数 学 年 刊 A 辑
2018, 39(3):273–286
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2018.0024

σ-相关同伦元素的非平凡性*

王玉玉[1]

提要 本文中, 通过几何方法证明了 σ 相关同伦元素在球面稳定同伦群 $\pi_m S$ 中是非平凡的, 其中 $m=p^{n+1}q+2p^nq+(s+3)p^2q+(s+3)pq+(s+3)q-8$, $p\geqslant 7$ 是奇素数, $n>3$, $0\leqslant s<p-3$, 且 $q=2(p-1)$. 该 σ 相关同伦元素在 Adams 谱序列的 E_2-项中由 $\widetilde{\gamma}_{s+3}\widetilde{l}_n g_0$ 表示.

关键词 球面稳定同伦群, 球谱, Adams 谱序列, May 谱序列
MR (2000) 主题分类 55Q45
中图法分类 O189.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2018)03-0273-14

1 引 言

设 A 是模 p Steenrod 代数, S 表示球谱的 p 局部化. Serre 在文 [1] 中证明了 n 维球面 S^n 的同伦群 $\pi_{n+r}S^n$ 是有限群 $(r>0)$. 当 $n>r+1$ 时, $\pi_{n+r}S^n\cong\pi_{n+r+1}S^{n+1}$, 记作 $\pi_r S$, 它的计算是代数拓扑的核心问题之一. Adams 谱序列是计算 $\pi_r S$ 的一个强有力工具, 其 E_2 项为 A 的上同调群: $E_2^{s,t}\cong\mathrm{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)\Rightarrow\pi_{t-s}S$, 且 Adams 微分为 $\mathrm{d}_r: E_r^{s,t}\to E_r^{s+r,t+r-1}$ $(r\geqslant 2)$.

在 Adams 谱序列中, 若一族元素 $x_i\in E_2^{s,t}$ 非平凡地收敛, 则在球面稳定同伦群中可得到一族非平凡同伦类元素 $f_i\in\pi_*S$, 此时称 f_i 可由 $x_i\in E_2^{s,t}$ 表示, 且在 Adams 谱序列中其滤子为 s. 迄今为止, 决定球面稳定同伦群 π_*S 仍未完全解决, 一个较为有效的方法就是发掘 π_*S 中的非平凡元素族. 最近, 作者与合作者给出了一系列 π_*S 中的非平凡元素族, 具体可参看文 [2–4].

接下来, 将给出一些与本文相关的概念与重要结果.

设 M 为模素数 $p(\geqslant 5)$ 的 Moore 谱, 可由如下的上纤维序列给出

$$S\xrightarrow{p}S\xrightarrow{i}M\xrightarrow{j}\Sigma S\ .$$

设 $\alpha:\Sigma^q M\to M$ 为 Adams 映射, $V(1)$ 为 α 的上纤维, 即有如下的上纤维序列

$$\Sigma^q M\xrightarrow{\alpha}M\xrightarrow{i'}V(1)\xrightarrow{j'}\Sigma^{q+1}M.$$

设 $V(2)$ 为映射 $\beta:\Sigma^{(p+1)q}V(1)\to V(1)$ 的上纤维, 即有

$$\Sigma^{(p+1)q}V(1)\xrightarrow{\beta}V(1)\xrightarrow{\bar{i}}V(2)\xrightarrow{\bar{j}}\Sigma^{(p+1)q+1}V(1).$$

本文 2016 年 4 月 11 日收到, 2017 年 7 月 7 日收到修改稿.
[1]天津师范大学数学科学学院, 天津 300387. E-mail: wdoubleyu@aliyun.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11301386) 的资助.

进一步, 设 $\gamma : \Sigma^{(p^2+p+1)q}V(2) \to V(2)$ 为 v_3-映射, 可有如下定义.

定义 1.1 (见 [5]) 对于 $t \geqslant 1$, $p \geqslant 7$, $q = 2(p-1)$, γ-元素 γ_t 定义为下列复合映射的同伦类

$$\gamma_t = jj'\overline{j}\gamma^t\overline{i}i'i \in \pi_{tp^2q+(t-1)pq+(t-2)q-3}S.$$

定理 1.1 (见 [5]) 对于 $t \geqslant 1$, $p \geqslant 7$, $\gamma_t \in \pi_*S$ 是非平凡的元素.

而且, 从文 [6] 可知, 在 Adams 谱序列中, $\gamma_t \in \pi_*S$ 可由第三希腊字母类元素族 $\widetilde{\gamma}_t \in \mathrm{Ext}_A^{*,*}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ 表示, 并且在 May 谱序列中, $\widetilde{\gamma}_t$ 可由元素 $t(t-1)(t-2)a_3^{t-3}h_{3,0}h_{2,1}h_{1,2}$ 表示.

在文 [7] 中, E_2-项 $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ 具有如下的 $\mathbb{Z}_p$-基:

$$a_0 \in \mathrm{Ext}_A^{1,1}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p), \quad h_i \in \mathrm{Ext}_A^{1,p^iq}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)\ (i \geqslant 0).$$

$\mathrm{Ext}_A^{2,*}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ 具有 $\mathbb{Z}_p$-基:

$$\alpha_2,\ a_0^2,\ a_0h_i\ (i > 0),\ g_i\ (i \geqslant 0),\ k_i\ (i \geqslant 0),\ b_i\ (i \geqslant 0), h_ih_j\ (j \geqslant i+2, i \geqslant 0),$$

满足内次数分别为 $2q+1$, 2, p^iq+1, $2p^iq+p^{i+1}q$, $2p^{i+1}+p^iq$, $p^{i+1}q$, p^iq+p^jq, 其中 $q = 2(p-1)$.

Aikawa 借助于 λ-代数计算了 $\mathrm{Ext}_A^{3,*}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$, 具体可参看文 [8].

在文 [9] 中, 利用非平凡的第二 Adams 微分作为几何输入, 即:$\mathrm{d}_2(h_i) = a_0b_{i-1}$ $(p > 2, i > 0)$, Cohen 发现了非平凡元素族 $\xi_i \in \pi_{(p^{i+1}+1)q}S$ $(i \geqslant 0)$.

在本文中, 利用几何方法, 一族新的稳定同伦群中的非平凡元素亦被发掘. 同时, 本文的结果也将文 [10] 中所得主要结果进一步推广. 主要结果如下:

定理 1.2 设 $p \geqslant 7$, $n > 3$, $0 \leqslant s < p-3$, 则

$$0 \neq \widetilde{\gamma}_{s+3}\widetilde{l}_ng_0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+8,p^{n+1}q+2p^nq+(s+3)p^2q+(s+3)pq+(s+3)q+s}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环, 并且收敛到球面稳定同伦群

$$\pi_{p^{n+1}q+2p^nq+(s+3)p^2q+(s+3)pq+(s+3)q-8}S$$

中非平凡元素 $\gamma_{s+3}\sigma_n$.

注 1.1 如上定理 1.2 中所得的新非平凡元素在 π_*S 中是不可分解的, 也即该元素不是 π_*S 中其他低次数元素的复合. 这是因为 $g_0 \in \mathrm{Ext}_A^{2,pq+2q}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ 在 Adams 谱序列中死掉, 即有非零的二阶微分: $\mathrm{d}_2(g_0) = b_0\widetilde{\alpha}_2 \in \mathrm{Ext}_A^{4,pq+2q+1}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$.

注 1.2 结合本文和文 [4] 中的方法, 另一个非平凡元素乘积 $\widetilde{\gamma}_{s+3}g_ng_0$ $(s > p)$ 同样也可被证明是永久循环且收敛到球面稳定同伦群中的非平凡元素.

本文证明中所用的几何输入就是文 [11] 中给出的非平凡的第二 Adams 微分. 接下来, 在 §2 中先给出关于 Ext 群和 May 谱序列 E_1-项的预备知识, 然后会在 §3 中给出主要定理 1.2 的证明.

2 May 谱序列 E_1-项和 Ext 群的预备知识

在本节中, 首先简要介绍关于 May 谱序列的必要预备知识, 这是计算 Adams 谱序列 E_2-项 $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$ 的关键.

由文 [12, 定理3.2.5] 可知, 存在 May 谱序列 $\{E_r^{s,t,*},\mathrm{d}_r\}$ 收敛到 $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$, 其 E_1-项和 May 微分为

$$\begin{aligned}
&E_1^{*,*,*}=E(h_{i,j}\mid i>0,j\geqslant 0)\otimes P(b_{i,j}\mid i>0,j\geqslant 0)\otimes P(a_i\mid i\geqslant 0),\\
&\mathrm{d}_r: E_r^{s,t,M}\to E_r^{s+1,t,M-r}\ (r\geqslant 1),
\end{aligned}$$

其中 $E(\ )$ 表示外代数, $P(\ )$ 表示多项式代数, 并且

$$h_{i,j}\in E_1^{1,2(p^i-1)p^j,2i-1},\ b_{i,j}\in E_1^{2,2(p^i-1)p^{j+1},p(2i-1)},\ a_i\in E_1^{1,2p^i-1,2i+1}.$$

若 $x\in E_r^{s,t,*}$, $y\in E_r^{s',t',*}$, 则 $\mathrm{d}_r(xy)=\mathrm{d}_r(x)y+(-1)^s x\mathrm{d}_r(y)(r\geqslant 1)$, 其中 $xy=(-1)^{ss'+tt'}yx$, $x,y=h_{i,j},b_{i,j}$ 或 a_i. 第一 May 微分由下式给出:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_1(h_{i,j})&=-\sum_{0<k<i}h_{i-k,k+j}h_{k,j},\\
\mathrm{d}_1(a_i)&=-\sum_{0\leqslant k<i}h_{i-k,k}a_k,\\
\mathrm{d}_1(b_{i,j})&=0.
\end{aligned}$$

对于任意元素 $x\in E_1^{s,t,*}$, 定义 $\dim x=s$, $\deg x=t$, 则

$$\begin{cases}
\dim h_{i,j}=\dim a_i=1,\quad \dim b_{i,j}=2;\\
\deg h_{i,j}=2(p^i-1)p^j=(p^{i+j-1}+\cdots+p^j)q;\\
\deg b_{i,j}=2(p^i-1)p^{j+1}=(p^{i+j}+\cdots+p^{j+1})q;\\
\deg a_i=2p^i-1=(p^{i-1}+\cdots+1)q+1;\\
\deg a_0=1,\ \text{其中}\ \ i\geqslant 1,j\geqslant 0.
\end{cases}\tag{2.1}$$

命题 2.1 (见 [13])　设 $t=q(c_np^n+c_{n-1}p^{n-1}+\cdots+c_1p+c_0)+e$ 是正整数, 其中 $0\leqslant c_i<p\ (0\leqslant i\leqslant n-1)$, $0<c_n<p$, $0\leqslant e<q$, s 是正整数且满足 $0<s<p$. 若对于某 $j\ (0\leqslant j\leqslant n)$, 有 $s<c_j$, 则在 May 谱序列中, $E_1^{s,t,*}=0$.

下面将给出一个关于低维 Ext 群的重要结果.

命题 2.2　设 $p\geqslant 7$, $n>3$, $tq=p^{n+1}q+2p^nq$, 则

(1) $\mathrm{Ext}_A^{2,tq+rq-u}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0\quad (r=2,3,4,u=1,2)$,

$\mathrm{Ext}_A^{3,tq+q}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)\cong\mathbb{Z}_p\{h_0g_n\}$,

$\mathrm{Ext}_A^{3,tq+1}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)\cong\mathbb{Z}_p\{a_0g_n\}$,
$\mathrm{Ext}_A^{3,tq-q}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0$,
$\mathrm{Ext}_A^{3,tq+kq+r-1}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0\quad(k=2,3,4,r=0,1)$,
$\mathrm{Ext}_A^{3,tq+kq+r-2}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0\quad(k=1,2,3,r=0,1)$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{4,tq+rq+u}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0\quad(r=2,3,4,\ u=-1,0$ 或 $r=3,4,\ u=1)$,
$\mathrm{Ext}_A^{4,tq+q}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)\cong\mathbb{Z}_p\{h_0\widetilde{l}_n\}$,
$\mathrm{Ext}_A^{4,tq}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0$.

(3) $\mathrm{Ext}_A^{5,tq+rq+1}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0\quad(r=1,3,4)$,
$\mathrm{Ext}_A^{5,tq+rq}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0\ (r=2,3)$,
$\mathrm{Ext}_A^{5,tq+2q+1}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)\cong\mathbb{Z}_p\{\widetilde{\alpha}_2\widetilde{l}_n\}$,
$\mathrm{Ext}_A^{5,tq+2}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)\cong\mathbb{Z}_p\{a_0^2\widetilde{l}_n\}$,
$\mathrm{Ext}_A^{5,tq+1}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0$.

证 (1) 结合文 [7] 和文 [8], 利用 $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$ $(s=1,2,3)$ 的 $\mathbb{Z}_p$-基, 结论 (1) 易证明.

(2) 在模 $p^{n+1}q$ 意义下, 考虑 May 谱序列 E_1-项生成元的第二次数, 其中 $0\leqslant j\leqslant n+1$.

$$\begin{aligned}\deg\ h_{s,j}&=(p^{s+j-1}+\cdots+p^j)q\ (\mathrm{mod}\ p^{n+1}q),\quad 0\leqslant j<s+j-1<n+1,\\&=(p^n+\cdots+p^j)q\ (\mathrm{mod}\ p^{n+1}q),\quad 0\leqslant j<s+j-1=n+1;\\ \deg\ b_{s,j-1}&=(p^{s+j-1}+\cdots+p^j)q\ (\mathrm{mod}\ p^{n+1}q),\quad 1\leqslant j<s+j-1<n+1,\\&=(p^n+\cdots+p^j)q\ (\mathrm{mod}\ p^{n+1}q),\quad 1\leqslant j<s+j-1=n+1;\\ \deg\ a_{j+1}&=(p^j+\cdots+1)q+1\ (\mathrm{mod}\ p^{n+1}q),\quad 0\leqslant j<n+1,\\&=(p^n+\cdots+1)q+1\ (\mathrm{mod}\ p^{n+1}q),\quad j=n+1.\end{aligned}$$

对于 $m=tq+rq+u\ (0\leqslant r\leqslant 4,-1\leqslant u\leqslant 2)=2p^nq+rq+u\ (\mathrm{mod}\ p^{n+1}q)$, 排除掉那些第二次数不小于 $tq+pq$ 的因子, 可得到 $E_1^{w,tq+rq+u,*}(4\leqslant w\leqslant 5)$ 的生成元中可能的因子为 $a_0,\ a_1,\ h_{1,0},\ h_{1,n+1},\ h_{1,n},\ h_{2,n},\ b_{1,n},\ b_{1,n-1},\ b_{2,n-1}$.

因此, 由次数可知

$$\begin{aligned}E_1^{4,tq+rq+u,*}&=0\ (r=3,4,u=1);\\E_1^{4,tq+rq+u,*}&=0\ (r=2,3,4,u=-1,0);\\E_1^{4,tq,*}&=\mathbb{Z}_p\{b_{1,n-1}b_{2,n-1}\};\\E_1^{4,tq+q,*}&=\mathbb{Z}_p\{h_{1,0}h_{1,n}b_{2,n-1},\ h_{2,n}b_{1,n-1}h_{1,0}\}.\end{aligned}$$

在 May 谱序列中, 由于 $\mathrm{d}_1(b_{1,n-1}h_{2,n}h_{1,0})\neq 0$, 则 $E_r^{4,tq+q}=\mathbb{Z}_p\{b_{2,n-1}h_{1,n}h_{1,0}\}$ $(r\geqslant 2)$. 而且, 在 May 谱序列中 $h_{2,n}h_{1,n}h_{1,0}$ 是永久循环且收敛到 $h_0g_n\in\mathrm{Ext}_A^{3,*}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$, 于是 $\mathrm{d}_r(E_r^{3,tq+q,*})=0\ (r\geqslant 1)$, 所以 $b_{2,n-1}h_{1,n}h_{1,0}$ 不是 d_r-边缘, 且非平凡地收敛到 $h_0\widetilde{l}_n$.

另外, $\mathrm{Ext}_A^{4,tq}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0$, 这是因为 $E_1^{4,tq,*}=\mathbb{Z}_p\{b_{1,n-1}b_{2,n-1}\}$, 其中 $b_{1,n-1}$ 收敛到

b_{n-1}, 而在 $\mathrm{Ext}_A^{2,*}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$ 中, 不存在与 $b_{2,n-1}\in E_1^{2,p^{n+1}q+p^nq,*}$ 相关的元素.

(3) 与上类似, 由于次数的原因, 易有如下结果:

$$
\begin{aligned}
E_1^{5,tq+q+1,*}&=\mathbb{Z}_p\{a_1b_{1,n-1}b_{2,n-1},\ a_0h_{1,0}h_{2,n}b_{1,n-1},\ a_0h_{1,0}b_{2,n-1}h_{1,n}\};\\
E_1^{5,tq+rq+1,*}&=0\ (r=3,4);\\
E_1^{5,tq+rq,*}&=0\ (r=2,3);\\
E_1^{5,tq+2q+1,*}&=\mathbb{Z}_p\{a_1h_{1,0}b_{2,n-1}h_{1,n},\ h_{2,n}b_{1,n-1}h_{1,0}a_1\};\\
E_1^{5,tq+2,*}&=\mathbb{Z}_p\{a_0^2h_{1,n}b_{2,n-1},\ a_0^2h_{2,n}b_{1,n-1}\};\\
E_1^{5,tq+1,*}&=\mathbb{Z}_p\{a_0b_{1,n-1}b_{2,n-1},\ a_0h_{1,n-1}h_{1,n}h_{1,n+1}\}.
\end{aligned}
$$

在 May 谱序列中, 由于以下微分的非平凡性,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_1(a_1b_{1,n-1}b_{2,n-1})&=-a_0h_{1,0}b_{1,n-1}b_{2,n-1}\neq 0,\\
a_0h_{1,0}h_{2,n}b_{1,n-1}&=-\mathrm{d}_1(a_1h_{2,n}b_{1,n-1}),\\
a_0h_{1,0}b_{2,n-1}h_{1,n}&=-\mathrm{d}_1(a_1h_{2,n-1}h_{1,n}),
\end{aligned}
$$

$E_1^{5,tq+q+1,*}$ 的生成元都不会留存到 Adams 谱序列的 E_2-项, 因此 $\mathrm{Ext}_A^{5,tq+q+1}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0$. 另外, 与 (1) 中证明类似, 可知 $\mathrm{d}_rE_r^{4,tq+2,*}=0$. 因此 $E_1^{5,tq+2,*}$ 的生成元在 May 谱序列中收敛到 $a_0^2\widetilde{l}_n$.

由于 $\mathrm{d}_1(h_{2,n}b_{1,n-1}h_{1,0}a_1)\neq 0$, 则 $E_r^{5,tq+2q+1}=\mathbb{Z}_p\{b_{2,n-1}h_{1,n}h_{1,0}a_1\}(r\geqslant 2)$. 而且, $h_{2,n}h_{1,n}h_{1,0}a_1$ 在 May 谱序列中是永久循环且收敛到 $\widetilde{\alpha}_2g_n$ (注意到 $a_1h_{1,0}$ 在 May 谱序列中是永久循环且收敛到 $\widetilde{\alpha}_2\in\mathrm{Ext}_A^{*,*}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$), 于是 $\mathrm{d}_r(E_r^{4,tq+2q+1})=0(r\geqslant 1)$. 因此, $b_{2,n-1}h_{1,n}h_{1,0}a_1$ 不是 d_r-边缘, 且非平凡地收敛到 $\widetilde{\alpha}_2\widetilde{l}_n$.

由于 a_0, $b_{1,n-1}$, $h_{1,n}$, $h_{1,n+1}$ 在 May 谱序列中都是永久循环, 且分别收敛到 a_0, b_{n-1}, h_n, h_{n+1}, 易得 $a_0b_{1,n-1}h_{1,n}h_{1,n+1}$ 在 May 谱序列中是永久循环且收敛到 $a_0b_{n-1}h_nh_{n+1}=0$. 而由文献 [7] 可知 $\mathrm{d}_{2p-1}(b_{2,n-1})=b_{1,n}h_{1,n}-b_{1,n-1}h_{1,n+1}$, 于是 $\mathrm{d}_{2p-1}(a_0b_{2,n-1}b_{1,n-1})\neq 0$, 因此 $\mathrm{Ext}_A^{5,tq+1}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=0$.

命题 2.3　设 $p\geqslant 7$, $n>3$, $0\leqslant s<p-3$, $r\geqslant 1$, 则 May 谱序列 E_1-项

$$
E_1^{s+8-r,t+1-r,*}=\begin{cases}\mathbb{Z}_p\{h_{2,n}h_{1,n}a_3^sh_{3,0}h_{2,0}h_{1,0}h_{1,2}h_{2,1}\}, & r=1;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}
$$

其中 $t=p^{n+1}q+2p^nq+(s+3)p^2q+(s+3)pq+(s+3)q+s$.

证　当 $r\geqslant s+2$, 易证明 May 谱序列 E_1-项 $E_1^{s+8-r,t+1-r,*}=0$. 以下不妨假定 $1\leqslant r<s+2$.

考虑 $h=x_1x_2\cdots x_m\in E_1^{s+8-r,t+1-r,*}$, 其中 x_i 是 a_k, $h_{i,j}$, $b_{u,z}$ 中的任意一元素, $0\leqslant k\leqslant n+2$, $1\leqslant i+j\leqslant n+2$, $1\leqslant u+z\leqslant n+1$, $z,j,k\geqslant 0,i,u>0$. 假定

$$
\deg x_i=q(c_{i,n+1}p^{n+1}+c_{i,n}p^n+\cdots+c_{i,1}p+c_{i,0})+e_i,
$$

其中 $c_{i,j}=0$ 或 1, 若 $x_i=a_{k_i}$, 则 $e_i=1$, 否则 $e_i=0$. 于是可得

$$\begin{aligned}\deg h&=\sum_{i=1}^{m}\deg x_i\\&=q\Big(\Big(\sum_{i=1}^{m}c_{i,n+1}\Big)p^{n+1}+\cdots+\Big(\sum_{i=1}^{m}c_{i,2}\Big)p^2+\Big(\sum_{i=1}^{m}c_{i,1}\Big)p+\Big(\sum_{i=1}^{m}c_{i,0}\Big)\Big)+\Big(\sum_{i=1}^{m}e_i\Big)\\&=q(p^{n+1}+2p^n+(s+3)p^2+(s+3)p+(s+3))+s+1-r,\\\dim h&=\sum_{i=1}^{m}\dim x_i=s+8-r.\end{aligned}$$

注意到 $\dim h_{i,j}=\dim a_i=1,\ \dim b_{i,j}=2,\ 1\leqslant r<s+2$ 且 $0\leqslant s<p-3$, 由

$$\dim h=\sum_{i=1}^{m}\dim x_i=s+8-r,$$

于是有 $m\leqslant s+8-r<p+5-r\leqslant p+4$.

由 $e_i=0$ 或 $e_i=1$, 易得不等式 $\sum\limits_{i=1}^{m}e_i\leqslant m\leqslant p+3$. 我们可推断 $s+1-r\geqslant 0$. 否则, 利用 $1\leqslant r<s+2$ 和 $p\geqslant 7$, 可得如下不等式

$$\sum_{i=1}^{m}e_i=q+(s+1-r)>q-1=2p-2-1=2p-3>p+3,$$

这与 $\sum\limits_{i=1}^{m}e_i\leqslant m\leqslant p+3$ 矛盾.

利用 $0\leqslant s+3, s+1-r<p$ 和 p-进制展开, 可有

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}e_i=s+1-r;\\\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,0}=s+3;\\\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,1}=s+3;\\\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,2}=s+3;\\\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,3}=\lambda_3p;\end{cases}\qquad\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,4}+\lambda_3=\lambda_4p;\\\qquad\vdots\\\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n-1}+\lambda_{n-2}=\lambda_{n-1}p;\\\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n}+\lambda_{n-1}=2+\lambda_np;\\\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n+1}+\lambda_n=1,\end{cases}\tag{2.2}$$

其中 $\lambda_j\geqslant 0, 3\leqslant j\leqslant n$.

考虑第五个等式 $\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,3}=\lambda_3p$, 由于 $c_{i,3}=0$ 或 1, 并且 $m\leqslant p+3$, 易得 $\lambda_3=0$ 或 1.

情形 1 $\lambda_3=0$.

断言 $\lambda_4=0$. 如果 $\lambda_4=1$, 可有如下的等式

$$\sum_{i=1}^{m}c_{i,2}=s+3,\quad\sum_{i=1}^{m}c_{i,3}=0,\quad\sum_{i=1}^{m}c_{i,4}=p.$$

由 $\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,2}=s+3$ 和 (2.1) 式, h 中将有 $s+3$ 个因子满足

$$\deg x_i=q(p\text{ 的高次幂项}+p^2+p\text{ 的低次幂项})+\delta_i\ (\delta_i=0\text{ 或 }1).$$

同理, 由 $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,4}=p$ 和 (2.1) 式, h 中有 p 个因子满足

$$\deg x_i = q(p \text{ 的高次幂项} + p^4 + p \text{ 的低次幂项}) + \delta_i \ (\delta_i = 0 \text{ 或 } 1).$$

因此, 由 $m \leqslant p+3$ 和 (2.1) 式, h 中至少有 $p+s+3-(p+3)=s$ 个因子满足

$$\deg x_i = q(p \text{ 的高次幂项} + p^4 + p^3 + p^2 + p + p \text{ 的低次幂项}) + \delta_i \ (\delta_i = 0 \text{ 或 } 1).$$

于是, $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,3} \geqslant s$, 这与 $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,3}=0$ 矛盾. 断言得证.

对 j 进行归纳假设, 可得 $\lambda_j=0$ $(3 \leqslant j \leqslant n-1)$.

注意到 $\lambda_{n-1}=0$, 可得 $\lambda_n=0$ 或 $\lambda_n=1$. 如果 $\lambda_n=1$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,n}=p+2$, $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,n+1}=0$, 于是 $h=h_{1,n}^{p+2}h'$ 或 $h=b_{1,n-1}^{p+2}h'$. 由于 $h=h_{1,n}^{p+2}=0$ 和 $b_{1,n-1}^{p+2} \in E_1^{2(p+2),*,*}=0$, 所以 h 不存在.

如果 $\lambda_n=0$, 也即 $\lambda_j=0(3 \leqslant j \leqslant n)$, 则有

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} e_i = s+1-r; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,0} = s+3; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,1} = s+3; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,2} = s+3; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,3} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,4} = 0; \\ \qquad \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,n-1} = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,n} = 2; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,n+1} = 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

因此

$$\begin{array}{llll} b_{1,n}b_{1,n-1}h_{1,n}, & h_{2,n}h_{1,n}, & h_{2,n}b_{1,n-1}, & b_{2,n-1}h_{1,n}, \\ b_{1,n-1}b_{2,n-1}, & b_{1,n}b_{1,n-1}^2, & h_{1,n+1}b_{1,n-1}^2, & h_{1,n+1}h_{1,n}b_{1,n-1} \end{array}$$

是 h 中可能包含的元素. 由 $E_1^{*,*,*}$ 的交换性, 可有如下表示:

$$\begin{array}{ll} h_1 = x_1x_2\cdots x_{m-3}b_{1,n}h_{1,n}b_{1,n-1}, & h_1' = x_1x_2\cdots x_{m-3} \in E_1^{s+3-r,t(r),*}, \\ h_2 = x_1x_2\cdots x_{m-3}b_{1,n}b_{1,n-1}^2, & h_2' = x_1x_2\cdots x_{m-3} \in E_1^{s+2-r,t(r),*}, \\ h_3 = x_1x_2\cdots x_{m-3}h_{1,n+1}b_{1,n-1}^2, & h_3' = x_1x_2\cdots x_{m-3} \in E_1^{s+3-r,t(r),*}, \\ h_4 = x_1x_2\cdots x_{m-2}h_{2,n}h_{1,n}, & h_4' = x_1x_2\cdots x_{m-2} \in E_1^{s+6-r,t(r),*}, \\ h_5 = x_1x_2\cdots x_{m-2}h_{2,n}b_{1,n-1}, & h_5' = x_1x_2\cdots x_{m-2} \in E_1^{s+5-r,t(r),*}, \\ h_6 = x_1x_2\cdots x_{m-2}b_{2,n-1}h_{1,n}, & h_6' = x_1x_2\cdots x_{m-2} \in E_1^{s+5-r,t(r),*}, \\ h_7 = x_1x_2\cdots x_{m-2}b_{2,n-1}b_{1,n-1}, & h_7' = x_1x_2\cdots x_{m-2} \in E_1^{s+4-r,t(r),*}, \\ h_8 = x_1x_2\cdots x_{m-3}h_{1,n+1}h_{1,n}b_{1,n-1}, & h_8' = x_1x_2\cdots x_{m-3} \in E_1^{s+4-r,t(r),*}, \end{array}$$

其中 $t(r)=(s+3)p^2q+(s+3)pq+(s+3)q+s+1-r$.

考虑到 h_1' 的次数, 由 $s+3-r<\sum\limits_{i=1}^{m-3} c_{i,2}=s+3$ 和命题 2.1, 可得 h_1' 不存在. 同理, h_2' 和 h_3' 也不可能存在.

对于 h_5', h_6', h_7' 和 h_8', 不存在任何生成元.

对于 h'_4, 当 $r=1$ 时, 可能的唯一生成元是 $a_3^s h_{3,0}h_{2,0}h_{1,0}h_{1,2}h_{2,1}$. 因此

$$h=h_{2,n}h_{1,n}a_3^s h_{3,0}h_{2,0}h_{1,0}h_{1,2}h_{2,1}.$$

情形 2 $\lambda_3=1$.

若 $r\geqslant 5$, 则可有 $m\leqslant s+8-r<p+5-r\leqslant p$. 由 $\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,3}=\lambda_3 p$, 易看出 λ_3 不可能等于 1. 因此, 在此情形 2 的其余讨论中, 假定 $r\leqslant 4$. 由 $\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,4}+1=\lambda_4 p$ 和 $0\leqslant\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,4}\leqslant m\leqslant p+3$, 可得出 $\lambda_4=1$. 对 j 做归纳假设, 可得 $\lambda_j=1(4\leqslant j\leqslant n-1)$.

注意到 $\lambda_{n-1}=1$, 可得 $\lambda_n=0$ 或者 $\lambda_n=1$. 若 $\lambda_n=0$, 可有

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}e_i=s+1-r;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,0}=s+3;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,1}=s+3;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,2}=s+3;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,3}=p;\end{cases}\qquad\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,4}=p-1;\\ \qquad\vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n-1}=p-1;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n}=1;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n+1}=1.\end{cases}\tag{2.4}$$

若 $\lambda_n=1$, 可得

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}e_i=s+1-r;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,0}=s+3;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,1}=s+3;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,2}=s+3;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,3}=p;\end{cases}\qquad\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,4}=p-1;\\ \qquad\vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n-1}=p-1;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n}=p+1;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n+1}=0.\end{cases}\tag{2.5}$$

情形 2.1 由 (2.4) 式中的等式 $\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,3}=p$, 和 $c_{i,3}=0$ 或 1, 可得 $m\geqslant p$. 注意到 $m\leqslant s+7$, 于是 $s\geqslant p-7$. 由 $0\leqslant s<p-3$, s 等于 $p-7$, $p-6$, $p-5$ 或 $p-4$.

情形 2.1.1 当 $s=p-7$ 时, 有

$$h=x_1x_2\cdots x_m\in E_1^{p+1-r,p^{n+1}q+2p^nq+(p-4)p^2q+(p-4)pq+(p-4)q+p-6-r,*},$$

且 $m=p$. 由等式 $\sum\limits_{i=1}^{m}e_i=p-6-r$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n-1}=p-1$, 可知 h 的生成元一定具有如下的形式

$$h=a_n^{p-6-r}x_{p-5-r}\cdots x_p.$$

此时, r 必定等于 1. 于是, $h=a_n^{p-7}x_{p-6}\cdots x_p$, 其中

$$h'=x_{p-6}\cdots x_p\in E_1^{7,p^{n+1}q+p^nq+6p^{n-1}q+\cdots+6p^4q+7p^3q+3p^2q+3pq+3q,*}=0.$$

因此, h 的生成元不可能存在.

情形 2.1.2 当 $s=p-6$ 时,

$$h=x_1x_2\cdots x_m\in E_1^{p+2-r,p^{n+1}q+2p^nq+(p-3)p^2q+(p-3)pq+(p-3)q+p-5-r,*},$$

m 可能取值为 p 或 $p+1$. 由 $\sum\limits_{i=1}^{m}e_i=p-5-r$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n-1}=p-1$, 可看出

$$h_k=a_n^{p-5-r}x_{p-4-r}\cdots x_{p+k-1},\ \text{其中}\ k=1\ \text{或}\ 2.$$

于是 $h'_k=x_{p-4-r}\cdots x_{p+k-1}\in E_1^{7,t(r),*}$, 其中

$$t(r)=p^{n+1}q+p^nq+(4+r)p^{n-1}q+\cdots+(4+r)p^4q+(5+r)p^3q+(2+r)p^2q+(2+r)pq+(2+r)q.$$

具体如表 1 所示:

表 1

m	r	h'_k
p	$1,2$	$h'_1=0$
$p+1$	1	$h'_2=0$

因此, 生成元 h 不可能存在.

情形 2.1.3 当 $s=p-5$ 时,

$$h=x_1x_2\cdots x_m\in E_1^{p+3-r,p^{n+1}q+2p^nq+(p-2)p^2q+(p-2)pq+(p-2)q+p-4-r,*},$$

m 可能取值为 p, $p+1$ 或者 $p+2$. 由 $\sum\limits_{i=1}^{m}e_i=p-4-r$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,n-1}=p-1$, 可看出

$$h_k=a_n^{p-4-r}x_{p-3-r}\cdots x_{p+k-1},\ \text{其中}\ k=1,\ 2\ \text{或}\ 3.$$

于是 $h'_k=x_{p-3-r}\cdots x_{p+k-1}\in E_1^{7,t(r),*}$, 其中

$$t(r)=p^{n+1}q+p^nq+(3+r)p^{n-1}q+\cdots+(3+r)p^4q+(4+r)p^3q+(2+r)p^2q+(2+r)pq+(2+r)q.$$

具体如表 2 所示:

表 2

m	r	h'_k
p	$1,2,3$	$h'_1=0$
$p+1$	$1,2$	$h'_2=0$
$p+2$	1	$h'_3=0$

因此, 此种情形生成元 h 不可能存在.

情形 2.1.4 当 $s=p-4$ 时,

$$h=x_1x_2\cdots x_m\in E_1^{p+4-r,p^{n+1}q+2p^nq+(p-1)p^2q+(p-1)pq+(p-1)q+p-3-r,*},$$

m 可能取值为 $p, p+1, p+2$ 或 $p+3$. 由 $\sum\limits_{i=1}^{m} e_i = p-3-r$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,n-1} = p-1$, 可看出

$$h_k = a_n^{p-3-r} x_{p-2-r} \cdots x_{p+k-1}, \text{ 其中 } k = 1,\ 2,\ 3 \text{ 或 } 4.$$

于是 $h'_k = x_{p-2-r} \cdots x_{p+k-1} \in E_1^{7,t(r),*}$, 其中

$t(r) = p^{n+1}q + p^n q + (2+r)p^{n-1}q + \cdots + (2+r)p^4 q + (3+r)p^3 q + (2+r)p^2 q + (2+r)pq + (2+r)q.$

具体如表 3 所示:

表 3

m	r	h'_k
p	$1,2,3,4$	$h'_1 = 0$
$p+1$	$1,2,3$	$h'_2 = 0$
$p+2$	$1,2$	$h'_3 = 0$
$p+3$	1	$h'_4 = 0$

因此, 生成元 h 不可能存在.

情形 2.2 由 (2.5) 式中的等式 $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,n} = p+1$, 可得 $m \geqslant p+1$. 注意到 $m \leqslant s+7$, 因此 $s \geqslant p-6$. 又 $0 \leqslant s < p-3$, 故 s 可能为 $p-6, p-5$ 或 $p-4$.

情形 2.2.1 当 $s = p-6$ 时,

$$h = x_1 x_2 \cdots x_m \in E_1^{p+2-r, p^{n+1}q + 2p^n q + (p-3)p^2 q + (p-3)pq + (p-3)q + p-5-r, *},$$

m 为 $p+1$. 由 $\sum\limits_{i=1}^{m} e_i = p-5-r$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,n} = p+1$, 可看出

$$h = a_{n+1}^{p-5-r} x_{p-4-r} \cdots x_{p+1}.$$

此时, r 必等于 1. 于是有

$$h = a_{n+1}^{p-6} x_{p-5} \cdots x_{p+1},$$

因此 $h' = x_{p-5} \cdots x_{p+1} \in E_1^{7,t,*} = 0$, 其中 $t = 7p^n q + 5p^{n-1}q + \cdots + 5p^4 q + 5p^3 q + 5p^2 q + 5pq + 5q$.

因此生成元 h 不可能存在.

情形 2.2.2 当 $s = p-5$ 时,

$$h = x_1 x_2 \cdots x_m \in E_1^{p+3-r, p^{n+1}q + 2p^n q + (p-2)p^2 q + (p-2)pq + (p-2)q + p-4-r, *},$$

m 可等于 $p+1$ 或 $p+2$. 由 $\sum\limits_{i=1}^{m} e_i = p-4-r$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,n} = p+1$, 可看出

$$h_k = a_{n+1}^{p-4-r} x_{p-3-r} \cdots x_{p+k}, \text{ 其中 } k = 1 \text{ 或 } 2.$$

于是 $h'_k = x_{p-3-r} \cdots x_{p+k} \in E_1^{7,t(r),*}$, 其中

$t(r) = (5+r)p^n q + (3+r)p^{n-1}q + \cdots + (3+r)p^4 q + (4+r)p^3 q + (2+r)p^2 q + (2+r)pq + (2+r)q.$

具体如表 4 所示:

表 4

m	r	h'_k
$p+1$	$1,2$	$h'_1=0$
$p+2$	1	$h'_2=0$

因此, 生成元 h 不存在.

情形 2.2.3 当 $s=p-4$ 时,

$$h=x_1x_2\cdots x_m\in E_1^{p+4-r,p^{n+1}q+2p^nq+(p-1)p^2q+(p-1)pq+(p-1)q+p-3-r,*},$$

m 可能等于 $p+1$, $p+2$ 或 $p+3$. 由

$$\sum_{i=1}^m e_i=p-3-r$$

和

$$\sum_{i=1}^m c_{i,n}=p+1,$$

可看出

$$h_k=a_{n+1}^{p-3-r}x_{p-2-r}\cdots x_{p+k}, \text{ 其中 } k=1,\ 2 \text{ 或 } 3.$$

于是 $h'_k=x_{p-2-r}\cdots x_{p+k}\in E_1^{7,t(r),*}$, 其中

$$t(r)=(4+r)p^nq+(2+r)p^{n-1}q+\cdots+(2+r)p^4q+(3+r)p^3q+(2+r)p^2q+(2+r)pq+(2+r)q.$$

具体如表 5 所示:

表 5

m	r	h'_k
$p+1$	$1,2,3$	$h'_1=0$
$p+2$	$1,2$	$h'_2=0$
$p+3$	1	$h'_3=0$

因此生成元 h 不可能存在.

综合情形 1 和情形 2 可看出, 本命题成立.

命题 2.4 设 $p\geqslant 7$, $n>3$, $0\leqslant s<p-3$, 有非平凡的乘积

$$0\neq\widetilde{\gamma}_{s+3}\widetilde{l}_ng_0\in\mathrm{Ext}_A^{s+8,t}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p),$$

其中 $t=p^{n+1}q+2p^nq+(s+3)p^2q+(s+3)pq+(s+3)q+s$.

证 已知 $b_{2,n-1}h_{1,n}, h_{2,0}h_{1,0}$ 和 $a_3^sh_{3,0}h_{2,1}h_{1,2}\in E_1^{*,*,*}$ 在 May 谱序列里都是永久循环, 并且分别收敛到 $\widetilde{l}_n$, g_0 和 $\widetilde{\gamma}_{s+3}\in\mathrm{Ext}_A^{*,*}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$. 因此

$$a_3^sh_{3,0}h_{2,1}h_{1,2}b_{2,n-1}h_{1,n}h_{2,0}h_{1,0}\in E_1^{s+8,t,*}$$

在 May 谱序列里是永久循环, 且收敛到 $\widetilde{\gamma}_{s+3}\widetilde{l}_n g_0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+8,t}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$.

由命题 2.3,

$$E_1^{s+7,t,*} = \{h_{2,n}h_{1,n}a_3^s h_{3,0}h_{2,0}h_{1,0}h_{1,2}h_{2,1}\},$$
$$E_1^{s+8-r,t,*} = 0, \text{ 当 } r \geqslant 2.$$

但是 $\mathrm{d}_1(h_{2,n}h_{1,n}a_3^s h_{3,0}h_{2,0}h_{1,0}h_{1,2}h_{2,1}) = 0$, 由上面结果可知 $a_3^s h_{3,0}h_{2,1}h_{1,2}b_{2,n-1}h_{1,n}h_{2,0}h_{1,0}$ 在 May 谱序列里不是 d_r-边缘, 且非平凡地收敛到 $\widetilde{\gamma}_{s+3}\widetilde{l}_n g_0$. 因此

$$0 \neq \widetilde{\gamma}_{s+3}\widetilde{l}_n g_0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+8,p^{n+1}q+2p^nq+(s+3)p^2q+(s+3)pq+(s+3)q+s}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p).$$

命题 2.5 设 $p \geqslant 7$, $n > 3$, $0 \leqslant s < p-3$, $2 \leqslant r \leqslant s+8$, 则

$$\mathrm{Ext}_A^{s+8-r,p^{n+1}q+2p^nq+(s+3)p^2q+(s+3)pq+(s+3)q+s-r+1}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p) = 0.$$

证 由命题 2.3 可得 $E_1^{s+8-r,t+1-r,*} = 0$, 其中

$$t = p^{n+1}q + 2p^nq + (s+3)p^2q + (s+3)pq + (s+3)q + s.$$

利用 May 谱序列可知该命题成立.

3 主要定理 1.2 的证明

定理 1.2 的证明 由文 [14, 定理1.1], 在 Adams 谱序列中存在非平凡的微分

$$\mathrm{d}_2(g_n) = a_0\widetilde{l}_n \in \mathrm{Ext}_A^{4,p^{n+1}q+2p^nq+1}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p),\ n \geqslant 1,$$

元素 g_n 和 $\widetilde{l}_n$ 被称为 a_0-相关元素. 由文 [15] 中定理 B′ 和命题 2.2, 可知

$$i'_*i_*(g_0\widetilde{l}_n) \in \mathrm{Ext}_A^{5,p^{n+1}q+2p^nq+pq+2q}(H^*V(1),\mathbb{Z}_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环且收敛到非平凡元素

$$i'i\sigma_n \in \pi_{p^{n+1}q+2p^nq+pq+2q-5}V(1).$$

设 $f = \gamma_{s+3}\sigma_n$ 为下列复合映射:

$$f: \Sigma^{p^{n+1}+2p^nq+pq+2q-5}S \xrightarrow{i'i\sigma_n} V(1) \xrightarrow{\bar{i}} V(2) \xrightarrow{\gamma^{s+3}} \Sigma^{-(s+3)(p^2+p+1)q}V(2)$$
$$\xrightarrow{jj'\bar{j}} \Sigma^{-(s+3)(p^2+p+1)q+(p+1)q+q+3}S.$$

由于 $i'i\sigma_n$ 在 Adams 谱序列中由 $i'_*i_*(g_0\widetilde{l}_n) \in \mathrm{Ext}_A^{5,p^{n+1}q+2p^nq+pq+2q}(H^*V(1),\mathbb{Z}_p)$ 表示, 于是上面的 f 在 Adams 谱序列中可由

$$\widetilde{f} = (jj'\bar{j})_*(\gamma^{s+3})_*(\bar{i}i'i)_*(\widetilde{l}_n g_0) = (jj'\bar{j}\gamma^{s+3}\bar{i}i'i)_*(\widetilde{l}_n g_0)$$

表示. 进一步, 已知 $\gamma_{s+3} = jj'\bar{j}\gamma^{s+3}\bar{i}i'i \in \pi_*S$ 在 Adams 谱序列中由 $\widetilde{\gamma}_{s+3}$ 表示, 利用 Yoneda 乘积可知, 复合映射

$$\mathrm{Ext}_A^{0,0}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{(\bar{i}i'i)_*} \mathrm{Ext}_A^{0,0}(H^*V(2),\mathbb{Z}_p)$$

$$\xrightarrow{(jj'\overline{j})_*(\gamma^{s+3})_*} \mathrm{Ext}_A^{s+3,((s+3)p^2+(s+2)p+(s+1))q+s}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$$

就是乘以 $\widetilde{\gamma}_{s+3}\in \mathrm{Ext}_A^{s+3,((s+3)p^2+(s+2)p+(s+1))q+s}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$ 的乘法运算. 而且由命题 2.4 知, 在 Adams 谱序列中如上的 f 可由

$$0\neq \widetilde{f}=\widetilde{\gamma}_{s+3}\widetilde{l}_n g_0\in \mathrm{Ext}_A^{s+8,p^{n+1}q+2p^nq+(s+3)p^2q+(s+3)pq+(s+3)q+s}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$$

来表示.

由命题 2.5, $\widetilde{\gamma}_{s+3}\widetilde{l}_n g_0$ 在 Adams 谱序列中不是任何元素微分的像, 即不是微分的边缘, 于是 $\widetilde{\gamma}_{s+3}\widetilde{l}_n g_0$ 会留存到非平凡元素 $f=\gamma_{s+3}\sigma_n\in\pi_*S$. 定理 1.2 证毕.

参　考　文　献

[1] Serre J P. Groupes d′ homotopie et classes de groupes abeliens [J]. *Ann of Math*, 1953, 58:258–294.

[2] 王玉玉, 王健波. 球面稳定同伦群中的 ξ_n 相关元素的非平凡性 [J]. 数学年刊 A 辑, 2014, 35(5):575–582.

[3] Wang Yuyu. The nontrivility of ζ_n-related elements in the stable homotopy groups of sphere [J]. *Math Scan*, 2015, 117:304–319.

[4] Zhong Linan, Wang Yuyu. Detection of a nontrivial product in the stable homotopy groups of spheres [J]. *Algebr Geom Topol*, 2013, 13:3009–3029.

[5] Smith L. On realizing complex bordism modules applications to the stable homotopy of spheres [J]. *Amer J Math*, 1970, 92:793–856.

[6] 王向军, 郑弃冰. Adams 谱序列中 $\widetilde{\alpha}_s^{(n)}h_0h_k$ 的收敛性 [J]. 中国科学 A 辑, 1998, 41:400–406.

[7] Liulevicius A. The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations [J]. *Mem Amer Math Soc*, 1962, 42:112–114.

[8] Aikawa T. 3-Dimensional cohomology of the mod p Steenrod algebra [J]. *Math Scand*, 1980, 47:91–115.

[9] Cohen R L. Odd primary infinite families in the stable homotopy theory [J]. *Mem Amer Math Soc*, 1981, 242.

[10] 王玉玉. 球面稳定同伦群的 $\widetilde{\gamma}_t\widetilde{l}_1g_0$ 新元素族 [J]. 数学年刊 A 辑, 2007, 28(6):853–862.

[11] 赵浩, 王向军. Adams 谱序列中的两个非平凡微分 [J]. 数学年刊 A 辑, 2008, 29(4):557–566.

[12] Ravenel D C. Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres [M]. Orlando: Academic Press, 1986.

[13] Wang Yuyu. A new familiy of filtration $s + 5$ in the stable homotopy groups of spheres [J]. *Acta Math Sci Ser B*, 2008, 28:321–332.

[14] Toda H. On spectra realizing exterior parts of the Steenrod algebra [J]. *Topology*, 1971, 10:53–65.

[15] 林金坤. Adams 谱序列和球面稳定同伦群 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

The Nontriviality of the σ-Related Homotopy Element

WANG Yuyu[1]

[1]College of Mathematical Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China. E-mail: wdoubleyu@aliyun.com

Abstract In this paper, by geometric method, the σ-related homotopy element, which is represented by $\widetilde{\gamma}_{s+3}\widetilde{l}_n g_0$ in the E_2-term of the Adams spectral sequence, will be proved to be nontrivial in the stable homotopy groups of spheres $\pi_m S$ with $m = p^{n+1}q + 2p^n q + (s+3)p^2 q + (s+3)pq + (s+3)q - 8$, where $p \geqslant 7$ is an odd prime, $n > 3$, $0 \leqslant s < p - 3$, and $q = 2(p-1)$.

Keywords Stable homotopy groups of spheres, Sphere spectrum, Adams spectral sequence, May spectral sequence

2000 MR Subject Classification 55Q45

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 39 No. 3, 2018

by ALLERTON PRESS, INC., USA