数 学 年 刊 A 辑
2018, 39(3):331–340
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2018.0028

由特殊箭图诱导的项链李子代数*

余德民[1] 卢才辉[2]

提要 无限维项链李代数是新的一类无限维李代数, 本文重点讨论了由特殊箭图诱导的项链李子代数, 并证明了其中一些李子代数是半单李代数.

关键词 项链李代数、半单李代数、子代数
MR (2000) 主题分类 17B05, 17B40, 17B65
中图法分类 O152.5
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2018)03-0331-10

1 引 言

$\mathbb{Z}$ 为整数集合, $\mathbb{C}$ 为复数域, 项链李代数是新的一类复数域 $\mathbb{C}$ 上的无限维李代数. 在非交换几何的研究中, 当探讨 Weyl 代数 $A_1(\mathbb{C})$ 的 $\mathbb{C}$-代数自同构群 $\mathrm{Aut}\,A_1(\mathbb{C})$ 在轨道 Weyl_n 上的作用时, 得到一个 $\mathrm{Aut}\,A_1(\mathbb{C})$ 在 $n\times n$ 矩阵轨道空间 Calo_n 上的可迁作用, 但是此作用是不可微的从而是非代数的. Berest 和 Wilson 提出是否可将 Calo_n 等同于某种无限维李代数的余伴随轨道. Lothaire 和 Reutenauer[1−2]都曾用项链词刻画自由李代数的基, 试图解决 Berest 和 Wilson 提出的问题, 但都没有成功, Ginzburg[3]和 Le Bruyn[4]分别引入了项链李代数解决了这一问题.

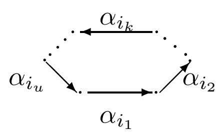
项链李代数是某一箭图 Q 所诱导的重箭图 $\overline{Q}$ 中全体项链字为基张成的无限维向量空间, 并在此向量空间上定义了特殊的李运算. 箭图在代数表示论应用已经越来越广泛, 并成为代数表示论的基本概念. 项链李代数在非交换几何及奇点理论、量子群等领域有着重要的应用. 我们曾经研究过一些项链李代数的同构和同态[7−8], 在文 [7] 中研究了一些特殊箭图的同构, 这些同构包括单向循环箭图、混向循环箭图, 以及垂直叠加的箭图和水平叠加的箭图的同构. 在文 [8] 中研究了些特殊箭图的同态, 这些同态包括只有两个顶点, 两条不同方向的箭图, 只有 3 个顶点、3 条同方向的箭图, 以及 n 个顶点,n 条不同方向的箭图的同态. 梅超群[9]研究了项链李代数的一些特殊项链李代数的结构. Post[10]研究了可传递李代数的结构. 本文重点讨论了由一个特殊箭图诱导的项链李子代数, 并证明了其中一些李子代数是半单李代数. 文 [11–16] 研究了一些无限维李代数.

2 项链李代数的定义

令 $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$ 是任一具有两个或两个以上顶点的连通有向图, 其中 $Q_0=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 Q 的顶点集合, Q 中的有向边称之为箭, Q_1 是 Q 中所有箭的集合, $Q_1=$

本文 2015 年 2 月 13 日收到, 2016 年 4 月 31 日收到修改稿.
[1]湖南理工学院数学学院, 湖南 岳阳 414006. E-mail: yudeming864024@126.com
[2]首都师范大学数学与计算机科学学院, 北京 100037. E-mail: lucaihui@126.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11771135) 的资助.

$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, s, t 是从 Q_1 到 Q_0 的映射, 使对 $\forall\alpha \in Q_1, s(\alpha) = v$ 是 α 的起点, $t(\alpha) = v'$ 是 α 的终点, 记作 $\alpha : v \longrightarrow v'$, 且 $s(\alpha) \neq t(\alpha)$, 并称 Q 是一个箭图. Q 中有箭序列: $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_u}, u \geqslant 1$, 这里 $i_1, \cdots, i_u \in \{1, \cdots, m\}$. 如果满足 $t(\alpha_{i_j}) = s(\alpha_{i_{j+1}})$, 则称 $c = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_u}$ 为 Q 中的路, 若还有 $t(\alpha_{i_u}) = s(\alpha_{i_1})$, 则称 c 是一个循环, u 称为循环的长度. 在箭图 Q 的所有循环集合上定义关系 $\sim$ 如下, 设 c 是 Q 中的一个循环, 若 c' 是依次轮换 c 中的箭头而得到的循环, 定义 $c' \sim c$. 显然 $\sim$ 是等价关系. Q 的一个循环等价类称为 Q 的一个项链词. 若 $c = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_u}$ 是循环, 则相应的项链词用图表示为



用 $\omega = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_u}$ 表示,c 是 ω 循环等价类中的一个代表. 循环等价类中每个循环具有相同的长度, 这一长度, 称为项链词的长度, 用 $|\omega|$ 表示. 以下用 $\mathbb{C}$ 表示复数域. 对于 Q 中的每个箭 $\alpha : v \longrightarrow v'$, 添加 α 关于 v, v' 的对称箭 α^*, 即 $\alpha^* : v' \longrightarrow v$,$\alpha^*$ 称为 α 的星化得到 Q 所诱导的重箭图 $\overline{Q}$. 记

$$Q_1^* = \{\alpha^* : v_j \longrightarrow v_i \mid \forall\alpha : v_j \longrightarrow v_i \in Q_1\},$$

则 $\overline{Q}_0 = Q_0$, 而 $\overline{Q}_1 = Q_1 \cup Q_1^*$. 类似地, 可定义

$$\forall\beta \in Q_1^*, \quad \beta : v_1 \longrightarrow v_1', \quad \beta^* : v_1' \longrightarrow v_1,$$

β^* 也称为 β 的星化. 显然, 从定义可知 $\forall\beta \in \overline{Q}_1, (\beta^*)^* = \beta$. 将 $\overline{Q}$ 中所有的循环等价类即所有的项链词构成集合 $NW_{\overline{Q}}$, 此集合中所有的元素为基在 $\mathbb{C}$ 上张成的向量空间记为N_Q.

$\forall\omega_1 = \alpha_1 \cdots \alpha_r,\ \omega_2 = \beta_1 \cdots \beta_s \in NW_{\overline{Q}}$ (ω_1, ω_2 的箭的下标排列顺序一旦取定之后, 便再不能置换), $\forall\, i \in \{1, \cdots, r\}, j \in \{1, \cdots, s\}$, $\forall\alpha \in Q_1$, 在集合 $NW_{\overline{Q}}$, 定义二元运算如下[3–4]:

$$\sigma_{ij}^{\alpha}(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}\beta_{j+1} \cdots \beta_s\beta_1 \cdots \beta_{j-1}\alpha_{i+1} \cdots \alpha_r, & \text{若 } \alpha_i = \alpha \text{ 且 } \beta_j = \alpha^*, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

称新项链词 $\sigma_{ij}^{\alpha}(\omega_1, \omega_2)$ 是 ω_1, ω_2 在 i, j 之处关于 α 的一次连接. 定义项链词的李运算如下:

$$[\omega_1, \omega_2] = \sum_{\forall\alpha \in Q_1} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sigma_{ij}^{\alpha}(\omega_1, \omega_2) - \sum_{\forall\alpha \in Q_1} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sigma_{ij}^{\alpha}(\omega_2, \omega_1). \tag{2.1}$$

将上述李运算线性地扩展到 N_Q, 对于 $\forall\, a_i, b_j \in \mathbb{C}, x,\ y \in N_Q$, 令

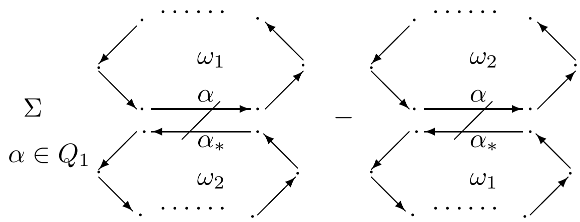
$$x = \sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i, \quad y = \sum_{j=1}^{s} b_j\omega_j,$$

定义

$$[x, y] = \Big[\sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i, \sum_{j=1}^{s} b_j\omega_j\Big] = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_i b_j [\omega_i, \omega_j],$$

可验证上述定义的李运算 $[\omega_1, \omega_2]$ 与 ω_1, ω_2 所选的循环代表无关, 即箭的排列顺序无关.

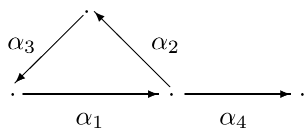
根据 (2.1) 与项链词的图示, 我们可以形象地定义李运算: $\forall\,\omega_1,\omega_2 \in NW_{\overline{Q}}$, 有 $[\omega_1,\omega_2]$ 等于



即对 $\forall\alpha \in Q_1$, 如果 α 出现于 ω_1 中, 再找寻 α^* 是否出现于 ω_2 中, 若是, 则同时删去 α 和 α^*, 以打开 ω_1 和 ω_2 这两个项链. 将打开后的两条路的首尾对应相接 (同一顶点接在一起), 构成一个新的项链词, 若 α 在 ω_1 出现 n_1 次、在 ω_2 出现 n_2 次, 则这个过程需重复 n_1n_2 次, 这 n_1n_2 个项链词的和构成一个新的项链词的组合, 若 α^* 不在 ω_2 中, 则将新的项链词看作 0. 然后在 ω_2 中找寻上述的 α, 在 ω_1 中找寻 α^*, 重复上述操作, 得到又一新的项链词组合, 用先得到的新的项链词组合减去后得到项链词组合, 最后遍历 $\forall\alpha \in Q_1$, 把相减后得到的所有的项链词加起来, 和式为 $[\omega_1,\omega_2]$.

因为 $[\omega_2,\omega_1] = \sum\limits_{\forall\alpha\in Q_1}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s}\sigma_{ij}^{\alpha}(\omega_2,\omega_1) - \sum\limits_{\forall\alpha\in Q_1}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s}\sigma_{ij}^{\alpha}(\omega_1,\omega_2)$, 所以 $[\omega_1,\omega_2] = -[\omega_2,\omega_1]$, 于是此李运算在此向量空间 N_Q 上满足反对称性, 也可验证此李运算满足双线性、封闭性和 Jacobi 恒等式.

设箭图如下所示:



如果一个项链字 $\omega_1 = \alpha_1\alpha_1^*\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_{k_1},\ k_1 \geqslant 0,\ k_1 \in \mathbb{Z}$, 那么 k_1 称为项链字 ω_1 的复制指数, 如果 $k_1 = 0,\ \alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_{k_1} = \alpha_1\alpha_1^*$.

如果一个项链字 $\omega_2 = \alpha_2\alpha_2^*\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_1\cdots\alpha_2\alpha_3\alpha_1 = \alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_{k_2}$, $k_2 \geqslant 0$, $k_2 \in \mathbb{Z}$, 那么 k_2 是项链字 ω_2 的复制指数, 如果 $k_2 = 0,\ \alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_{k_2} = \alpha_2\alpha_2^*$.

如果一个项链字 $\omega_3 = \alpha_3\alpha_3^*\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_3\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_{k_3}$, $k_3 \geqslant 0$, $k_3 \in \mathbb{Z}$, 那么 k_3 是项链字 ω_3 的复制指数, 如果 $k_3 = 0,\ \alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_{k_3} = \alpha_3\alpha_3^*$.

g_1 是 $\alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_{k_1}, k_1 \geqslant 0,\ \forall k_1 \in \mathbb{Z}$ 张成的线性空间; g_2 是 $\alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_{k_2},\ k_2 \geqslant 0,\ \forall k_2 \in \mathbb{Z}$; g_3 是 $\alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_{k_3},\ \forall k_3 \geqslant 0,\ k_3 \in \mathbb{Z}$ 张成的线性空间.

由于 $\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}$,

$$[\alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_i, \alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_j] = (i-j)\alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_{i+j},$$

从而 g_1 是李子代数.

令 $\alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_i,\ \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z}$, 为 A_i, 则有

$$[A_i, A_j] = (i-j)A_{i+j}, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}.$$

由于 $\forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}$,

$$[\alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_j, \alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_k] = (j-k)\alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_{j+k},$$

从而 g_2 是李子代数. 令 $\alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_i,\ \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z}$, 为 B_i, 则有

$$[B_i, B_j] = (i-j)B_{i+j}, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}.$$

由于 $\forall m \geqslant 0,\ m \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}$,

$$[\alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_k, \alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_m] = (k-m)\alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_{k+m},$$

从而 g_3 是李子代数.

令 $\alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_i,\ \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z}$, 为 C_i, 则有

$$[C_i, C_j] = (i-j)C_{i+j}, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}.$$

g 是由 $\alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_{k_1},\ k_1 \geqslant 0,\ \forall k_1 \in \mathbb{Z},\ \alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_{k_2},\ k_2 \geqslant 0,\ \forall k_2 \in \mathbb{Z}$, 以及 $\alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_{k_3},\ \forall k_3 \geqslant 0,\ k_3 \in \mathbb{Z}$ 张成的线性空间.

由于 $\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}$,

$$[\alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_i, \alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_j] = i\alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_{i+j} - j\alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_{i+j},$$

即

$$[A_i, B_j] = iA_{i+j} - jB_{i+j}, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}.$$

由于 $\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}$,

$$[\alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_i, \alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_k] = i\alpha_1\alpha_1^*(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_{i+k} - k\alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_{i+k},$$

即

$$[A_i, C_k] = iA_{i+k} - kC_{i+k}, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

由于 $\forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}$,

$$[\alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_j, \alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_k] = j\alpha_2\alpha_2^*(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)_{j+k} - k\alpha_3\alpha_3^*(\alpha_3\alpha_2\alpha_1)_{j+k},$$

即

$$[B_j, C_k] = jB_{j+k} - kC_{j+k}, \quad \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z},$$

从而 g 是李子代数. 本文重点研究李子代数 g 及 g 的李子代数的性质.

3 主要结果

定理 3.1 g_1 是 g 的半单李子代数.

证 由于 $\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z},\ A_i \in g_1,\ A_j \in g_1$,

$$[A_i, A_j] = (i-j)A_{i+j},$$

g_1 无二维交换李子代数. 用反证法, 假设 h 为 g_1 代数的二维交换子代数, 设 x, y 为 h 的基, 则 $x \neq 0$, $y \neq 0$, 设

$$x = k_{-m}A_m + k_{-m+1}A_{-m+1} + \cdots + k_{-1}A_{-1} + k_0A_0 + k_1A_1 + \cdots + k_{n-1}A_{n-1} + k_nA_n,$$

$$y = l_{-m}A_m + l_{-m+1}A_{-m+1} + \cdots + l_{-1}A_{-1} + l_0A_0 + l_1A_1 + \cdots + l_{n-1}A_{n-1} + l_nA_n,$$

观察矩阵

$$\begin{pmatrix} k_{-m} & k_{-m+1} & \cdots & k_{-1} & k_0 & k_1 & \cdots & k_{n-1} & k_n \\ l_{-m} & l_{-m+1} & \cdots & l_{-1} & l_0 & l_1 & \cdots & l_{n-1} & l_n \end{pmatrix} \quad (k_n, l_n\text{不全为零}).$$

因为 h 为交换子代数, 所以

$$[x, y] = 0 \qquad (3.1).$$

我们仔细观察系数矩阵, (3.1) 左边经过具体计算之后可知 A_{2n-1} 的系数为 $-\begin{vmatrix} k_{n-1} & k_n \\ l_{n-1} & l_n \end{vmatrix} = 0$. 同理观察 A_{2n-2} 的系数 $-2\begin{vmatrix} k_{n-2} & k_n \\ l_{n-2} & l_n \end{vmatrix} = 0$. 利用行列式有关知识, 又由 k_n, l_n 不全为零, 因为

$$\begin{vmatrix} k_{n-1} & k_n \\ l_{n-1} & l_n \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} k_{n-2} & k_n \\ l_{n-2} & l_n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k_{n-2} & k_{n-1} \\ l_{n-2} & l_{n-1} \end{vmatrix} = 0, \qquad (3.2)$$

于是 A_{2n-3} 的系数 $\begin{vmatrix} k_{n-2} & k_{n-1} \\ l_{n-2} & l_{n-1} \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_n \\ l_{n-3} & l_n \end{vmatrix}$, 根据 (3.2) 式, 有 $\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_n \\ l_{n-3} & l_n \end{vmatrix} = 0$, 又考虑 A_{2n-4} 的系数 $4\begin{vmatrix} k_{n-4} & k_n \\ l_{n-4} & l_n \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_{n-1} \\ l_{n-3} & l_{n-1} \end{vmatrix} = 0$. 利用前述结论有 $\begin{vmatrix} k_{n-4} & k_n \\ l_{n-4} & l_n \end{vmatrix} = 0$, 由前述有 $\begin{vmatrix} k_{n-1} & k_n \\ l_{n-1} & l_n \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} k_{n-4} & k_n \\ l_{n-4} & l_n \end{vmatrix} = 0$, 从而有 $\begin{vmatrix} k_{n-4} & k_{n-1} \\ l_{n-4} & l_{n-1} \end{vmatrix} = 0$, 由前面有 $\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_n \\ l_{n-3} & l_n \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} k_{n-2} & k_n \\ l_{n-2} & l_n \end{vmatrix} = 0$, 从而有 $\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_{n-2} \\ l_{n-3} & l_{n-2} \end{vmatrix} = 0$. 又考虑 A_{2n-5} 的系数 $5\begin{vmatrix} k_{n-5} & k_n \\ l_{n-5} & l_n \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} k_{n-4} & k_{n-1} \\ l_{n-4} & l_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{n-3} & k_{n-2} \\ l_{n-3} & l_{n-2} \end{vmatrix} = 0$, 利用前面结论有 $\begin{vmatrix} k_{n-4} & k_{n-1} \\ l_{n-4} & l_{n-1} \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_{n-2} \\ l_{n-3} & l_{n-2} \end{vmatrix} = 0$, 从而 $\begin{vmatrix} k_{n-5} & k_n \\ l_{n-5} & l_n \end{vmatrix} = 0$, 依此类推 $\begin{vmatrix} k_i & k_n \\ l_i & l_n \end{vmatrix} = 0,\ i = -m, \cdots, n-1$.

所以 x, y 对应的系数成比例, x, y 线性相关, 这与 x, y 为基矛盾. 从而 g_1 无二维及二维以上的交换理想, 假设 $\overline{g}$ 是 g_1 一维的交换理想, 设

$$x \in \overline{g},\ x \neq 0, \quad x = \sum_{j=1}^{j=n} k_{i_j} A_{i_j}, \quad k_{i_j} \neq 0,\ i_1 < i_2 \cdots i_{n-1} < i_n,$$

由于 $\overline{g}$ 是一维的, 从而 $\overline{g}$ 由基向量 x 线性张成. 令 $m > i_n$, $[x, A_m] \notin \overline{g}$ 与 $\overline{g}$ 是 g_1 一维的交换理想矛盾, 从而原命题成立.

定理 3.2　$g_1 \cong g_2 \cong g_3$.

证　g_1 到 g_2 的线性映射如下:

$$f : g_1 \to g_2, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ f(A_i) = B_i,$$

从而 $\forall i \geqslant 0, i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0, j \in \mathbb{Z}, A_i \in g_1, A_j \in g_1$,

$$f([A_i, A_j]) = [f(A_i), f(A_j)],$$

从而 $g_1 \cong g_2$, 同理 $g_1 \cong g_3$, 从而原命题成立.

g_2 和 g_2 都是 g 的半单李子代数.

定理 3.3 g 的中心为 $c(g) = \{x \in g, \forall y \in g, [x,y] = 0\} = a(A_0 - B_0) + b(C_0 - B_0)$, $a, b \in \mathbb{C}$.

证 $\forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}$,

$$[A_0 - B_0, A_j] = 0, \quad [A_0 - B_0, B_j] = 0, \quad [A_0 - B_0, C_j] = 0,$$

从而 $A_0 - B_0 \in c(g)$. 同理 $\forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}$,

$$[C_0 - B_0, A_j] = 0, \quad [C_0 - B_0, B_j] = 0, \quad [C_0 - B_0, C_j] = 0,$$

从而 $B_0 - C_0 \in c(g)$.

设

$$x = \sum_{i=0}^{n_1} p_i A_i + \sum_{j=0}^{n_2} q_j B_j + \sum_{k=0}^{n_3} r_k C_k \in g,$$

由于

$$0 = [x, A_0] = \sum_{i=0}^{n_1} i p_i A_i + \sum_{j=0}^{n_2} j q_j B_j + \sum_{k=0}^{n_3} k r_k C_k,$$

从而

$$p_1 = p_2 = \cdots p_{n_1} = 0, \quad q_1 = q_2 = \cdots q_{n_2} = 0, \quad r_1 = r_2 = \cdots r_{n_3} = 0,$$

于是可设 $x = p_0 A_0 + q_0 B_0 + r_0 C_0$. 由于

$$0 = [x, A_1] = (-p_0 - q_0 - r_0) A_1, \quad p_0 + q_0 + r_0 = 0, q_0 = -(p_0 + r_0),$$

从而 $x = p_0(A_0 - B_0) + r_0(C_0 - B_0)$, 因此原命题成立.

定理 3.4 由 $A_k - B_k$ ($\forall k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$), 张成的无限维线性空间 g_4 是 g 的无限维交换理想.

证 $\forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}$,

$$[A_k - B_k, A_j - B_j] = [A_k, A_j] + [B_k, B_j] - [A_k, B_j] - [B_k, A_j] = 0.$$

由于 $\forall m \geqslant 0,\ m \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}$,

$$[A_k - B_k, A_m] = k(A_{k+m} - B_{k+m})$$

且 $\forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}$,

$$[A_k - B_k, B_j] = k(A_{k+j} - B_{k+j})$$

以及 $\forall n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}$,

$$[A_k - B_k, C_n] = k(A_{k+n} - B_{k+n}),$$

从而可得原命题成立.

推论 3.1 由 $A_k - C_k$ ($\forall k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$) 张成的无限维线性空间 g_5 是 g 的无限维交换理想.

推论 3.2 由 $C_k - B_k$ ($\forall k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$) 张成的无限维线性空间 g_6 是 g 的无限维交换理想.

定理 3.5 $g_4 \cong g_5 \cong g_6$.

证 建立 g_4 到 g_5 的线性映射如下:

$$f : g_4 \to g_5, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z}, \quad f(A_i - B_i) = A_i - C_i,$$

从而 $\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}$,

$$f([A_i - B_i, A_j - B_j]) = [f(A_i - B_i), f(A_j - B_j)],$$

从而 $g_4 \cong g_5$, 同理 $g_4 \cong g_6$, 从而原命题成立.

定理 3.6 由 $A_k + B_k(\forall k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z})$, 张成的无限维线性空间 g_7 是 g 的无限维非交换子代数, g_7 是半单李子代数.

证 由 $\forall j \geqslant 0, j \in \mathbb{Z}, \forall k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$,

$$[A_k + B_k, A_j + B_j] = [A_k, A_j] + [B_k, B_j] + [A_k, B_j] + [B_k, A_j] = 2(k - j)(A_{k+j} + B_{k+j}),$$

建立 g_7 到 g_1 的线性映射如下:

$$f : g_7 \to g_1, \quad \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}, \quad f(A_k + B_k) = 2A_k,$$

从而 $\forall k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}, \forall j \geqslant 0, j \in \mathbb{Z}$,

$$f([A_k + B_k, A_j + B_j]) = [f(A_k + B_k), f(A_j + B_j)],$$

从而 $g_7 \cong g_1$, g_1 是半单李子代数, 从而 g_7 是半单李子代数.

推论 3.3 由 $A_k + C_k$ ($\forall k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$) 张成的无限维线性空间 g_8 是 g 的无限维非交换子代数.

推论 3.4 由 $B_k + C_k$ ($\forall k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$) 张成的无限维线性空间 g_9 是 g 的无限维非交换子代数.

定理 3.7 $g_7 \cong g_8 \cong g_9$.

证 建立 g_7 到 g_8 的线性映射如下:

$$f : g_7 \to g_8, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z}, \quad f(A_i + B_i) = A_i + C_i,$$

从而 $\forall i \geqslant 0, i \in \mathbb{Z}, \forall j \geqslant 0, j \in \mathbb{Z}$,

$$f([A_i + B_i, A_j + B_j]) = [f(A_i + B_i), f(A_j + B_j)],$$

因此 $g_7 \cong g_8$, 同理 $g_7 \cong g_9$, 从而原命题成立.

g_8 和 g_9 都是半单李子代数. 建立 g 到 g 的线性映射如下:

$$f_1 : g \to g, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z}, \quad f_1(A_i) = B_i, \quad f_1(B_i) = C_i, \quad f_1(C_i) = A_i,$$

f_1 在基向量 A_i, B_i, C_i 线性扩张.

定理 3.8 f_1 是 g 的自同构.

证 $\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z},\ A_i \in g,\ A_j \in g$,

$$f_1([A_i, A_j]) = [f_1(A_i), f_1(A_j)],$$

$\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z},\ B_i \in g, B_j \in g,$

$$f_1([B_i, B_j]) = [f_1(B_i), f_1(B_j)],$$

$\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z},\ C_i \in g,\ C_j \in g,$

$$f_1([C_i, C_j]) = [f_1(C_i), f_1(C_j)],$$

$\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z},\ A_i \in g, B_j \in g,$

$$f_1([A_i, B_j]) = [f_1(A_i), f_1(B_j)],$$

$\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z},\ A_i \in g,\ C_k \in g,$

$$f_1([A_i, C_k]) = [f_1(A_i), f_1(C_k)],$$

$\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z},\ A_i \in g,\ C_k \in g,$

$$f_1([B_i, C_k]) = [f_1(B_i), f_1(C_k)].$$

显然, f_1 是 g 上的一一映射, 从而原命题成立.

建立 g 到 g 的线性映射如下:

$$f_2 : g \to g, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z}, \quad f_2(A_i) = A_i, \quad f_2(B_i) = C_i, \quad f_2(C_i) = B_i,$$

f_2 在基向量 A_i, B_i, C_i 线性扩张.

$$f_3 : g \to g, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z}, \quad f_3(A_i) = C_i, \quad f_3(C_i) = B_i, \quad f_3(B_i) = A_i,$$

f_3 在基向量 A_i, B_i, C_i 线性扩张.

$$f_4 : g \to g, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z}, \quad f_4(A_i) = C_i, \quad f_4(C_i) = A_i, \quad f_4(B_i) = B_i,$$

f_4 在基向量 A_i, B_i, C_i 线性扩张.

$$f_5 : g \to g, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z}, \quad f_5(A_i) = A_i, \quad f_2(B_i) = B_i, \quad f_2(C_i) = C_i,$$

f_5 在基向量 A_i, B_i, C_i 线性扩张.

$$f_6 : g \to g, \quad \forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z}, \quad f_5(A_i) = B_i, \quad f_2(B_i) = A_i, \quad f_2(C_i) = C_i,$$

f_5 在基向量 A_i, B_i, C_i 线性扩张.

推论 3.5 $f_i (i = 2, 3, 4, 5, 6)$ 是 g 的自同构.

在映射集 $H = \{f_1, f_2, f_3, f_4, , f_5, f_6\}$ 中引入映射的普通乘法, 即映射的合成 o.

$$\forall f_i,\ f_j \in H, \quad f_i o f_j(x) = f_i(f_j(x)) \quad (\forall x \in g).$$

定理 3.9 设映射集 $H = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ 在上述的乘法运算下, 同构于对称群 S_3.

证 S_3 的元素分别为 (12), (13), (23), (123), (132) 和单位元 ε, 构造映射 F,

$$F : H \to S_3,$$

$f_1 \to (123), f_2 \to (23), f_3 \to (132), f_4 \to (13), f_5 \to \varepsilon, f_6 \to (12)$, 经验证 H 和对称群 S_3 同构.

构造 g 到 g 的子代数 g_3 的同态

$$h_2 : g \to g_1, \quad h_2(A_i) = A_i, \quad h_2(B_i) = A_i, \quad h_2(C_i) = A_i, \quad \forall i \in Z,$$

h_2 在 g 的本原基向量 A_i, B_i, C_i 线性扩张.

定理 3.10　设 h_2 是 g 到 g_1 的李代数满同态映射, 且 $\operatorname{Ker} h_2 = g_4 \oplus g_6$.

证　$\forall i, j \in Z$, 可验证 $\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}$,

$$h_2([A_i, A_j]) = [h_2(A_i), h_2(A_j)], h_2([B_i, B_j]) = [h_2(B_i), h_2(B_j)],$$

$\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}$,

$$h_2([C_i, C_j]) = [h_2(C_i), h_2(C_j)], h_2([A_i, B_j]) = [h_2(A_i), h_2(B_j)],$$

$\forall i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \forall j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}$,

$$h_2([A_i, C_j]) = [h_2(A_i), h_2(C_j)], h_2([B_i, C_j]) = [h_2(B_i), h_2(C_j)],$$

于是 $\forall x, y \in g$ 有 $h_2([x, y]) = [h_2(x), h_2(y)]$, 从构造知 h_2 为满射, 且为线性映射. $\forall x \in g_4,\ h_2(x) = 0$, 从而 $g_4 \subseteq \operatorname{Ker} h_2$, 同理 $\forall x \in g_6,\ h_2(x) = 0$, 从而 $g_6 \subseteq \operatorname{Ker} h_2$. $\forall y \in \operatorname{Ker} h_2$, 设 $y = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i A_i + \sum\limits_{i=0}^{n} b_i B_i + \sum\limits_{i=0}^{n} c_i C_i$, 由于 $y \in \operatorname{Ker} h_2$, 从而 $y = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_i + b_i + c_i)(A_i + B_i + C_i)$, 其中 $a_i + b_i + c_i = 0$, 从而 $b_i = -(a_i + c_i)$.

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i(A_i - B_i) + \sum_{i=0}^{n} c_i(C_i - B_i),$$

从而 $y \in g_4 \oplus g_6$.

定理 3.11　设 μ 为 g 的交换理想, 则 $\mu \subseteq g_4 \oplus g_6$, 即 $\forall y \in \mu$, 则

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i(A_i - B_i) + \sum_{i=0}^{n} c_i(C_i - B_i).$$

证　由定理 3.10 知, h_2 是 g 到 g_1 满同态映射, 设 μ 为 g 的交换理想, 则 $h_2(\mu)$ 必为 g_1 的交换理想, g_3 为半单李代数, g_3 的交换理想只能是 0 理想, 从而 $h_2(\mu) = 0$ 时, $\mu \subseteq g_4 \oplus g_6$, 即 $\forall y \in \mu$, 则

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i(A_i - B_i) + \sum_{i=0}^{n} c_i(C_i - B_i).$$

致谢 衷心感谢审稿老师在百忙之中提出的宝贵意见, 让作者的学术视野得到了很大的提高.

参　考　文　献

[1] Lothaire M. Combinations on words [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

[2] Reutenauer C. Free Lie algebras [M]. Oxford: Clarendon Press, 1993.

[3] Bocklant R, Le Bruyn L. Necklace Lie algebras and nocommunicative symplectic geometry [J]. *Math Z*, 2002, 240(1):141–167.

[4] Ginzburg V. Non-commutative symplectic geometry, quiver varieties and operads [J]. *Math Res Lett*, 2001, 8(3):337–400.

[5] Guo J Y, Martinez-Villa R. Algebra pairs associated to Mckay quivers [J]. *Comm Algebras*, 2002, 30(2):1017–1032.

[6] Peng L G. Lie algebras determined by finite Auslander Reiten quivers [J]. *Comm Algebras*, 1998, 1:235–258.

[7] 余德民, 梅超群, 郭晋云. 项链李代数的同构与同构群 [J]. 数学年刊 A 辑, 2012, 34(5):569–578.

[8] 余德民, 梅超群, 郭晋云. 一些特殊项链李代数的同态 [J]. 数学年刊 A 辑, 2009, 30(4):551–562.

[9] Mei C Q, Yu D M. The structure of necklace Lie algebras [J]. *Journal of Mathematics in Practice and Theory*, 2012, 42(1):195–204.

[10] Post G. On the structure of transitively differential algebras [J]. *J Lie theory*, 2001, 11:111–128.

[11]] Osborn J M, Zhao K M. Generalized poisson bracket and Lie algebras of type H in characteristic 0 [J]. *Invent Math*, 1999, 230:107–143.

[12] Osborn J M, Zhao K M. Doubly Z-graded Lie algebras containing a Virasoro algebra [J]. *J Alg*, 1999, 219:266–298.

[13] Su Y C, Zhou J. Some representations of nongraded Lie algebras of generalized Witt type [J]. *J Alg*, 2001, 246:721–738.

[14] Zhao K M. Representations of q-analogue of the Virasoro algebra [J]. *Northwest Math J*, 1997, 13(2):197–204.

[15] Su Y C. Simple modules of the higher rank super-Virasoro [J]. *Lett Math phys*, 200(53):263–272.

[16] 姜翠波, 孟道骥. The automorphism group of derivation algebra of the Virasoro-like algebra [J]. 数学进展, 1998, 27(2):175–183.

Necklace Lie Subalgebras Induced by Some Special Arrow

YU Demin[1] LU Caihui[2]

[1]College of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, Hunan, China. E-mail: yudeming8640024@126.com

[2]College of Mathematics and Computing Science, Capital Normal University Beijing, 100037, China. E-mail: luciahui@126.com

Abstract In this paper, a new infinite dimensional necklace Lie algebra is studied. Some Lie subalgebras induced by some special arrow are mainly discussed. It is proved that some Lie subalgebras are semi-simple Lie algebra.

Keywords Necklace Lie algebra, Semi-simple Lie algebra, Subalgebra

2000 MR Subject Classification 17B05, 17B40, 17B65