_0,y_1)\in\mathbb{H}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}_1.\tag{1.2}$$

设 $x:M^m\to\mathbb{S}^{m+p}$ 是 $\mathbb{S}^{m+p}$ 中的一个无脐点的浸入子流形. 不失一般性, 我们通常假设 x 是线性满的, 即 x 不会包含在 $\mathbb{R}^{m+p+1}$ 的一个超平面内. 1998 年, 王长平利用光

本文 2016 年 4 月 29 日收到, 2017 年 3 月 21 日收到修改稿.
[1]河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007. E-mail: xxl@henannu.edu.cn
[2]新乡市平原外国语学校, 河南 新乡 453500. E-mail: yaozheng-shr@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11671121, No. 11171091, No. 11371018) 的资助.

锥模型, 在文 [1] 中引入了 x 的 4 个基本的 Möbius 不变量, 即 Möbius 度量 g, Blaschke 张量 A, Möbius 第二基本形式 B, 以及 Möbius 形式 C. 至今, Möbius 子流形几何的研究已有许多有趣的结果, 其中包括一些对具有特殊 Möbius 不变量的子流形的分类定理. 比如, 具有消失 Möbius 形式的曲面的分类[2]; Möbius 迷向子流形的分类 [3]; 具有常 Möbius 截面曲率的超曲面的分类[4]; 对 Möbius 等参超曲面的分类[5−7], 以及对具有如下性质超曲面的分类: 它们的 Blaschke 张量线性依赖于其 Möbius 度量和 Möbius 第二基本形式[8]. 最后的这个定理分别由文[9−10] 在两个不同的方向作了进一步的推广. 特别地, 在完成对 $\mathbb{S}^{m+1}$ 中的 Möbius 平行超曲面 (即具有平行 Möbius 第二基本形式的超曲面) 的分类[11]之后, 文 [12] 证明了一个新的定理, 完成了对单位球面中具有余维数为 2 的 Möbius 平行子流形的分类.

因此, 非常自然的事情是研究单位球面 $\mathbb{S}^n$ 中具有特殊 Blaschke 张量的子流形. 比如, 一个十分有意义的工作是解决对具有平行 Blaschke 张量的浸入子流形的分类问题. 为了方便起见, 我们把这类子流形简称为Blaschke 平行子流形. 显然, 最有意思应是 Möbius 形式 C 恒为零的情形: 由定义, Möbius 迷向子流形具有消失的 Möbius 形式和平行的 Blaschke 张量; 而所有 Möbius 平行子流形也必有消失的 Möbius 形式和平行的 Blaschke 张量[12].

沿此方向, 首先当然是考虑超曲面的情形. 在这方面, 我们已经建立了如下的分类.

定理 1.1 [13] 设 $x: M^m \to \mathbb{S}^{m+1}$, $m \geqslant 2$ 是 Blaschke 平行超曲面, 则 x 的 Möbius 形式恒为零, 并且 x 或是 Möbius 平行的, 或是 Möbius 迷向的, 或 Möbius 等价于如下的例子之一 (它们都恰好有两个不同的 Blaschke 特征值):

(1) 在文 [13] 中, 由例 3.2 所给出的极小超曲面;

(2) 在文 [13] 中, 由例 3.3 所给出的非极小超曲面.

作为第 2 步, 我们还证明了如下的定理.

定理 1.2 [14] 设 $x: M^m \to \mathbb{S}^{m+p}$ 是到 $\mathbb{S}^{m+p}$ 中的一个 Blaschke 平行子流形, 它具有消失的 Möbius 形式 C. 如果 x 恰好有两个不同的 Blaschke 特征值, 那么它一定 Möbius 等价于如下 4 种子流形之一:

(1) 某个具有平行平均曲率和常数量曲率、并且沿其平均曲率向量方向有两个不同主曲率且拟平行浸入 $\tilde{x}: M \to \mathbb{S}^{m+p}$;

(2) 某个具有平行平均曲率和常数量曲率、并且沿其平均曲率向量方向有两个不同主曲率且拟平行浸入 $\bar{x}: M \to \mathbb{R}^{m+p}$ 在 σ 下的像;

(3) 某个具有平行平均曲率和常数量曲率、并且沿其平均曲率向量方向有两个不同主曲率且拟平行浸入 $\bar{x}: M \to \mathbb{H}^{m+p}$ 在 τ 下的像;

(4) 对应于某组参数 m_1, p_1, r, μ 的子流形 $\mathrm{LS}(m_1, p_1, r, \mu)$.

注 1.1 我们在文 [14] 的例 3.2 中首次定义了这种具有多重参数 m_1, p_1, r, μ 的子流形 $\mathrm{LS}(m_1, p_1, r, \mu)$, 它们均满足定理 1.2 中的条件. 如同文 [14], 我们称 Riemann 子流形是拟平行的, 如果其第二基本形式与平均曲率向量的内积是一个平行的对称张量. 特别地, 如果其第二基本形式本身是平行的, 那么就称此子流形是 (Euclid) 平行的.

本文将继续对 $\mathbb{S}^n$ 中具有消失 Möbius 形式的 Blaschke 平行子流形的分类工作. 根据定理 1.1 和定理 1.2, 自然要研究那些具有 3 个不同 Blaschke 特征值的 Blaschke 平行子流形. 为此, 首先在第 3 节中构造一类新的 Blaschke 平行子流形 (记为 $\mathrm{LS}(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$). 它们都具有消失的 Möbius 形式并且恰好有 3 个不同的 Blaschke 特征值. 这些例子的构造思路来源于文 [13] (或文 [15–16]) 中对于一类超曲面例子的构造方法, 此类超曲面的例子具有两个不同的 Blaschke 特征值, 它们后来被证明是仅有的一类非 Möbius 等参的 Blaschke 等参超曲面. 事实上, 根据文 [17], 任何 Blaschke 等参超曲面如果有两个以上的不同 Blaschke 特征值, 则一定是 Möbius 等参的. 该问题最早是由文 [16] (或文 [18–19]) 提出的. 根据文 [7, 20], Möbius 等参超曲面[5]已有了完全的分类, 因而文 [17] 的工作实际上也完成了对 Blaschke 等参超曲面的分类工作 (有关 Blaschke 等参超曲面最后的部分分类结果可见文 [21]). 另外, 对于 de Sitter 空间 $\mathbb{S}^n_1$ 中的类空超曲面也有一些平行的结果 (见文 [22–23] 以及它们所引用的文献).

本文的主要定理如下.

定理 1.3　设 $x: M^m \to \mathbb{S}^{m+p}$ 是 $\mathbb{S}^{m+p}$ 中具有消失 Möbius 形式 C 的 Blaschke 平行子流形. 如果 x 恰好有 3 个不同的 Blaschke 特征值, 那么它一定 Möbius 等价于如下的 4 种浸入子流形之一:

(1) 某个具有平行的平均曲率向量和常数量曲率、并且沿平均曲率向量方向恰有 3 个不同主曲率的拟平行浸入 $\tilde{x}: M^m \to \mathbb{S}^{m+p}$;

(2) 某个具有平行的平均曲率向量和常数量曲率、并且沿平均曲率向量方向恰有 3 个不同主曲率的拟平行浸入 $\bar{x}: M^m \to \mathbb{R}^{m+p}$ 在共形同胚 σ 下的像;

(3) 某个具有平行的平均曲率向量和常数量曲率、并且沿平均曲率向量方向恰有 3 个不同主曲率的拟平行浸入 $\bar{x}: M^m \to \mathbb{H}^{m+p}$ 在共形同胚 τ 下的像;

(4) 对于某组满足条件 $m_3r_2^2 \neq m_2r_3^2$ 的多重参数 $\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu$, 由例 3.2 中所定义的浸入子流形为 $\mathrm{LS}(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$.

注 1.2　可以直接验证: 定理 1.3 中所列的每一个浸入子流形都满足定理 1.3 中的条件 (详见第 3 节). 我们预期更一般的分类定理应该和定理 1.3 是类似的. 特别地, 本文所构造的例子 $\mathrm{LS}(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$ 应该可以推广到一般的情形.

2　预备知识

设 $x: M^m \to \mathbb{S}^{m+p}$ 是一个无脐点的浸入子流形. 用 h 和 $H = \frac{1}{m}\mathrm{tr}\, h$ 分别表示 x 的第二基本形式和平均曲率向量. 定义

$$\rho = \Big(\frac{m}{m-1}(|h|^2 - m|H|^2)\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad Y = \rho(1, x), \tag{2.1}$$

则 $Y: M^m \to \mathbb{R}^{m+p+2}_1$ 是从 M^m 到 Lorentz 空间 $\mathbb{R}^{m+p+2}_1$ 的浸入, 称之为浸入 x 的标准提升 (或Möbius 位置向量), 而由 (2.1) 所给出的函数 ρ 则可以被称为浸入 x 的Möbius 因子. 令

$$C^{m+p+1}_+ = \{y = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}^{m+p+1};\ \langle y, y\rangle_1 = 0,\ y_0 > 0\}.$$

设 $O(m+p+1,1)$ 是 $GL(m+p+2;\mathbb{R})$ 中所有保持 $\mathbb{R}_1^{m+p+2}$ 上的标准 Lorentz 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 不变的元素构成的 Lorentz 群, 则 $O(m+p+1,1)$ 有一个子群

$$O^+(m+p+1,1)=\{T\in O(m+p+1,1);\ T(C_+^{m+p+1})\subset C_+^{m+p+1}\}. \tag{2.2}$$

如下的定理 2.1 是周知的.

定理 2.1 [1] 分别具有 Möbius 位置向量 $Y,\widetilde{Y}$ 的两个浸入子流形 $x,\widetilde{x}:M^m\to\mathbb{S}^{m+p}$ 是 Möbius 等价的当且仅当存在 $T\in O^+(m+p+1,1)$, 使得 $\widetilde{Y}=T(Y)$.

根据定理 2.1, Lorentz 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 通过 Y 在 M^m 上的诱导度量

$$g=Y^*\langle\cdot,\cdot\rangle_1=\rho^2\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}x$$

是一个 Möbius 不变量的 Riemann 度量[1, 24–25], 称之为 x 的 Möbius 度量. 利用向量值函数 Y 和度量 g 的 Laplace 算子 Δ, 可定义另一个重要的向量值函数 $N:M^m\to\mathbb{R}_1^{m+p+2}$ 如下, 称之为 Möbius 副位置向量:

$$N=-\frac{1}{m}\Delta Y-\frac{1}{2m^2}\langle\Delta Y,\Delta Y\rangle_1 Y. \tag{2.3}$$

易验证, Möbius 位置向量 Y 和 Möbius 副位置向量 N 满足如下的恒等式[1]:

$$\langle\Delta Y,Y\rangle_1=-m,\quad \langle\Delta Y,\mathrm{d}Y\rangle_1=0,\quad \langle\Delta Y,\Delta Y\rangle_1=1+m^2\kappa, \tag{2.4}$$

$$\langle Y,Y\rangle_1=\langle N,N\rangle_1=0,\quad \langle Y,N\rangle_1=1, \tag{2.5}$$

其中 κ 表示 Möbius 度量 g 的法化数量曲率.

设 $V\to M^m$ 是 $\mathbb{R}Y\oplus\mathbb{R}N\oplus Y_*(TM^m)$ 在平凡 Lorentz 丛 $M^m\times\mathbb{R}_1^{m+p+2}$ 中关于 Lorentz 积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 的正交补子丛, 它称为浸入 x 的 Möbius 法丛. 显然有如下的向量丛分解:

$$M^m\times\mathbb{R}_1^{m+p+2}=\mathbb{R}Y\oplus\mathbb{R}N\oplus Y_*(TM^m)\oplus V. \tag{2.6}$$

用 $T^\perp M^m$ 表示浸入 $x:M^m\to\mathbb{S}^{m+1}$ 的法丛, 则利用 x 的平均曲率向量场 H 可以定义同构 $\Phi:T^\perp M^m\to V$ 如下

$$\Phi(e)=(H\cdot e,(H\cdot e)x+e),\quad \forall\, e\in T^\perp M^m, \tag{2.7}$$

则 Φ 保持 $T^\perp M^m$ 和 V 上的内积和联络不变[1].

为了简化记号, 本文遵行如下的指标取值约定:

$$1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant m,\quad m+1\leqslant\alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqslant m+p. \tag{2.8}$$

给定 x 的一个以 $\{\theta^i\}$ 为对偶的局部正交标架场 $\{e_i\}$, 以及一个正交的法标架场 $\{e_\alpha\}$, 令

$$E_i=\rho^{-1}e_i,\quad \omega^i=\rho\theta^i,\quad E_\alpha=\Phi(e_\alpha), \tag{2.9}$$

则 $\{E_i\}$ 是 M^m 上关于 Möbius 度量 g 的单位正交标架场, 它以 $\{\omega^i\}$ 为其对偶, $\{E_\alpha\}$ 是 Möbius 法丛 $V\to M$ 的单位正交标架场. 显然, $\{Y,N,Y_i:=Y_*(E_i),E_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}_1^{m+p+2}$ 沿 M^m 的一个活动标架. 如果基本 Möbius 不变量 A, B 和 C 分别表示为

$$A=\sum A_{ij}\omega^i\omega^j,\quad B=\sum B_{ij}^\alpha\omega^i\omega^j E_\alpha,\quad C=\sum C_i^\alpha\omega^i E_\alpha, \tag{2.10}$$

那么我们有如下的运动方程[1]:

$$\mathrm{d}Y = \sum Y_i\omega^i, \quad \mathrm{d}N = \sum A_{ij}\omega^j Y_i + C_i^\alpha \omega^i E_\alpha, \tag{2.11}$$

$$\mathrm{d}Y_i = -\sum A_{ij}\omega^j Y - \omega^i N + \sum \omega_i^j Y_j + \sum B_{ij}^\alpha \omega^j E_\alpha, \tag{2.12}$$

$$\mathrm{d}E_\alpha = -\sum C_i^\alpha \omega^i Y - \sum B_{ij}^\alpha \omega^j Y_i + \sum \omega_\alpha^\beta E_\beta, \tag{2.13}$$

其中 ω_i^j 是 Möbius 度量 g 的 Levi-Civita 联络形式, ω_α^β 是 x 的 (Möbius) 法联络形式. 通过直接计算, 可知如下的局部表达式[1]:

$$\begin{aligned} A_{ij} = & -\rho^{-2}\Big(\mathrm{Hess}_{ij}(\log\rho) - e_i(\log\rho)e_j(\log\rho) - \sum H^\alpha h_{ij}^\alpha\Big) \\ & -\frac{1}{2}\rho^{-2}(|\mathrm{d}\log\rho|^2 - 1 + |H|^2)\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$B_{ij}^\alpha = \rho^{-1}(h_{ij}^\alpha - H^\alpha\delta_{ij}), \tag{2.15}$$

$$C_i^\alpha = -\rho^{-2}\Big(H_{,i}^\alpha + \sum(h_{ij}^\alpha - H^\alpha\delta_{ij})e_j(\log\rho)\Big), \tag{2.16}$$

其中的下标 “$,i$” 表示沿方向 e_i、关于诱导度量 $\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}x$ 的协变导数.

分别用 R_{ijkl}, $R_{\alpha\beta ij}^\perp$ 表示 Möbius Riemann 曲率张量和 Möbius 法丛曲率算子关于切标架场 $\{E_i\}$ 和法 Möbius 法标架场 $\{E_\alpha\}$ 的分量, 则有[1]

$$\mathrm{tr}\,A = \frac{1}{2m}(1 + m^2\kappa), \quad \mathrm{tr}\,B = \sum B_{ii}^\alpha E_\alpha = 0, \quad |B|^2 = \sum (B_{ij}^\alpha)^2 = \frac{m-1}{m}, \tag{2.17}$$

$$R_{ijkl} = \sum(B_{il}^\alpha B_{jk}^\alpha - B_{ik}^\alpha B_{jl}^\alpha) + A_{il}\delta_{jk} - A_{ik}\delta_{jl} + A_{jk}\delta_{il} - A_{jl}\delta_{ik}, \tag{2.18}$$

$$R_{\alpha\beta ij}^\perp = \sum(B_{jk}^\alpha B_{ik}^\beta - B_{ik}^\alpha B_{jk}^\beta). \tag{2.19}$$

基于 Riemann 曲率张量的不同记法, 方程 (2.18) 及 (2.19) 与文 [1] 相比差一个负号. 如果用 A_{ijk}, B_{ijk}^α, C_{ij}^α 分别表示 A, B, C 的协变导数关于标架场 $\{E_i\}$ 和 $\{E_\alpha\}$ 的分量, 则有如下的 Ricci 恒等式[1]:

$$A_{ijk} - A_{ikj} = \sum(B_{ik}^\alpha C_j^\alpha - B_{ij}^\alpha C_k^\alpha), \tag{2.20}$$

$$B_{ijk}^\alpha - B_{ikj}^\alpha = \delta_{ij}C_k^\alpha - \delta_{ik}C_j^\alpha, \tag{2.21}$$

$$C_{ij}^\alpha - C_{ji}^\alpha = \sum(B_{ik}^\alpha A_{kj} - B_{kj}^\alpha A_{ki}). \tag{2.22}$$

用 R_{ij} 表示 Ricci 曲率的分量, 则通过对 (2.18) 和 (2.21) 进行取迹运算, 可得

$$R_{ij} = -\sum B_{ik}^\alpha B_{kj}^\alpha + \delta_{ij}\mathrm{tr}\,A + (m-2)A_{ij}, \tag{2.23}$$

$$(m-1)C_i^\alpha = -\sum B_{ijj}^\alpha. \tag{2.24}$$

此外, 对于高阶的协变导数 $B_{ij\cdots kl}^\alpha$, 我们有如下的 Ricci 恒等式:

$$B_{ij\cdots kl}^\alpha - B_{ij\cdots lk}^\alpha = \sum B_{qj\cdots}^\alpha R_{iqkl} + \sum B_{iq\cdots}^\alpha R_{jqkl} + \cdots - \sum B_{ij\cdots}^\beta R_{\beta\alpha kl}^\perp. \tag{2.25}$$

根据 (2.17), (2.23)–(2.24), 如果 $m \geqslant 3$, 那么 x 的 Blaschke 张量 A 和 Möbius 形式 C 均可以由 Möbius 度量 g、Möbius 第二基本形式 B 和 (Möbius) 法联络所确定. 于是如下的定理成立.

定理 2.2 [1]　设 $m \geqslant 3$, 则两个无脐点子流形 $x: M^m \to \mathbb{S}^{m+p}$ 和 $\widetilde{x}: \widetilde{M}^m \to \mathbb{S}^{m+p}$ Möbius 等价当且仅当它们有相同的 Möbius 度量、相同的 Möbius 第二基本形式和相同的

(Möbius) 法联络.

3 新的例子

在证明主要定理之前, 有必要寻找单位球面 $\mathbb{S}^{m+p}$ 中尽可能多的 Blaschke 平行子流形的例子. 注意到, $\mathbb{S}^{m+p}$ 中所有的 Möbius 平行子流形一定是 Blaschke 平行的, 这类例子可参见文 [12]. 本节将引入一类新的 Blaschke 平行子流形的例子, 它们一般都不是 Möbius 平行的.

例 3.1 文 [14] 研究了如下的 3 类子流形[12].

(1) 具有平行平均曲率向量 $\widetilde{H}$ 和常数量曲率 $\widetilde{S}$ 的无脐点拟平行子流形 $\widetilde{x}: M^m \to \mathbb{S}^{m+p}$.

(2) 具有平行平均曲率向量 $\overline{H}$ 和常数量曲率 $\overline{S}$ 的无脐点拟平行子流形 $\overline{x}: M^m \to \mathbb{R}^{m+p}$ 与共形同胚 σ 的复合 $\widetilde{x} = \sigma \circ \overline{x}$.

(3) 具有平行平均曲率向量 $\overline{H}$ 和常数量曲率 $\overline{S}$ 的无脐点拟平行子流形 $\overline{x}: M^m \to \mathbb{H}^{m+p}$ 与共形同胚 τ 的复合 $\widetilde{x} := \tau \circ \overline{x}$.

注 3.1 文 [14] 证明了上述 (1)–(3) 中所列的例子 $\widetilde{x}: M^m \to \mathbb{S}^{m+p}$ 都是 Blaschke 平行的且具有消失的 Möbius 形式. 进一步地, (1) 中的 $\widetilde{x}$ 恰有 3 个不同的 Blaschke 特征值当且仅当它是非极小的并且沿平均曲率向量 $\widetilde{H}$ 方向恰有 3 个不同的主曲率, 而 (2) 和 (3) 中的 $\widetilde{x}$ 有 3 个不同的 Blaschke 特征值当且仅当相应的 $\overline{x}: M^m \to \mathbb{R}^{m+p}$ 或 $\overline{x}: M^m \to \mathbb{H}^{m+p}$ 是非极小的且沿平均曲率向量 $\overline{H}$ 方向恰好有 3 个不同的主曲率. 注意到, $\widetilde{x}$ 为 Möbius 迷向的, 即 $\widetilde{x}$ 仅有一个不同的 Blaschke 特征值, 当且仅当 (1) 中的 $\widetilde{x}$ 或 (2) 和 (3) 中的 $\overline{x}$ 是极小的[3]. 此外, 不难看出[12], 例 3.1 中给出的子流形 $\widetilde{x}$ 是 Möbius 平行的当且仅当 (1) 中的 $\widetilde{x}$, 或 (2) 和 (3) 中的 $\overline{x}$ 是 (Euclid) 平行的.

例 3.2 子流形 $\mathrm{LS}(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{r}, \mu)$.

我们从给定的一组多重参数 $(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{r}, \mu)$ 入手, 其中

$$\mathfrak{m} := (m_1, m_2, m_3), \quad \mathfrak{p} := (p_1, p_2, p_3), \quad \mathfrak{r} := (r_1, r_2, r_3), \quad \mu := (\mu_1, \mu_2, \mu_3),$$

并且 m_1, m_2, m_3 和 p_1, p_2, p_3 是满足

$$m_1, m_2, m_3 \geqslant 1, \quad p_1, p_2, p_3 \geqslant 0$$

的整数; 而 r_1, r_2, r_3 和 μ_1, μ_2, μ_3 则是满足

$$r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_1^2 = r_2^2 + r_3^2, \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geqslant 0, \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$$

的实数. 令

$$m := m_1 + m_2 + m_3, \quad p := p_1 + p_2 + p_3 + 1.$$

由于

$$\det\begin{vmatrix} m+m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & m+m_2 & m_3 \\ m_1 & m_2 & m+m_3 \end{vmatrix} = 2m^3 \neq 0,$$

存在实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 它们由

$$\begin{cases} (m+m_1)\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 = -\dfrac{m_1}{r_1^2}, \\ m_1\lambda_1 + (m+m_2)\lambda_2 + m_3\lambda_3 = \dfrac{m_2}{r_2^2}, \\ m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + (m+m_3)\lambda_3 = \dfrac{m_3}{r_3^2} \end{cases} \tag{3.1}$$

唯一确定. 设 B_1^0, B_2^0, B_3^0 是由

$$m_1B_1^0 + m_2B_2^0 + m_3B_3^0 = 0, \quad B_a^0B_b^0 = -(\lambda_a + \lambda_b), \quad a \neq b \tag{3.2}$$

定义的实数, 其中 $1 \leqslant a, b \leqslant 3$. 显然, 在允许相差一个共同符号的意义下, B_1^0, B_2^0, B_3^0 是唯一的. 事实上,

$$(B_a^0)^2 = \frac{1}{m_a}((m_{a'} + m_{a''})\lambda_a + m_{a'}\lambda_{a'} + m_{a''}\lambda_{a''}), \tag{3.3}$$

其中 a, a', a'' 是 $1, 2, 3$ 的一个偶置换.

根据 (3.2), 对于 $1, 2, 3$ 的一个排列 a, a', a'', 下式成立:

$$2\lambda_a = (\lambda_a + \lambda_{a'}) + (\lambda_a + \lambda_{a''}) - (\lambda_{a'} + \lambda_{a''}) = -B_a^0B_{a'}^0 - B_a^0B_{a''}^0 + B_{a'}^0B_{a''}^0. \tag{3.4}$$

据此并利用 (3.1)–(3.4) 进行直接计算可以证明如下的引理.

引理 3.1　下式成立:

$$2\lambda_1 + (B_1^0)^2 = -\frac{1}{r_1^2}, \quad 2\lambda_2 + (B_2^0)^2 = \frac{1}{r_2^2}, \quad 2\lambda_3 + (B_3^0)^2 = \frac{1}{r_3^2}, \tag{3.5}$$

$$-\frac{m_1-1}{r_1^2} + (B_1^0)^2 = (m+m_1-2)\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 = (m-2)\lambda_1 + \sum_a m_a\lambda_a, \tag{3.6}$$

$$\frac{m_2-1}{r_2^2} + (B_2^0)^2 = m_1\lambda_1 + (m+m_2-2)\lambda_2 + m_3\lambda_3 = (m-2)\lambda_2 + \sum_a m_a\lambda_a, \tag{3.7}$$

$$\frac{m_3-1}{r_3^2} + (B_3^0)^2 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + (m+m_3-2)\lambda_3 = (m-2)\lambda_3 + \sum_a m_a\lambda_a, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{m_1(m_1-1)}{r_1^2} + \frac{m_2(m_2-1)}{r_2^2} + \frac{m_3(m_3-1)}{r_3^2} \\ = {} & (2m_1(m-1) - (m+m_1))\lambda_1 + (2m_2(m-1) - (m+m_2))\lambda_2 \\ & + (2m_3(m-1) - (m+m_3))\lambda_3, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$m_1(B_1^0)^2 + m_2(B_2^0)^2 + m_3(B_3^0)^2 = (m+m_1)\lambda_1 + (m+m_2)\lambda_2 + (m+m_3)\lambda_3, \tag{3.10}$$

$$-r_1^2B_1^0 + r_2^2B_2^0 + r_3^2B_3^0 = 0, \tag{3.11}$$

$$-r_1^2(B_1^0)^2 + r_2^2(B_2^0)^2 + r_3^2(B_3^0)^2 = -\lambda_1r_1^2 + \lambda_2r_2^2 + \lambda_3r_3^2 = 1. \tag{3.12}$$

设

$$\widetilde{y}=(\widetilde{y}_0,\widetilde{y}_1):M_1\to\mathbb{H}^{m_1+p_1}\Big(-\frac{1}{r_1^2}\Big)\subset\mathbb{R}_1^{m_1+p_1+1}$$

是一个具有常数量曲率

$$\widetilde{S}_1=-\frac{m_1(m_1-1)}{r_1^2}+\mu_1\Big(m_1(B_1^0)^2+m_2(B_2^0)^2+m_3(B_3^0)^2-\frac{m-1}{m}\Big) \tag{3.13}$$

的 m_1 维极小浸入子流形, 而

$$\widetilde{y}_2:M_2\to\mathbb{S}^{m_2+p_2}(r_2)\subset\mathbb{R}^{m_2+p_2+1},\quad \widetilde{y}_3:M_3\to\mathbb{S}^{m_3+p_3}(r_3)\subset\mathbb{R}^{m_3+p_3+1} \tag{3.14}$$

分别是具有常数量曲率

$$\widetilde{S}_2=\frac{m_2(m_2-1)}{r_2^2}+\mu_2\Big(m_1(B_1^0)^2+m_2(B_2^0)^2+m_3(B_3^0)^2-\frac{m-1}{m}\Big), \tag{3.15}$$

$$\widetilde{S}_3=\frac{m_3(m_3-1)}{r_3^2}+\mu_3\Big(m_1(B_1^0)^2+m_2(B_2^0)^2+m_3(B_3^0)^2-\frac{m-1}{m}\Big) \tag{3.16}$$

的 m_2, m_3 维极小浸入子流形, 则根据 (3.9)–(3.10),

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_1+\widetilde{S}_2+\widetilde{S}_3&=-\frac{m_1(m_1-1)}{r_1^2}+\frac{m_2(m_2-1)}{r_2^2}+\frac{m_3(m_3-1)}{r_3^2}\\&\quad-\frac{m-1}{m}+m_1(B_1^0)^2+m_2(B_2^0)^2+m_3(B_3^0)^2\\&=2(m-1)\sum_a m_a\lambda_a-\frac{m-1}{m}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

令

$$\widetilde{M}^m=M_1\times M_2\times M_3,\quad \widetilde{Y}=(\widetilde{y}_0,\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\widetilde{y}_3), \tag{3.18}$$

则 $\widetilde{Y}:\widetilde{M}^m\to\mathbb{R}_1^{m+p+2}$ 是一个满足 $\langle\widetilde{Y},\widetilde{Y}\rangle_1=0$ 的浸入, 它具有诱导的 Riemann 度量

$$g=\langle \mathrm{d}\widetilde{Y},\mathrm{d}\widetilde{Y}\rangle_1=-\mathrm{d}\widetilde{y}_0^2+\mathrm{d}\widetilde{y}_1^2+\mathrm{d}\widetilde{y}_2^2+\mathrm{d}\widetilde{y}_3^2.$$

于是作为 Riemann 流形

$$(\widetilde{M}^m,g)=(M_1,\langle\mathrm{d}\widetilde{y},\mathrm{d}\widetilde{y}\rangle_1)\times(M_2,\mathrm{d}\widetilde{y}_2^2)\times(M_3,\mathrm{d}\widetilde{y}_3^2). \tag{3.19}$$

定义

$$\widetilde{x}_1=\frac{\widetilde{y}_1}{\widetilde{y}_0},\quad \widetilde{x}_2=\frac{\widetilde{y}_2}{\widetilde{y}_0},\quad \widetilde{x}_3=\frac{\widetilde{y}_3}{\widetilde{y}_0},\quad \widetilde{x}=(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3), \tag{3.20}$$

则 $\widetilde{x}^2=1$ 并且 $\widetilde{x}:\widetilde{M}^m\to\mathbb{S}^{m+p}$ 是一个浸入子流形, 简记为 $\mathrm{LS}(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$. 由于

$$\mathrm{d}\widetilde{x}=-\frac{\mathrm{d}\widetilde{y}_0}{\widetilde{y}_0^2}(\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\widetilde{y}_3)+\frac{1}{\widetilde{y}_0}(\mathrm{d}\widetilde{y}_1,\mathrm{d}\widetilde{y}_2,\mathrm{d}\widetilde{y}_3), \tag{3.21}$$

$\widetilde{M}^m$ 上的诱导度量 $\widetilde{g}=\mathrm{d}\widetilde{x}\cdot\mathrm{d}\widetilde{x}$ 与 g 有如下关系:

$$\widetilde{g}=\widetilde{y}_0^{-2}(-\mathrm{d}\widetilde{y}_0^2+\mathrm{d}\widetilde{y}_1^2+\mathrm{d}\widetilde{y}_2^2+\mathrm{d}\widetilde{y}_3^2)=\widetilde{y}_0^{-2}g. \tag{3.22}$$

令

$$\overline{E}_0:=-(B_1^0\widetilde{y}_0,B_1^0\widetilde{y}_1,B_2^0\widetilde{y}_2,B_3^0\widetilde{y}_3), \tag{3.23}$$

并且设

$$\{\overline{E}_\alpha; m+1\leqslant\alpha\leqslant m+p_1\},$$
$$\{\overline{E}_\alpha; m+p_1+1\leqslant\alpha\leqslant m+p_1+p_2\},$$
$$\{\overline{E}_\alpha; m+p_1+p_2+1\leqslant\alpha\leqslant m+p_1+p_2+p_3\}$$

分别是 $\widetilde{y}, \widetilde{y}_2, \widetilde{y}_3$ 的满足

$$\overline{E}_\alpha\equiv(\overline{E}_{\alpha 0},\overline{E}_{\alpha 1})\in\mathbb{R}^1_1\times\mathbb{R}^{m_1+p_1}\equiv\mathbb{R}^{m_1+p_1+1}_1,\quad \alpha=m+1,\cdots,m+p_1$$

的单位正交法标架场. 定义

$$\begin{aligned}&\widetilde{e}_\alpha=(\overline{E}_{\alpha 1},0,0)-\overline{E}_{\alpha 0}\widetilde{x}\in\mathbb{R}^{m_1+p_1}\times\mathbb{R}^{m_2+p_2+1}\times\mathbb{R}^{m_3+p_3+1}\equiv\mathbb{R}^{m+p+1},\\&\quad\alpha=m+1,\cdots,m+p_1;\end{aligned}\tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{e}_\alpha=(0,\overline{E}_\alpha,0)\in\mathbb{R}^{m_1+p_1}\times\mathbb{R}^{m_2+p_2+1}\times\mathbb{R}^{m_3+p_3+1}\equiv\mathbb{R}^{m+p+1},\\&\quad\alpha=m+p_1+1,\cdots,m+p_1+p_2;\end{aligned}\tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{e}_\alpha=(0,0,\overline{E}_\alpha)\in\mathbb{R}^{m_1+p_1}\times\mathbb{R}^{m_2+p_2+1}\times\mathbb{R}^{m_3+p_3+1}\equiv\mathbb{R}^{m+p+1},\\&\quad\alpha=m+p_1+p_2+1,\cdots,m+p_1+p_2+p_3;\end{aligned}\tag{3.26}$$

$$\widetilde{e}_0=-(B^0_1\widetilde{y}_1,B^0_2\widetilde{y}_2,B^0_3\widetilde{y}_3)+B^0_1\widetilde{y}_0\widetilde{x},\tag{3.27}$$

则根据引理 3.1, $\{\widetilde{e}_\alpha,\widetilde{e}_{\alpha 0};\ m+1\leqslant\alpha\leqslant m+p-1\}$ 是 $\mathrm{LS}(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$ 的一个单位正交法标架场.

根据 (3.21), 对于 $\alpha=m+1,\cdots,m+p_1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\widetilde{e}_\alpha\cdot\mathrm{d}\widetilde{x}=&\ (\mathrm{d}\overline{E}_{\alpha 1},0,0)\cdot\mathrm{d}\widetilde{x}-\mathrm{d}\overline{E}_{\alpha 0}\widetilde{x}\mathrm{d}\widetilde{x}-\overline{E}_{\alpha 0}\mathrm{d}\widetilde{x}^2\\=&-(\widetilde{y}_0^{-2}\mathrm{d}\widetilde{y}_0)\mathrm{d}\overline{E}_{\alpha 1}\cdot\widetilde{y}_1+\widetilde{y}_0^{-1}\mathrm{d}\overline{E}_{\alpha 1}\cdot\mathrm{d}\widetilde{y}_1-\overline{E}_{\alpha 0}\widetilde{y}_0^{-2}g\\=&\ \widetilde{y}_0^{-1}(-\mathrm{d}\overline{E}_{\alpha 0}\mathrm{d}\widetilde{y}_0+\mathrm{d}\overline{E}_{\alpha 1}\cdot\mathrm{d}\widetilde{y}_1)-\overline{E}_{\alpha 0}\widetilde{y}_0^{-2}g,\end{aligned}\tag{3.28}$$

其中第 3 个等号利用了

$$-\overline{E}_{\alpha 0}\widetilde{y}_0+\overline{E}_{\alpha 1}\cdot\widetilde{y}_1=-\mathrm{d}\overline{E}_{\alpha 0}\widetilde{y}_0+\mathrm{d}\overline{E}_{\alpha 1}\cdot\widetilde{y}_1=0;\tag{3.29}$$

同时, 对于 $\alpha=m+p_1+1,\cdots,m+p_1+p_2$,

$$\mathrm{d}\widetilde{e}_\alpha\cdot\mathrm{d}\widetilde{x}=\widetilde{y}_0^{-1}(\mathrm{d}\overline{E}_\alpha\cdot\mathrm{d}\widetilde{y}_2);\tag{3.30}$$

而对于 $\alpha=m+p_1+p_2+1,\cdots,m+p-1$,

$$\mathrm{d}\widetilde{e}_\alpha\cdot\mathrm{d}\widetilde{x}=\widetilde{y}_0^{-1}(\mathrm{d}\overline{E}_\alpha\cdot\mathrm{d}\widetilde{y}_3).\tag{3.31}$$

进一步地,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\widetilde{e}_{\alpha 0}\cdot\mathrm{d}\widetilde{x}=&\ \widetilde{y}_0^{-2}\mathrm{d}y_0(B^0_1\mathrm{d}\widetilde{y}_1,B^0_2\mathrm{d}\widetilde{y}_2,B^0_3\mathrm{d}\widetilde{y}_3)\cdot(\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\widetilde{y}_3)\\&-\widetilde{y}_0^{-1}(B^0_1\mathrm{d}\widetilde{y}_1,B^0_2\mathrm{d}\widetilde{y}_2,B^0_3\mathrm{d}\widetilde{y}_3)\cdot(\mathrm{d}\widetilde{y}_1,\mathrm{d}\widetilde{y}_2,\mathrm{d}\widetilde{y}_3)\\&+B^0_1\mathrm{d}\widetilde{y}_0\widetilde{x}\mathrm{d}\widetilde{x}+B^0_1\widetilde{y}_0\mathrm{d}\widetilde{x}\mathrm{d}\widetilde{x}\\=&\ \widetilde{y}_0^{-1}B^0_1\mathrm{d}\widetilde{y}_0^2-\widetilde{y}_0^{-1}B^0_1(\langle\mathrm{d}\widetilde{y},\mathrm{d}\widetilde{y}\rangle_1+\mathrm{d}\widetilde{y}_0^2)\\&-\widetilde{y}_0^{-1}(B^0_2\mathrm{d}\widetilde{y}_2^2+B^0_3\mathrm{d}\widetilde{y}_3^2)+\widetilde{y}_0^{-1}B^0_1g\end{aligned}$$

$$= -\widetilde{y}_0^{-1}((B_2^0 - B_1^0)\mathrm{d}\widetilde{y}_2^2 + (B_3^0 - B_1^0)\mathrm{d}\widetilde{y}_3^2). \tag{3.32}$$

如果用

$$\overline{h}_{M_1} = \sum_{\alpha=m+1}^{m+p_1} \overline{h}^{\alpha}\overline{E}_{\alpha}, \quad \overline{h}_{M_2} = \sum_{\alpha=m+p_1+1}^{m+p_1+p_2} \overline{h}^{\alpha}\overline{E}_{\alpha}, \quad \overline{h}_{M_3} = \sum_{\alpha=m+p_1+p_2+1}^{m+p-1} \overline{h}^{\alpha}\overline{E}_{\alpha}$$

分别表示 $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}_2$ 和 $\widetilde{y}_3$ 的第二基本形式, 那么 $\mathrm{LS}(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$ 的第二基本形式

$$\widetilde{h} = \sum_{\alpha=m+1}^{m+p-1} \widetilde{h}^{\alpha}\widetilde{e}_{\alpha} + \widetilde{h}^{\alpha_0}\widetilde{e}_{\alpha_0}$$

可由下式给出:

$$\widetilde{h}^{\alpha} = -\mathrm{d}\widetilde{e}_{\alpha}\cdot\mathrm{d}\widetilde{x} = y_0^{-1}\overline{h}^{\alpha} + \overline{E}_{\alpha 0}\widetilde{y}_0^{-2}g, \quad \alpha = m+1,\cdots,m+p_1; \tag{3.33}$$

$$\widetilde{h}^{\alpha} = -\mathrm{d}\widetilde{e}_{\alpha}\cdot\mathrm{d}\widetilde{x} = \widetilde{y}_0^{-1}\overline{h}^{\alpha}, \quad \alpha = m+p_1+1,\cdots,m+p-1; \tag{3.34}$$

$$\widetilde{h}^{\alpha_0} = \widetilde{y}_0^{-1}((B_2^0 - B_1^0)\mathrm{d}\widetilde{y}_2^2 + (B_3^0 - B_1^0)\mathrm{d}\widetilde{y}_3^2). \tag{3.35}$$

设

$$\{E_i\,;1\leqslant i\leqslant m_1\}, \quad \{E_i\,;m_1+1\leqslant i\leqslant m_1+m_2\}, \quad \{E_i\,;m_1+m_2+1\leqslant i\leqslant m\}$$

分别是

$$(M_1,\langle\mathrm{d}\widetilde{y},\mathrm{d}\widetilde{y}\rangle_1), \quad (M_2,\mathrm{d}\widetilde{y}_2^2), \quad (M_3,\mathrm{d}\widetilde{y}_3^2),$$

的单位正交标架场, 则 $\{E_i\,;1\leqslant i\leqslant m\}$ 是 (M^m,g) 的单位正交标架场.

令 $\widetilde{e}_i = \widetilde{y}_0E_i$, $i=1,\cdots,m$, 则 $\{\widetilde{e}_i\,;1\leqslant i\leqslant m\}$ 是 $(M^m,\widetilde{g})$ 的一个单位正交标架场. 于是, 对于 $\alpha = m+1,\cdots,m+p_1$,

$$\begin{cases} \widetilde{h}_{ij}^{\alpha} = \widetilde{h}^{\alpha}(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j) = \widetilde{y}_0^2\widetilde{h}^{\alpha}(E_i,E_j) = \widetilde{y}_0\overline{h}^{\alpha}(E_i,E_j) + \overline{E}_{\alpha 0}\,g(E_i,E_j) \\ \qquad = \widetilde{y}_0\overline{h}_{ij}^{\alpha} + \overline{E}_{\alpha 0}\delta_{ij}, \quad \text{如果 } 1\leqslant i,j\leqslant m_1, \\ \widetilde{h}_{ij}^{\alpha} = \overline{E}_{\alpha 0}\delta_{ij}, \quad \text{其他;} \end{cases} \tag{3.36}$$

而对于 $\alpha = m+p_1+1,\cdots,m+p_1+p_2$,

$$\begin{cases} \widetilde{h}_{ij}^{\alpha} = \widetilde{h}^{\alpha}(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j) = \widetilde{y}_0^2\widetilde{h}^{\alpha}(E_i,E_j) = \widetilde{y}_0\overline{h}^{\alpha}(E_i,E_j) = \widetilde{y}_0\overline{h}_{ij}^{\alpha}, \\ \qquad \text{如果 } m_1+1\leqslant i,j\leqslant m_1+m_2, \\ \widetilde{h}_{ij}^{\alpha} = 0, \quad \text{其他;} \end{cases} \tag{3.37}$$

对于 $\alpha = m+p_1+p_2+1,\cdots,m+p-1$,

$$\begin{cases} \widetilde{h}_{ij}^{\alpha} = \widetilde{h}^{\alpha}(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j) = \widetilde{y}_0^2\widetilde{h}^{\alpha}(E_i,E_j) = \widetilde{y}_0\overline{h}^{\alpha}(E_i,E_j) = \widetilde{y}_0\overline{h}_{ij}^{\alpha}, \\ \qquad \text{如果 } m_1+m_2+1\leqslant i,j\leqslant m, \\ \widetilde{h}_{ij}^{\alpha} = 0, \quad \text{其他.} \end{cases} \tag{3.38}$$

进一步地,

$$\widetilde{h}_{ij}^{\alpha_0} = \widetilde{h}^{\alpha_0}(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j) = \widetilde{y}_0^2\widetilde{h}^{\alpha_0}(E_i,E_j)$$

$$=\begin{cases}\widetilde{y}_0(B_2^0-B_1^0)\delta_{ij}, & m_1+1\leqslant i,j\leqslant m_1+m_2,\\ \widetilde{y}_0(B_3^0-B_1^0)\delta_{ij}, & m_1+m_2+1\leqslant i,j\leqslant m,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{3.39}$$

由于 $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}_2$ 和 $\widetilde{y}_3$ 是极小浸入, $\mathrm{LS}(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$ 的平均曲率向量

$$\widetilde{H}=\frac{1}{m}\Big(\sum_{\alpha=m+1}^{m+p-1}\sum_{i=1}^{m}\widetilde{h}_{ii}^{\alpha}\widetilde{e}_{\alpha}+\sum_{i=1}^{m}\widetilde{h}_{ii}^{\alpha_0}\widetilde{e}_{\alpha_0}\Big)$$

由下式确定:

$$\widetilde{H}^{\alpha}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\widetilde{h}_{ii}^{\alpha}=\frac{\widetilde{y}_0}{m}\sum_{i=1}^{m_1}\overline{h}_{ii}^{\alpha}+\overline{E}_{\alpha0}=\overline{E}_{\alpha0},\quad m+1\leqslant\alpha\leqslant m+p_1;\tag{3.40}$$

$$\widetilde{H}^{\alpha}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\widetilde{h}_{ii}^{\alpha}=\frac{\widetilde{y}_0}{m}\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2}\overline{h}_{ii}^{\alpha}=0,\quad m+p_1+1\leqslant\alpha\leqslant m+p_1+p_2;\tag{3.41}$$

$$\widetilde{H}^{\alpha}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\widetilde{h}_{ii}^{\alpha}=\frac{\widetilde{y}_0}{m}\sum_{i=m_1+m_2+1}^{m}\overline{h}_{ii}^{\alpha}=0,\quad m+p_1+p_2+1\leqslant\alpha\leqslant m+p-1;\tag{3.42}$$

$$\widetilde{H}^{\alpha_0}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\widetilde{h}_{ii}^{\alpha_0}=\frac{\widetilde{y}_0}{m}(m_2(B_2^0-B_1^0)+m_3(B_3^0-B_1^0))=-\widetilde{y}_0B_1^0.\tag{3.43}$$

从 (3.2), (3.9)–(3.10), (3.17), (3.36)–(3.43) 和 $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}_2$, $\widetilde{y}_3$ 的 Gauss 方程, 可得

$$\begin{aligned}|\widetilde{h}|^2&=\widetilde{y}_0^2\sum_{\alpha=m+1}^{m+p_1}\sum_{i,j=1}^{m_1}(\overline{h}_{ij}^{\alpha})^2+m\sum_{\alpha=m+1}^{m+p_1}(\overline{E}_{\alpha0})^2+\widetilde{y}_0^2\sum_{\alpha=m+p_1+1}^{m+p_1+p_2}\sum_{i,j=m_1+1}^{m_1+m_2}(\overline{h}_{ij}^{\alpha})^2\\&\quad+\widetilde{y}_0^2\sum_{\alpha=m+p_1+p_2+1}^{m+p-1}\sum_{i,j=m_1+m_2+1}^{m}(\overline{h}_{ij}^{\alpha})^2+\widetilde{y}_0^2(m_2(B_2^0-B_1^0)^2+m_3(B_3^0-B_1^0)^2)\\&=-\widetilde{y}_0^2\Big(\frac{m_1(m_1-1)}{r_1^2}+\widetilde{S}_1\Big)+m\sum_{\alpha=m+1}^{m+p_1}(\overline{E}_{\alpha0})^2+\widetilde{y}_0^2\Big(\frac{m_2(m_2-1)}{r_2^2}-\widetilde{S}_2\Big)\\&\quad+\widetilde{y}_0^2\Big(\frac{m_3(m_3-1)}{r_3^2}-\widetilde{S}_3\Big)+\widetilde{y}_0^2(m_2(B_2^0-B_1^0)^2+m_3(B_3^0-B_1^0)^2)\\&=\frac{m-1}{m}\widetilde{y}_0^2+m\sum_{\alpha=m+1}^{m+p_1}(\overline{E}_{\alpha0})^2-\widetilde{y}_0^2(m_1(B_1^0)^2+m_2(B_2^0)^2+m_3(B_3^0)^2)\\&\quad+\widetilde{y}_0^2(m_2(B_2^0-B_1^0)^2+m_3(B_3^0-B_1^0)^2)\\&=\frac{m-1}{m}\widetilde{y}_0^2+m\sum_{\alpha=m+1}^{m+p_1}(\overline{E}_{\alpha0})^2+m\widetilde{y}_0^2(B_1^0)^2,\end{aligned}\tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}|\widetilde{H}|^2&=\sum_{\alpha=m+1}^{m+p_1}(\widetilde{H}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha=m+p_1+1}^{m+p_1+p_2}(\widetilde{H}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha=m+p_1+p_2+1}^{m+p-1}(\widetilde{H}^{\alpha})^2+(\widetilde{H}^{\alpha_0})^2\\&=\sum_{\alpha=m+1}^{m+p_1}(\overline{E}_{\alpha0})^2+\widetilde{y}_0^2(B_1^0)^2,\end{aligned}\tag{3.45}$$

则有

$$|\widetilde{h}|^2 - m|\widetilde{H}|^2 = \frac{m-1}{m}\widetilde{y}_0^2 > 0.$$

这说明 $\widetilde{x}$ 没有脐点, 并且它的 Möbius 因子 $\widetilde{\rho} = \widetilde{y}_0$. 因此, $\widetilde{Y}$ 是 $\mathrm{LS}(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{r}, \mu)$ 的 Möbius 位置向量. 从而 $\mathrm{LS}(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{r}, \mu)$ 的 Möbius 度量恰好是 $\langle \mathrm{d}\widetilde{Y}, \mathrm{d}\widetilde{Y}\rangle_1 = g$. 进一步地, 如果用 $\{\omega^i\}$ 表示 M^m 上对偶于 $\{E_i\}$ 的局部余标架场, 那么 $\mathrm{LS}(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{r}, \mu)$ 的 Möbius 第二基本形式

$$\widetilde{B} = \sum_{\alpha=m+1}^{m+p} \widetilde{B}^\alpha \Phi(\widetilde{e}_\alpha) \equiv \sum_{\alpha=m+1}^{m+p} \widetilde{B}^\alpha_{ij}\omega^i\omega^j \Phi(\widetilde{e}_\alpha)$$

由下式确定:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{B}^\alpha = \widetilde{\rho}^{-1}\sum(\widetilde{h}^\alpha_{ij} - \widetilde{H}^\alpha\delta_{ij})\omega^i\omega^j = \sum_{i,j=1}^{m_1}\overline{h}^\alpha_{ij}\omega^i\omega^j,\\
&\quad \alpha = m+1, \cdots, m+p_1;
\end{aligned}\tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{B}^\alpha = \widetilde{\rho}^{-1}\sum(\widetilde{h}^\alpha_{ij} - \widetilde{H}^\alpha\delta_{ij})\omega^i\omega^j = \sum_{i,j=m_1+1}^{m_1+m_2}\overline{h}^\alpha_{ij}\omega^i\omega^j,\\
&\quad \alpha = m+p_1+1, \cdots, m+p_1+p_2,
\end{aligned}\tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{B}^\alpha = \widetilde{\rho}^{-1}\sum(\widetilde{h}^\alpha_{ij} - \widetilde{H}^\alpha\delta_{ij})\omega^i\omega^j = \sum_{i,j=m_1+m_2+1}^{m}\overline{h}^\alpha_{ij}\omega^i\omega^j,\\
&\quad \alpha = m+p_1+p_2+1, \cdots, m+p-1,
\end{aligned}\tag{3.48}$$

$$\widetilde{B}^{\alpha_0} = B^0_1\sum_{i=1}^{m_1}(\omega^i)^2 + B^0_2\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2}(\omega^i)^2 + B^0_3\sum_{i=m_1+m_2+1}^{m}(\omega^i)^2,\tag{3.49}$$

或等价地

$$\widetilde{B}^\alpha_{ij} = \begin{cases}
\overline{h}^\alpha_{ij}, & \text{如果}m+1\leqslant\alpha\leqslant m+p_1,\ 1\leqslant i,j\leqslant m_1,\\
& \text{或}m+p_1+1\leqslant\alpha\leqslant m+p_1+p_2,\ m_1+1\leqslant i,j\leqslant m_1+m_2,\\
& \text{或}m+p_1+p_2+1\leqslant\alpha\leqslant m+p-1,\ m_1+m_2+1\leqslant i,j\leqslant m,\\
B^0_1\delta_{ij}, & \text{如果}\alpha=\alpha_0,\ 1\leqslant i,j\leqslant m_1,\\
B^0_2\delta_{ij}, & \text{如果}\alpha=\alpha_0,\ m_1+1\leqslant i,j\leqslant m_1+m_2,\\
B^0_3\delta_{ij}, & \text{如果}\alpha=\alpha_0,\ m_1+m_2+1\leqslant i,j\leqslant m,\\
0, & \text{其他}.
\end{cases}\tag{3.50}$$

另一方面, 由于 Möbius 度量 g 是 $\langle \mathrm{d}\widetilde{y}, \mathrm{d}\widetilde{y}\rangle_1$, $\mathrm{d}\widetilde{y}_2\cdot\mathrm{d}\widetilde{y}_2$ 和 $\mathrm{d}\widetilde{y}_3\cdot\mathrm{d}\widetilde{y}_3$ 的直积, 根据极小性和 $\widetilde{y}, \widetilde{y}_2, \widetilde{y}_3$ 的 Gauss 方程, g 的 Ricci 张量由下式给出:

$$R_{ij} = -\frac{m_1-1}{r_1^2}\delta_{ij} - \sum_{\alpha_1}\sum_{k=1}^{m_1}\overline{h}^{\alpha_1}_{ik}\overline{h}^{\alpha_1}_{kj}, \quad \text{如果 } 1\leqslant i,j\leqslant m_1,\tag{3.51}$$

$$R_{ij} = \frac{m_2-1}{r_2^2}\delta_{ij} - \sum_{\alpha_2}\sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2}\overline{h}^{\alpha_2}_{ik}\overline{h}^{\alpha_2}_{kj}, \quad \text{如果 } m_1+1\leqslant i,j\leqslant m_1+m_2,\tag{3.52}$$

$$R_{ij} = \frac{m_3-1}{r_3^2}\delta_{ij} - \sum_{\alpha_3}\sum_{k=m_1+m_2+1}^{m} \overline{h}_{ik}^{\alpha_3}\overline{h}_{kj}^{\alpha_3}, \quad \text{如果 } m_1+m_2+1 \leqslant i,j \leqslant m, \tag{3.53}$$

$$R_{ij} = 0, \quad \text{其他}, \tag{3.54}$$

其中

$$m+1 \leqslant \alpha_1 \leqslant m+p_1, \quad m+p_1+1 \leqslant \alpha_2 \leqslant m+p_1+p_2,$$
$$m+p_1+p_2+1 \leqslant \alpha_3 \leqslant m+p-1.$$

另一方面, 根据 $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}_2$ 及 $\widetilde{y}_3$ 的定义, g 的法化数量曲率 κ 由下式给出 (见 (3.17)):

$$\kappa = \frac{1}{m(m-1)}(\widetilde{S}_1+\widetilde{S}_2+\widetilde{S}_3) = \frac{2}{m}\sum_a m_a\lambda_a - \frac{1}{m^2}.$$

于是

$$\operatorname{tr} A = \frac{1}{2m}(1+m^2\kappa) = \sum_a m_a\lambda_a. \tag{3.55}$$

由于 $m \geqslant 3$, 根据 (2.23), (3.6) 和 (3.50)–(3.55) 可知, $\mathrm{LS}(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$ 的 Blaschke 张量由 $A = \sum A_{ij}\omega^i\omega^j$ 给出, 其中, 对于 $1 \leqslant i,j \leqslant m_1$,

$$A_{ij} = \frac{1}{m-2}\Big(-\frac{m_1-1}{r^2} + (B_1^0)^2 - \sum_a m_a\lambda_a\Big)\delta_{ij} = \lambda_1\delta_{ij}. \tag{3.56}$$

同样地,

$$A_{ij} = \lambda_2\delta_{ij}, \quad m_1+1 \leqslant i,j \leqslant m_1+m_2, \tag{3.57}$$

$$A_{ij} = \lambda_3\delta_{ij}, \quad m_1+m_2+1 \leqslant i,j \leqslant m, \tag{3.58}$$

$$A_{ij} = 0, \quad \text{其他}. \tag{3.59}$$

所以, A 有常特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. 由于当 $A_{ii} \neq A_{jj}$ 时有 $\omega_i^j = 0$, $\mathrm{LS}(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$ 是 Blaschke 平行的.

命题 3.1 对于例 3.2 所定义的子流形 $\mathrm{LS}(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$, 如下结论成立:

(1) Möbius 形式 C 恒为零;

(2) Blaschke 特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同当且仅当 $m_3r_2^2 \neq m_2r_3^2$;

(3) Möbius 第二基本形式 B 平行当且仅当

$$\widetilde{y}: M_1 \to \mathbb{H}^{m_1+p_1}\Big(-\frac{1}{r_1^2}\Big), \quad \widetilde{y}_2: M_2 \to \mathbb{S}^{m_2+p_2}(r_2), \quad \widetilde{y}_3: M_3 \to \mathbb{S}^{m_3+p_3}(r_3)$$

作为 Riemann 子流形都是平行的. 在此情况下, $\widetilde{y}(M_1)$ 等距于全测地双曲空间 $\mathbb{H}^{m_1}\big(-\frac{1}{r_1^2}\big)$, 因而 $\widetilde{y}$ 可以取作 $\mathbb{H}^{m_1}\big(-\frac{1}{r_1^2}\big)$ 在 $\mathbb{H}^{m_1+p_1}\big(-\frac{1}{r_1^2}\big)$ 中的标准嵌入.

证 由于 (1) 和 (3) 的证明和文 [14] 中命题 3.1 的证明类似, 故在此省略; 结论 (2) 直接来自于 (3.1).

注 3.2 不难证明, 如果 $m_3r_2^2 = m_2r_3^2$, 那么 $\lambda_2 = \lambda_3$. 在此情况下, $\mathrm{LS}(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$ 有两个不同的 Blaschke 特征值, 因而是文 [14] 中例 3.1 或例 3.2 的特例.

4 主要定理的证明

设 $x: M^m \to \mathbb{S}^{m+p}$ 是 $\mathbb{S}^{m+p}$ 中的一个无脐点浸入子流形, 它满足主要定理的所有条件, 并且 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 x 的 3 个不同的 Blaschke 特征值. 由于 Möbius 形式 $C \equiv 0$ 并且 Blaschke 张量 A 平行, (M, g) 等距于 3 个 Riemann 流形 $(M_1, g^{(1)})$, $(M_2, g^{(2)})$ 和 $(M_3, g^{(3)})$ 的直积. 记

$$m_1 := \dim M_1, \quad m_2 := \dim M_2, \quad m_3 := \dim M_3,$$

则有 (M^m, g) 上的单位正交标架场 $\{E_i\}$, 满足:

$$E_1, \cdots, E_{m_1} \in TM_1, \quad E_{m_1+1}, \cdots, E_{m_1+m_2} \in TM_2, \quad E_{m_1+m_2+1}, \cdots, E_m \in TM_3,$$

并且 A 相对于 $\{E_i\}$ 的分量 A_{ij} 可以对角化如下:

$$A_{i_1j_1} = \lambda_1\delta_{i_1j_1}, \quad A_{i_2j_2} = \lambda_2\delta_{i_2j_2}, \quad A_{i_3j_3} = \lambda_3\delta_{i_3j_3}, \quad A_{i_1j_2} = A_{i_2j_3} = A_{i_1j_3} = 0, \tag{4.1}$$

其中

$$1 \leqslant i_1, j_1, k_1, \cdots \leqslant m_1, \quad m_1+1 \leqslant i_2, j_2, k_2, \cdots \leqslant m_1+m_2, \quad m_1+m_2+1 \leqslant i_3, j_3, k_3, \cdots \leqslant m.$$

进一步地, 如在第 2 节所示, 对于某个 Möbius 法标架场 $\{E_\alpha\}$, 可令 $B = \sum B^\alpha_{ij}\omega^i\omega^j E_\alpha$, 其中 $\{\omega^i\}$ 是 $\{E_i\}$ 的对偶, 则根据 $C \equiv 0$ 和 (2.22), 相应的分量 B^α_{ij} 满足:

$$B^\alpha_{i_1i_2} = B^\alpha_{i_1i_3} = B^\alpha_{i_2i_3} \equiv 0, \quad \forall\, \alpha, i_1, i_2, i_3. \tag{4.2}$$

一般地, 我们有下面的引理.

引理 4.1 如果 $i, j, \cdots, k$ 中存在两个指标为 i_a, i_b $(a \neq b)$, 则如下的恒等式成立:

$$B^\alpha_{ij\cdots k} \equiv 0, \tag{4.3}$$

其中 $ij\cdots k$ 表示阶数为不低于 2 的多重指标.

证 根据 (4.2) 和数学归纳法, 仅需证明: 如果 (4.3) 成立, 则当指标 $i, j, \cdots, k, l$ 中有两个取形式 i_a, i_b $(a \neq b)$ 时, 必有

$$B^\alpha_{ij\cdots kl} \equiv 0. \tag{4.4}$$

事实上, 仅需考虑如下的两种情形:

(i) 指标 $i, j, \cdots, k$ 中存在两个分别具有形式 i_a, i_b, $a \neq b$.

在此情况下, 利用 (4.3) 和 $\omega^{j_b}_{i_a} = 0$ $(a \neq b)$, 可得

$$B^\alpha_{ij\cdots kl}\omega^l = \mathrm{d}B^\alpha_{ij\cdots k} - \sum B^\alpha_{lj\cdots k}\omega^l_i - \sum B^\alpha_{il\cdots k}\omega^l_j - \cdots - \sum B^\alpha_{ij\cdots l}\omega^l_k + \sum B^\beta_{ij\cdots k}\omega^\alpha_\beta \equiv 0.$$

因此, (4.4) 成立.

(ii) $1 \leqslant i, j, \cdots, k \leqslant m_1$, 或 $m_1 + 1 \leqslant i, j, \cdots, k \leqslant m_1 + m_2$, 或 $m_1 + m_2 + 1 \leqslant i, j, \cdots, k \leqslant m$ 有一成立.

不失一般性, 我们假设前者, 则必有 $l = j_a$, $a = 2$ 或 $a = 3$. 根据 (2.19) 和 (4.2), 有

$$R^\perp_{\alpha\beta i_1 j_a} = \sum_q (B^\alpha_{j_aq}B^\beta_{i_1q} - B^\alpha_{i_1q}B^\beta_{j_aq}) \equiv 0, \quad \forall i_1, j_a,\ a = 2, 3. \tag{4.5}$$

再结合情形 (i), Ricci 恒等式 (2.25) 以及 $R_{i_1j_aij}\equiv 0$, 说明

$$B^{\alpha}_{ij\cdots kj_a}=B^{\alpha}_{ij\cdots j_ak}+\sum B^{\alpha}_{qj\cdots}R_{iqkj_a}+\sum B^{\alpha}_{iq\cdots}R_{jqkj_a}+\cdots-\sum B^{\beta}_{ij\cdots}R^{\perp}_{\beta\alpha kj_a}\equiv 0.$$

引理 4.2　对所有的 $i_a,j_a,k_a,\cdots,l_a,\ i_b,j_b,\cdots,k_b$ $(1\leqslant a\neq b\leqslant 3)$, 如下的式子成立:

$$\sum_{\alpha}B^{\alpha}_{i_aj_a}B^{\alpha}_{i_bj_b}=-(\lambda_a+\lambda_b)\delta_{i_aj_a}\delta_{i_bj_b},\tag{4.6}$$

$$\sum_{\alpha}B^{\alpha}_{i_aj_ak_a}B^{\alpha}_{i_bj_b}=0.\tag{4.7}$$

更一般地,

$$B^{\alpha}_{i_aj_ak_a\cdots l_a}B^{\alpha}_{i_bj_b\cdots k_b}=0,\tag{4.8}$$

其中 $i_aj_ak_a\cdots l_a$ 表示阶数不小于 3 的多重指标.

证　本引理的主要依据是 Möbius Gauss 方程 (2.18) 以及 Blaschke 张量 A 的平行性假设. 事实上, 由于 $a\neq b$, (4.6) 由 (2.18), (4.1)–(4.2) 以及 $R_{i_ai_bj_bj_a}\equiv 0$ 给出; (4.7) 可由 (2.18), (4.3), $R_{i_ai_bj_bj_a}\equiv 0$ 和 A 的平行性得到; 最后, 利用数学归纳法、(4.7) 及引理 4.1 便容易得到 (4.8).

作为 (4.6) 的推论, 对于 $a\neq b$, 有

$$\sum_{\alpha}B^{\alpha}_{i_aj_a}(B^{\alpha}_{i_bi_b}-B^{\alpha}_{j_bj_b})=0,\tag{4.9}$$

$$\sum_{\alpha}B^{\alpha}_{i_aj_a}B^{\alpha}_{i_bj_b}=0,\ \text{如果}i_a\neq j_a.\tag{4.10}$$

定义

$$V_a=\operatorname{Span}\Big\{\sum_{\alpha}B^{\alpha}_{i_aj_a\cdots k_a}E_\alpha\Big\},\quad a=1,2,3;\tag{4.11}$$

$$V_{a0}=V_a\cap(V_{a'}+V_{a''})^{\perp},\quad \text{因而}\quad V_{a0}\perp V_{b0}\ \ \text{对于}a\neq b,\tag{4.12}$$

其中的 a,a',a'' 是 $1,2,3$ 的一个偶置换. 事实上, 为了证明 $V_{a0}\perp V_{b0}$ $(a\neq b)$, 只需注意到, 根据定义有 $V_{a0}\subset(V_{a'}+V_{a''})^{\perp}$, 这蕴含着

$$V_{a0}\perp(V_{a'}+V_{a''})\supset V_{a'0}+V_{a''0}.$$

设 V'_{a0} $(a=1,2,3)$ 是 V_{a0} 在 V_a 中的正交补, 并记

$$V_0:=V'_{10}+V'_{20}+V'_{30},$$

则下式成立

$$V_0\perp V_{a0},\ a=1,2,3,\ \text{或等价地},\ V_0\perp(V_{10}\oplus V_{20}\oplus V_{30}).$$

为此, 仅需证明: 对于每一对 $a,b=1,2,3$, $V'_{a0}\perp V_{b0}$. 事实上, 首先由定义知 $V'_{a0}\perp V_{a0}$; 其次对于 $b\neq a$ 有 $b=a'$ 或 $b=a''$. 于是

$$V'_{a0}\subset V_a\subset V_a+V_{a''}\Longrightarrow V'_{a0}\perp(V_a+V_{a''})^{\perp}\supset V_{a'0}.$$

同样可得 $V'_{a0}\perp V_{a''0}$.

引理 4.3　$1\leqslant\dim V_0\leqslant 2$.

证 对于任意的 i,j, 用 $B_{ij}^{V'_{a0}}$ 表示 B_{ij} 的 V'_{a0}- 分量, $a=1,2,3$, 则由 (4.9) 和 (4.10), 有

$$B_{i_aj_a}^{V'_{a0}}=0,\quad B_{i_ai_a}^{V'_{a0}}=B_{j_aj_a}^{V'_{a0}},\quad \forall\, i_a,j_a,\ i_a\neq j_a. \tag{4.13}$$

因此, 对于每一个固定的 i_a,

$$V'_{a0}=\mathrm{Span}\,\{B_{i_ai_a}^{V'_{a0}}\},\quad a=1,2,3. \tag{4.14}$$

特别地, $\dim V'_{a0}\leqslant 1$, $a=1,2,3$.

另一方面, 根据 (2.17) 的第二个方程, 有

$$\sum_{i_1}B_{i_1i_1}+\sum_{i_2}B_{i_2i_2}+\sum_{i_3}B_{i_3i_3}=0. \tag{4.15}$$

但是对于任何 a 和 i_a, 从 $V_0\perp V_{a0}$ 易知 $B_{i_ai_a}^{V_0}=B_{i_ai_a}^{V'_{a0}}$. 因此

$$B_{i_ai_a}=B_{i_ai_a}^{V_{a0}}+B_{i_ai_a}^{V'_{a0}}=B_{i_ai_a}^{V_{a0}}+B_{i_ai_a}^{V_0}.$$

再次利用 $V_0\perp V_{a_0}$ 及 $V_{a0}\perp V_{b0}$ $(a\neq b)$, 等式 (4.15) 可化为

$$\sum_{i_a}B_{i_ai_a}^{V_{a0}}=0,\quad a=1,2,3,\quad \sum_{i_1}B_{i_1i_1}^{V_0}+\sum_{i_2}B_{i_2i_2}^{V_0}+\sum_{i_3}B_{i_3i_3}^{V_0}=0. \tag{4.16}$$

(4.16) 和 (4.13) 说明, 对于固定的 i_1, i_2 和 i_3,

$$m_1B_{i_1i_1}^{V_0}+m_2B_{i_2i_2}^{V_0}+m_3B_{i_3i_3}^{V_0}=0. \tag{4.17}$$

再结合 (4.14) 即可证明 $\dim V_0\leqslant 2$.

最后, 如果 $\dim V_0=0$, 那么对于任何的 $a\neq b$, $B_{i_ai_a}\perp B_{i_bi_b}$. 再结合 (4.6) 知 $\lambda_a+\lambda_b=0$, 这与 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同的假设矛盾.

由上面的讨论, V_0, V_{10}, V_{20} 和 V_{30} 互相正交. 记 $\iota:=\dim V_0$, 则可以适当地选取单位正交的法标架场 $\{E_\alpha\}$, 使得

$$E_{\alpha^\nu}\in V_0,\quad \nu=1,\cdots,\iota;\quad E_{\alpha_a},E_{\beta_a},E_{\gamma_a},\cdots\in V_{a0},\quad a=1,2,3. \tag{4.18}$$

引理 4.4 V_0, V_{10}, V_{20} 以及 V_{30} 在 Möbius 法丛 V 中平行. 特别地, 它们的维数都是不变的.

证 设 ξ_a 和 ξ_0 是 V 的截面, 满足 $\xi_a\in V_{a0}$ $(a=1,2,3)$, $\xi_0\in V_0$, 则由子空间 V_0, V_{10}, V_{20} 和 V_{30} 的定义知, ξ_a 是 $B_{i_aj_a\cdots k_a}^{V_{a0}}$ 的线性组合; 对于某组 i_1,i_2,i_3, ξ_0 是 $B_{i_1i_1}^{V_0}$, $B_{i_2i_2}^{V_0}$ 及 $B_{i_3i_3}^{V_0}$ 的线性组合. 于是, 根据 (4.8)–(4.10) 以及 (4.16), 不难断定

$$\langle D^\perp\xi_a,\xi_0\rangle_1=\langle D^\perp\xi_a,\xi_b\rangle_1\equiv 0,\quad b\neq a. \tag{4.19}$$

事实上, 可取 $a=1$, $\xi_a=m_1B_{11}^{V_{10}}$. 设 $B_{i_1i_1}=\sum_\alpha B_{i_1i_1}^\alpha E_\alpha$. 根据 (4.16),

$$\begin{aligned}m_1B_{11}^{V_{10}}&=(B_{11}^{V_{10}}-B_{22}^{V_{10}})+\cdots+(B_{11}^{V_{10}}-B_{m_1m_1}^{V_{10}})\\&=\sum_\alpha((B_{11}^\alpha-B_{22}^\alpha)+\cdots+(B_{11}^\alpha-B_{m_1m_1}^\alpha))E_\alpha,\end{aligned}$$

因而

$$D^\perp\xi_a=m_1D^\perp B_{11}^{V_{10}}=\sum_\alpha((\mathrm{d}B_{11}^\alpha-\mathrm{d}B_{22}^\alpha)+\cdots+(\mathrm{d}B_{11}^\alpha-\mathrm{d}B_{m_1m_1}^\alpha))E_\alpha$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\alpha,\beta}((B^\alpha_{11}-B^\alpha_{22})+\cdots+(B^\alpha_{11}-B^\alpha_{m_1m_1}))\omega^\alpha_\beta E_\alpha\\
=&\sum_{i,\alpha}((B^\alpha_{11i}-B^\alpha_{22i})+\cdots+(B^\alpha_{11i}-B^\alpha_{m_1m_1i}))\omega^i E_\alpha\\
&+2\sum_{i,\alpha}(B^\alpha_{1i}\omega^i_1-B^\alpha_{2i}\omega^i_2)E_\alpha+\cdots+2\sum_{i,\alpha}(B^\alpha_{1i}\omega^i_1-B^\alpha_{m_1i}\omega^i_{m_1})E_\alpha\\
=&\sum_{i_1,\alpha_1}((B^{\alpha_1}_{11i_1}-B^{\alpha_1}_{22i_1})+\cdots+(B^{\alpha_1}_{11i_1}-B^{\alpha_1}_{m_1m_1i_1}))\omega^{i_1}E_{\alpha_1}\\
&+2\sum_{i_1,\alpha_1}(B^{\alpha_1}_{1i_1}\omega^{i_1}_1-B^{\alpha_1}_{2i_1}\omega^{i_1}_2)E_{\alpha_1}+\cdots+2\sum_{i_1,\alpha_1}(B^{\alpha_1}_{11}\omega^{i_1}_1-B^{\alpha_1}_{m_1i_1}\omega^{i_1}_{m_1})E_{\alpha_1}\in V_{10},
\end{aligned}
$$

这蕴含着此时 (4.19) 成立. 类似地可考虑其他情形. 最后由 (4.19) 便可直接得到引理 4.3.

注 4.1　$\dim V_0$ 沿 M^m 为常数的结论也可以直接证明如下:

对于固定的 i_1,i_2,i_3, 根据 (4.17), 有

$$\sum_a m_a\langle B^{V_0}_{i_ai_a},B^{V_0}_{i_bi_b}\rangle_1=0,\quad b=1,2,3. \tag{4.20}$$

再结合 (4.6) 说明对于任意的 a,b, $\langle B^{V_0}_{i_ai_a},B^{V_0}_{i_bi_b}\rangle_1$ 是常数. 于是根据 Lagrange 恒等式, 对于 $a\neq b$, 有

$$(B^{V_0}_{i_ai_a}\times B^{V_0}_{i_bi_b})^2=\langle B^{V_0}_{i_ai_a},B^{V_0}_{i_ai_a}\rangle_1\langle B^{V_0}_{i_bi_b},B^{V_0}_{i_bi_b}\rangle_1-\langle B^{V_0}_{i_ai_a},B^{V_0}_{i_bi_b}\rangle_1^2=\text{const}.$$

另一方面, 根据 (4.17), $B^{V_0}_{i_1i_1}$ 平行于 $B^{V_0}_{i_2i_2}$ 当且仅当 $B^{V_0}_{i_1i_1},B^{V_0}_{i_2i_2},B^{V_0}_{i_3i_3}$ 互相平行, 即 $\dim V_0=1$. 注记得证.

于是仅需考虑如下的两种情形:

情形 1 $\dim V_0=2$. 在此情况下, 可以找到两个指标 α_0 和 α_0', 使得

$$B^{V_0}_{i_1i_1}=B^0_1E_{\alpha_0},\quad B^{V_0}_{i_ai_a}=B^0_aE_{\alpha_0}+B^0_a{}'E_{\alpha_0'},\quad\forall\, i_a,\quad a=2,3, \tag{4.21}$$

并且

$$B^0_1B^0_2{}'\neq 0. \tag{4.22}$$

引理 4.5　B^0_1 和 $B^0_2,B^0_2{}',B^0_3,B^0_3{}'$ 都是常数.

证　首先, (2.17) 和 (4.21) 给出

$$m_1B^0_1+m_2B^0_2+m_3B^0_3=m_2B^0_2{}'+m_3B^0_3{}'=0. \tag{4.23}$$

其次, 根据 (4.6), (4.20) 和 (4.21), 可知

$$
\begin{aligned}
&m_1(B^0_1)^2=m_2(\lambda_1+\lambda_2)+m_3(\lambda_1+\lambda_3)=\text{const},\\
&m_2((B^0_2)^2+(B^0_2{}')^2)=m_1(\lambda_1+\lambda_2)+m_3(\lambda_2+\lambda_3)=\text{const},\\
&m_3((B^0_3)^2+(B^0_3{}')^2)=m_1(\lambda_1+\lambda_3)+m_2(\lambda_2+\lambda_3)=\text{const}.
\end{aligned}
$$

这结合 (4.6) 和 (4.23) 容易说明, B^0_1 及 $B^0_2,B^0_2{}',B^0_3,B^0_3{}'$ 均是常数.

引理 4.6 对于如上选取的 Möbius 法标架场 $\{E_\alpha\} \equiv \{E_{\alpha_a}, E_{\alpha_0}, E_{\alpha'_0}\}$, Möbius 法联络形式 ω_α^β $(\alpha, \beta = \alpha_a, \alpha_0, \alpha'_0)$ 满足

$$\omega_{\alpha_0}^\beta = \omega_{\alpha'_0}^\beta = \omega_{\alpha_a}^{\beta_b} = 0, \quad a \neq b, \quad \beta = \alpha_a, \alpha_0, \alpha'_0. \tag{4.24}$$

证 根据引理 4.4 和 (4.18), (4.21), 我们在这里仅需证明 $\omega_{\alpha_0}^{\alpha'_0} = 0$. 事实上, 由 (4.8) 可知, $\sum B_{i_1 i_1 j}^{\alpha'_0} \omega^j = 0$. 它结合引理 4.5 和 (4.21) 说明

$$0 = \mathrm{d}B_{i_1 i_1}^{\alpha'_0} - B_{j i_1}^{\alpha'_0} \omega_{i_1}^j - B_{i_1 j}^{\alpha'_0} \omega_{i_1}^j + B_{i_1 i_1}^{\alpha_0} \omega_{\alpha_0}^{\alpha'_0} + B_{i_1 i_1}^{\alpha_1} \omega_{\alpha_1}^{\alpha'_0} = B_{i_1 i_1}^{\alpha_0} \omega_{\alpha_0}^{\alpha'_0},$$

其中利用了 $\omega_{\alpha_a}^{\alpha'_0} = 0$, $a = 1, 2, 3$, 而后者可以由引理 4.4 直接得到. 因此 $\omega_{\alpha_0}^{\alpha'_0} = 0$.

设 Y 和 N 分别是 x 的 Möbius 位置向量和 Möbius 副位置向量. 如同以前许多作者做的那样[3, 8–9, 12, 14], 可定义另一个向量值函数

$$\mathbf{c} := N + \lambda Y + \mu_0 E_{\alpha_0} + \mu'_0 E_{\alpha'_0}, \tag{4.25}$$

其中的常数 λ, μ_0 和 μ'_0 待定, 则利用 (2.11)–(2.13), 得

$$\mathrm{d}\mathbf{c} = \sum_{a, i_a} (\lambda_a + \lambda - \mu_0 B_a^0 - \mu'_0 B_a^{0\prime}) \omega^{i_a} Y_{i_a},$$

且有 $B_1^{0\prime} = 0$. 再根据 (4.23), 有

$$\begin{vmatrix} 1 & B_1^0 & 0 \\ 1 & B_2^0 & B_2^{0\prime} \\ 1 & B_3^0 & B_3^{0\prime} \end{vmatrix} = B_2^{0\prime}(B_1^0 - B_3^0) + B_3^{0\prime}(B_2^0 - B_1^0) = \frac{1}{m_3} B_1^0 B_2^{0\prime}(m_1 + m_2 + m_3) = \frac{m}{m_3} B_1^0 B_2^{0\prime} \neq 0,$$

对于 λ, μ_0, μ'_0, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda - \mu_0 B_1^0 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda - \mu_0 B_2^0 - \mu'_0 B_2^{0\prime} = 0, \\ \lambda_3 + \lambda - \mu_0 B_3^0 - \mu'_0 B_3^{0\prime} = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

有如下的唯一解:

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3}{m}, \\ \mu_0 = -\dfrac{1}{m B_1^0} \Big(\sum m_a \lambda_a - m \lambda_1 \Big), \\ \mu'_0 = -\dfrac{1}{m B_1^0 B_2^{0\prime}} ((m_1 B_1^0 + (m_2 + m_3) B_2^0) \lambda_1 \\ \qquad + ((m_1 + m_3) B_1^0 + m_2 B_2^0) \lambda_2 + m_3 (B_1^0 - B_2^0) \lambda_3). \end{cases} \tag{4.27}$$

由此可得如下的引理.

引理 4.7 设 λ, μ_0 和 μ'_0 是由 (4.27) 给出的常向量, 则前面由 (4.25) 定义的向量值函数 $\mathbf{c}$ 在 M^m 上是常向量, 并且

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = 2\lambda + \mu_0^2 + {\mu'_0}^2, \quad \langle \mathbf{c}, Y \rangle = 1. \tag{4.28}$$

有如下的 3 个子情形需要考虑:

子情形 (1): $\mathbf{c}$ 是类时的; 子情形 (2): $\mathbf{c}$ 是类光的; 子情形 (3): $\mathbf{c}$ 是类空的.

由于相关的论证是标准的且与文 [14] 中的讨论一致 (见文 [14] 中相应的情形 1), 我们在此略去如下的结果的证明.

命题 4.1　设 $x: M^m \to \mathbb{S}^{m+p}$ 满足主要定理 (定理 1.3) 中的所有假设. 如果 $\dim V_0 = 2$ 且 $\mathbf{c}$ 是由 (4.25) 定义的常向量, 那么下述情形之一成立

(1) $\mathbf{c}$ 是类时的. 此时, x Möbius 等价于一个具有平行平均曲率和常数量曲率并且沿平均曲率向量方向恰有 3 个不同的主曲率的拟平行浸入 $\tilde{x}: M^m \to \mathbb{S}^{m+p}$;

(2) $\mathbf{c}$ 是类光的. 此时, x Möbius 等价于一个具有平行平均曲率和常数量曲率并且沿平均曲率向量方向恰有 3 个不同的主曲率的拟平行浸入 $\bar{x}: M^m \to \mathbb{R}^{m+p}$ 在 σ 下的像;

(3) $\mathbf{c}$ 是类空的. 此时, x Möbius 等价于一个具有平行平均曲率和常数量曲率并且沿平均曲率向量方向恰有 3 个不同的主曲率的拟平行浸入 $\bar{x}: M^m \to \mathbb{H}^{m+p}$ 在 τ 下的像.

情形 2 $\dim V_0 = 1$.

在此情况下, 存在指标 α_0, 使得 $V_0 = \mathbb{R}E_{\alpha_0}$. 于是, 对于每一个指标 i_a,

$$B^{V_0}_{i_a i_a} = B^0_a E_{\alpha_0}, \quad a = 1, 2, 3. \tag{4.29}$$

因此

$$m_1 B^0_1 + m_2 B^0_2 + m_3 B^0_3 = 0, \quad B^0_a B^0_b = -(\lambda_a + \lambda_b), \quad a \neq b, \tag{4.30}$$

它蕴含着

$$(B^0_a)^2 = \frac{1}{m_a}((m_{a'} + m_{a''})\lambda_a + m_{a'}\lambda_{a'} + m_{a''}\lambda_{a''}), \quad a = 1, 2, 3, \tag{4.31}$$

其中 a, a', a'' 是 $1, 2, 3$ 的一个偶置换.

进一步地, 由引理 4.4 可知, 对所有的 a 和 $b \neq a$, 成立

$$\omega^{\alpha_a}_{\alpha_0} = \omega^{\alpha_b}_{\alpha_a} \equiv 0. \tag{4.32}$$

定义

$$z_a = N + \lambda_a Y - B^0_a E_{\alpha_0}, \quad a = 1, 2, 3, \tag{4.33}$$

则根据 (2.11)–(2.13) 和 (4.32), 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z_a &= \sum_{i,j} A_{ij}\omega^j Y_i + \lambda_a \sum_i \omega^i Y_i + B^0_a \sum_{i,j} B^{\alpha_0}_{ij}\omega^j Y_i \\ &= (2\lambda_a + (B^0_a)^2) \sum_{i_a} \omega^{i_a} Y_{i_a}, \quad a = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.34}$$

于是, 对于 $b \neq a$, z_a 在 M_b 上是常值的.

利用 (2.12), (2.13), (4.32) 和 (4.34), 容易证明如下的引理.

引理 4.8　子丛 $\mathbb{R}z_a$, $Y_*(TM_a)$, V_{a0}, $a = 1, 2, 3$, 相互正交, 并且 Möbius 法丛 V 上的 Möbius 法联络是它在 $\mathbb{R}E_{\alpha_0}$ 和 $V_{a0} (a = 1, 2, 3)$ 上的限制的直和. 同时,

$$\mathbb{R}z_a \oplus Y_*(TM_a) \oplus V_{a0}, \quad a = 1, 2, 3$$

在 $\mathbb{R}^{m+p+2}_1$ 中相互正交, 并且它们分别在 $M_a (a = 1, 2, 3)$ 是常值向量.

子情形 (i): $2\lambda_1+(B_1^0)^2$, $2\lambda_2+(B_2^0)^2$ 和 $2\lambda_3+(B_3^0)^2$ 有一个为零.

不失一般性, 假设 $2\lambda_1+(B_1^0)^2=0$, 则根据 (4.34), 有 $\mathrm{d}z_1\equiv 0$, 因而 $z_1=\mathbf{c}$ 在 M^m 上是一常向量. 进一步地, 有

$$\langle\mathbf{c},\mathbf{c}\rangle_1=2\lambda_1+(B_1^0)^2=0,\quad \langle\mathbf{c},Y\rangle_1=1.$$

因此, 在文 [14] 中的相关论证 (见其中情形 1 的子情形 (2)) 适合于当前的情形. 这就证明了如下的结论.

命题 4.2 设 $x:M^m\to\mathbb{S}^{m+p}$ 满足主要定理 (定理 1.3) 的所有假设. 如果 $\dim V_0=1$, 并且存在某个 a, $1\leqslant a\leqslant 3$, 使得 $2\lambda_a+(B_a^0)^2=0$, 那么 x Möbius 等价于

(2) 一个具有平行平均曲率和常数量曲率并且沿平均曲率向量方向恰有 3 个不同的主曲率的拟平行浸入 $\overline{x}:M^m\to\mathbb{R}^{m+p}$ 在 σ 下的像.

子情形 (ii): $2\lambda_a+(B_a^0)^2\neq 0$, $a=1,2,3$.

在此子情形下, 利用 (4.30) 和 (4.31) 进行直接计算, 容易证明如下的引理.

引理 4.9 对于 $a=1,2,3$, 常数 B_a^0 满足

$$\sum_a\frac{1}{2\lambda_a+(B_a^0)^2}=\sum_a\frac{B_a^0}{2\lambda_a+(B_a^0)^2}=0,\quad \sum_a\frac{\lambda_a}{2\lambda_a+(B_a^0)^2}=1. \tag{4.35}$$

注 4.2 注意到 $\bigoplus_a(Y_*(TM_a)\oplus V_{a0})$ 是类空的, 并且

$$\langle z_a,z_a\rangle_1=2\lambda_a+(B_a^0)^2\neq 0,\quad a=1,2,3. \tag{4.36}$$

因此, 存在唯一的一个指标 a, 使得

$$\langle z_a,z_a\rangle_1<0,\quad \text{或等价地},\ 2\lambda_a+(B_a^0)^2<0.$$

不失一般性, 可假设存在如下的正数 r_1,r_2,r_3:

$$r_1^2:=-\frac{1}{2\lambda_1+(B_1^0)^2},\quad r_a^2:=\frac{1}{2\lambda_a+(B_a^0)^2},\quad a=2,3. \tag{4.37}$$

则根据 (4.30)–(4.31) 和 (4.35), 有

$$r_1^2=r_2^2+r_3^2,\quad m_3r_2^2\neq m_2r_3^2, \tag{4.38}$$

对于每一个 a, 利用 Möbius 第二基本形式 B, 可定义

$$\overset{(a)}{B}=\sum B^{\alpha_a}_{i_aj_a}\omega^{i_a}\omega^{j_a}E_{\alpha_a},$$

则 $\overset{(a)}{B}$ 是一个在 M_a 上定义的 V_{a0}- 值对称二次形式, 它具有分量 $\overset{(a)}{B}{}^{\alpha_a}_{i_aj_a}=B^{\alpha_a}_{i_aj_a}$.

设 $\overset{(a)}{B}{}^{\alpha_a}_{i_aj_a,k_a}$ 是 $\overset{(a)}{B}$ 关于 V_{a0} 上的诱导联络的协变导数的分量, 则作为 (4.2), (4.32) 和引理 4.8 的推论, 有

$$\overset{(a)}{B}{}^{\alpha_a}_{i_aj_a,k_a}=B^{\alpha_a}_{i_aj_ak_a}. \tag{4.39}$$

由于 $B^{\alpha_b}_{i_aj_a}=0$ $(b\neq a)$, 利用 Möbius 形式 C 的消失条件, 再结合 (2.18)–(2.19), (2.21), (4.1)–(4.2) 以及 (4.39) 即可证明如下的引理.

引理 4.10 Riemann 流形 $(M_a, g^{(a)})$ 和向量丛值的对称张量 $\overset{(a)}{B}$ 满足具有常曲率 $2\lambda_a + (B^0_a)^2$ 的空间形式中子流形的 Gauss 方程, Codazzi 方程和 Ricci 方程, 即成立

$$\begin{aligned} R_{i_aj_ak_al_a} = &\sum(\overset{(a)}{B}{}^{\alpha_a}_{i_al_a}\overset{(a)}{B}{}^{\alpha_a}_{j_ak_a} - \overset{(a)}{B}{}^{\alpha_a}_{i_ak_a}\overset{(a)}{B}{}^{\alpha_a}_{j_al_a}) \\ &+ (2\lambda_a + (B^0_a)^2)(\delta_{i_al_a}\delta_{j_ak_a} - \delta_{i_ak_a}\delta_{j_al_a}), \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\overset{(a)}{B}{}^{\alpha_a}_{i_aj_a,k_a} = \overset{(a)}{B}{}^{\alpha_a}_{i_ak_a,j_a}, \quad R^\perp_{\alpha_a\beta_ai_aj_a} = \sum(\overset{(a)}{B}{}^{\alpha_a}_{j_ak_a}\overset{(a)}{B}{}^{\beta_a}_{i_ak_a} - \overset{(a)}{B}{}^{\alpha_a}_{i_ak_a}\overset{(a)}{B}{}^{\beta_a}_{j_ak_a}). \tag{4.41}$$

由引理 4.10, 存在以 $\overset{(1)}{B}$ 为第二基本形式的等距浸入

$$\widetilde{y} \equiv (\widetilde{y}_0, \widetilde{y}_1) : (M_1, g^{(1)}) \to \mathbb{H}^{m_1+p_1}\Big(-\frac{1}{r_1^2}\Big) \subset \mathbb{R}^{m_1+p_1+1}_1,$$

以及分别以 $\overset{(a)}{B}$ $(a = 2, 3)$ 为第二基本形式的等距浸入

$$\widetilde{y}_a : (M_a, g^{(a)}) \to \mathbb{S}^{m_a+p_a}(r_a) \subset \mathbb{R}^{m_a+p_a+1}, \quad a = 2, 3.$$

注意到, 对于 $b \neq a$ 有 $B^{\alpha_b}_{i_aj_a} \equiv 0$. 故由 (2.17) 可知, $\widetilde{y}$ 和 $\widetilde{y}_a$, $a = 2, 3$, 都是极小浸入. 进一步地, 如果用 $\widetilde{S}_a$ 表示 M_a 的数量曲率, 那么由 (4.37), (4.40) 和极小性, 可知

$$\widetilde{S}_1 = -\frac{m_1(m_1-1)}{r_1^2} - \sum(B^{\alpha_1}_{i_1j_1})^2, \quad \widetilde{S}_a = \frac{m_a(m_a-1)}{r_a^2} - \sum(B^{\alpha_a}_{i_aj_a})^2, \quad a = 2, 3. \tag{4.42}$$

这说明

$$\widetilde{S}_1 + \frac{m_1(m_1-1)}{r_1^2} = -\sum(B^{\alpha_1}_{i_1j_1})^2 \leqslant 0, \tag{4.43}$$

$$\widetilde{S}_a - \frac{m_a(m_a-1)}{r_a^2} = -\sum(B^{\alpha_a}_{i_aj_a})^2 \leqslant 0, \quad a = 2, 3. \tag{4.44}$$

另一方面, 根据 (2.17),

$$\sum_{a,i_a,j_a}(B^{\alpha_a}_{i_aj_a})^2 = \sum_{\alpha,i,j}(B^\alpha_{ij})^2 - \sum_a m_a(B^0_a)^2 = \frac{m-1}{m} - \sum_a m_a(B^0_a)^2 = \text{const}. \tag{4.45}$$

于是根据 (4.42) 和 (4.45), 得

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2 + \widetilde{S}_3 = &-\frac{m_1(m_1-1)}{r_1^2} + \frac{m_2(m_2-1)}{r_2^2} + \frac{m_3(m_3-1)}{r_3^2} \\ &- \frac{m-1}{m} + m_1(B^0_1)^2 + m_2(B^0_2)^2 + m_3(B^0_3)^2 \\ = &\ \text{const}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

由于 $\widetilde{S}_a$ 是分别在 M_a 上定义的函数, 故 $\widetilde{S}_a$ 均为 M^m 上的常数; 并且由 (4.43)–(4.44) 可知, 对于满足条件 $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ 的某组正常数 μ_1, μ_2, μ_3, 有

$$\widetilde{S}_1 = -\frac{m_1(m_1-1)}{r_1^2} + \mu_1\Big(m_1(B^0_1)^2 + m_2(B^0_2)^2 + m_3(B^0_3)^2 - \frac{m-1}{m}\Big), \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_a = &\frac{m_a(m_a-1)}{r_a^2} + \mu_a\Big(m_a(B^0_1)^2 \\ &+ m_2(B^0_2)^2 + m_3(B^0_3)^2 - \frac{m-1}{m}\Big), \quad a = 2, 3. \end{aligned} \tag{4.48}$$

设 LS$(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$ 是例 3.2 中由 $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}_2$ 及 $\widetilde{y}_3$ 定义的某个子流形. 选取和 (3.24)–(3.27) 相同的法标架场 $\{\widetilde{e}_\alpha\}$. 此时, 有

$$\overline{E}_\alpha=E_\alpha,\quad m+1\leqslant\alpha\leqslant m+p.$$

再直接计算

$$\widetilde{\omega}_\alpha^\beta=\mathrm{d}\widetilde{e}_\alpha\cdot\widetilde{e}_\beta=\langle\mathrm{d}E_\alpha,E_\beta\rangle_1=\begin{cases}\omega_\alpha^\beta, & \text{对于}m+1\leqslant\alpha,\beta\leqslant m+p_1,\\ & \text{或}m+p_1+1\leqslant\alpha,\beta\leqslant m+p_1+p_2,\\ & \text{或}m+p_1+p_2+1\leqslant\alpha,\beta\leqslant m+p;\\ \\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

这说明, x 和 LS$(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$ 有相同的 Möbius 法联络. 因此, 由定理 2.2, x 一定 Möbius 等价于 LS$(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$. 于是, 我们证明了如下的命题.

命题 4.3 设 $x:M^m\to\mathbb{S}^{m+p}$ 满足主要定理 (即定理 1.3) 的所有条件. 如果 $\dim V_0=1$ 并且 $2\lambda_a+(B_a^0)^2\neq0$, $a=1,2,3$, 那么 x 一定 Möbius 等价于

(4) 在例 3.2 中给出的子流形 LS$(\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu)$, 其中的多重参数 $\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{r},\mu$ 满足 $m_3r_2^2\neq m_2r_3^2$.

定理 1.3 的证明

如在本节前面所作的讨论, 仅有如下的两种情形 (包括一些子情形) 需要考虑:

(1) $\dim V_0=2$.

(2) $\dim V_0=1$, 可以分为 2 个子情形.

子情形 (i), $2\lambda_a+(B_a^0)^2$ $(a=1,2,3)$ 中有一个为零;

子情形 (ii), $2\lambda_a+(B_a^0)^2\neq0$, $a=1,2,3$.

于是, 由命题 4.1–4.3 可以直接得到定理 1.3.

致谢 作者感谢审稿人对原稿的评价和修改建议.

参 考 文 献

[1] Wang Changping. Möbius geometry of submanifolds in S^n [J]. *Manuscripta Math*, 1998, 96:517–534.

[2] Li Haizhong, Wang Changping. Surfaces with vanishing Möbius form in S^n [J]. *Acta Math Sinica, English Series*, 2003, 19:671–678.

[3] Liu Huili, Wang Changping, Zhao Guosong. Möbius isotropic submanifolds in S^n [J]. *Tohoku Math J*, 2001, 53(2):553–569.

[4] Guo Zhen, Li Tongzhu, Lin Limiao, et al. Classification of hypersurfaces with constant Möbius curvature in $\mathbb{S}^{m+1}$ [J]. *Math Z*, 2012, 271(1):1–27.

[5] Li Haizhong, Liu Huili, Wang Changping, Zhao Guosong. Möbius isoparametric hypersurfaces in S^{n+1} with two distinct principal curvatures [J]. *Acta Math Sinica, English Series*, 2002, 18:437–446.

[6] Hu Zejun, Li Deying. Möbius isoparametric hypersurfaces with three distinct principal curvatures [J]. *Pacific J Math*, 2007, 232(2):289–311.

[7] Li Tongzhu, Qing Jie, Wang Changping. Möbius and Laguerre geometry of Dupin hypersurfaces [J/OL]. arXiv:1503.02914v1, 2015.

[8] Li Haizhong, Wang Changping. Möbius geometry of hypersurfaces with constant mean curvature and scalar curvature [J]. *Manuscripta Math*, 2003, 112:1–13.

[9] Li Xingxiao, Zhang Fengyun. A Möbius characterization of submanifolds in real space forms with parallel mean curvature and constant scalar curvature [J]. *Manuscripta Math*, 2005, 117:135–152.

[10] Cheng Q-M, Li Xingxiao, Qi Xuerong. A classification of hypersurfaces with parallel para-Blaschke tensor in S^{m+1} [J]. *Int J Math*, 2010, 21:297–316.

[11] Hu Zejun, Li Haizhong. Classification of hypersurfaces with parallel Möbius second fundamental form in S^{n+1} [J]. *Sci China*, 2004, 47A:417–430.

[12] Zhai Shujie, Hu Zejun, Wang Changping. On submanifolds with parallel Möbius second fundamental form in the unit sphere [J]. *Int J Math*, 2014, 25(6):62–63; DOI: 10.1142/S0129167X14500621.

[13] Li Xingxiao, Zhang Fengyun. A classification of immersed hypersurfaces in spheres with parallel Blaschke tensors [J]. *Tohoku Math J*, 2006, 58:581–597.

[14] Li Xingxiao, Song Hongru. On the immersed submanifolds in the unit sphere with parallel Blaschke tensor [J/OL]. arXiv:1511.02560, 2015.

[15] Li Xingxiao, Zhang Fengyun. Immersed hypersurfaces in the unit sphere S^{m+1} with constant Blaschke eigenvalues [J]. *Acta Math Sinica, English Series*, 2007, 23:533–548.

[16] Li Xingxiao, Zhang Fengyun. On the Blaschke isoparametric hypersurfaces in the unit sphere [J]. *Acta Math Sinica, English Series*, 2009, 25:657–678.

[17] Li Tongzhu, Wang Changping. A note on Blaschke isoparametric hypersurfaces [J]. *Int J Math*, 2014, 25(12), 1450117, 9 pages, DOI: 10.1142/S0129167X14501171.

[18] 李兴校, 彭业娟. 单位球面 S^6 中的 Blaschke 等参超曲面 [J]. 中国科学 (数学), 2010, 40:881–900.

[19] Li Xingxiao, Peng Yejuan. Classification of the Blaschke isoparametric hypersurfaces with three distinct Blaschke eigenvalues [J]. *Results Math*, 2010, 58:145–172.

[20] Rodrigues L A, Tenenblat K. A characterization of Moebius isoparametric hypersurfaces of the sphere [J]. *Monatsh Math*, 2009, 158:321–327.

[21] Hu Zejun, Li Xingxiao, Zhai Shujie. On the Blaschke isoparametric hypersurfaces in the unit sphere with three distinct Blaschke eigenvalues [J]. *Sci China, Math*, 2011, 54(10):2171-2194; DOI: 10.1007/s11425-011-4291-9.

[22] Li Xingxiao, Song Hongru. Regular space-like hypersurfaces in $\mathbb{S}_1^{m+1}$ with parallel Blaschke tensors [J]. *J Math* (*PRC*), 2016, 36(6):1183–1200.

[23] Li Xingxiao, Song Hongru. Regular space-like hypersurfaces in $\mathbb{S}_1^{m+1}$ with parallel para-Blaschke tensors [J]. *Acta Math Sinica, English Series*, 2017, 33(10):1361–1381.

[24] Blaschke W. Vorlesungen über differentialgeometrie [M]. Vol. 3, Berlin: Springer-Verlag, 1929.

[25] Chen B Y. Total mean curvature and submanifolds of finite type [M]. Ser Pure Math 1, Singapore: World Scientific Publishing, 1984.

On the Blaschke Parallel Submanifolds in the Unit Sphere with Three Distinct Blaschke Eigenvalues

LI Xingxiao[1] SONG Hongru[2]

[1]School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan, China. E-mail: xxl@henannu.edu.cn

[2]Pingyuan Foreign Language School, Xinxiang 453500, Henan, China. E-mail: yaozheng-shr@163.com

Abstract As is known, the Blaschke tensor A (a symmetric covariant 2-tensor) is one of the fundamental Möbius invariants in the Möbius differential geometry of submanifolds in the unit sphere $\mathbb{S}^n$, and the eigenvalues of A are referred to as the Blaschke eigenvalues. This paper deals with the submanifolds in $\mathbb{S}^n$ with parallel Blaschke tensor which are called Blaschke parallel submanifolds. The main theorem of this paper is the classification of Blaschke parallel submanifolds in $\mathbb{S}^n$ with exactly three distinct Blaschke eigenvalues.

Keywords Parallel Blaschke tensor, Vanishing Möbius form, Constant scalar curvature, Parallel mean curvature vector

2000 MR Subject Classification 53A30, 53B25

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 39 No. 3, 2018
by ALLERTON PRESS, INC., USA