数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(1):15–26
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0002

共形双曲度量的孤立奇点*

冯 宇[1] 史毅茜[1] 许 斌[2]

提要 Nitsche 证明了共形双曲度量的孤立奇点要么是锥奇点, 要么是尖奇点, 二者必其一 (Nitsche J. Über die isolierten singularitäten der Lösungen von $\Delta u = \mathrm{e}^u$ [J]. *Math Z*, 1957, 68(3):316–324.). 本文利用展开映射证明了在孤立奇点附近存在复坐标 z, 使得度量要么为 $\dfrac{4\alpha^2|z|^{2\alpha-2}}{(1-|z|^{2\alpha})^2}|\mathrm{d}z|^2$, 其中 $\alpha>0$, 要么为 $|z|^{-2}\big(\ln|z|\big)^{-2}|\mathrm{d}z|^2$.

关键词 双曲度量, 锥奇点, 尖奇点, 展开映射
MR (2000) 主题分类 51M10, 34M35
中图法分类 O153.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)01-0015-12

1 引 言

设 Σ 为紧 Riemann 面, $\mathrm{D}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\theta_i-1)p_i$ 是 Σ 上的 $\mathbb{R}$-除子, 其中 $0\leqslant\theta_i\neq 1$. 我们称 $\mathrm{d}\sigma^2$ 为 $\Sigma\backslash\operatorname{supp}D=\Sigma\backslash\{p_1,\cdots,p_n\}$ 上表示除子 D 的光滑共形度量, 是指

(1) 如果 $\theta_i>0$, 那么 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在点 p_i 有一个锥角度为 $2\pi\theta_i>0$ 的锥奇点. 即在 p_i 点的一个邻域 U 内, $\mathrm{d}\sigma^2=\mathrm{e}^{2u}|\mathrm{d}z|^2$, 其中 z 是 U 上的一个复坐标, $z(p_i)=0$, 且 $u-(\theta_i-1)\ln|z|$ 在 U 内连续.

(2) 如果 $\theta_i=0$, 那么 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在点 p_i 为尖奇点. 即在 p_i 点的一个邻域 V 内, $\mathrm{d}\sigma^2=\mathrm{e}^{2u}|\mathrm{d}z|^2$, 其中 z 是 V 上的一个复坐标, $z(p_i)=0$, 且 $u+\ln|z|+\ln(-\ln|z|)$ 在 V 内连续.

我们注意到度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在锥 (尖) 奇点附近直径有界 (无界). Nitsche[1], Heins[2] 和 Yamada[3] 证明了共形双曲度量的孤立奇点要么是锥奇点, 要么是尖奇点, 二者必其一. 由 Gauss-Bonnet 公式, 如果 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是表示除子 D 的共形双曲度量, 那么 $\chi(\Sigma)+\sum\limits_{i=1}^{n}(\theta_i-1)<0$, 其中 $\chi(\Sigma)$ 是 Σ 的 Euler 数. Heins[2] 通过利用 S-K 度量证明了下面的存在性定理.

定理 1.1 在紧 Riemann 面 Σ 上存在唯一的表示 $\mathbb{R}$-除子 $\mathrm{D}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\theta_i-1)p_i$ (其中 $0\leqslant\theta_i\neq 1$) 的共形双曲度量, 当且仅当 $\chi(\Sigma)+\sum\limits_{i=1}^{n}(\theta_i-1)<0$.

本文 2017 年 11 月 18 日收到, 2018 年 6 月 6 日收到修改稿.
[1]中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026. E-mail: yuf@mail.ustc.edu.cn; yqshi@ustc.edu.cn
[2]通信作者. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026. E-mail: bxu@ustc.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11571330) 和中央高校基本科研专项资金的资助.

在 Heins[2] 的工作之后, McOwen[4] 和 Troyanov[5] 显然并未注意到文 [2], 他们分别利用不同的 PDE 方法, 在双曲度量仅有锥奇点时的情况下证明了上述定理. 本文中, 我们给出共形双曲度量在孤立奇点附近的具体表达式.

定理 1.2 (主定理) 设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是在去心圆盘 $\triangle^* = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < |w| < 1\}$ 上的共形双曲度量. 如果 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在 $w = 0$ 处有角度为 $2\pi\alpha > 0$ 的锥奇点, 那么存在 $\varepsilon > 0$, 在 $\Delta_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \varepsilon\}$ 上存在一个全纯坐标 z, 使得 $z(0) = 0$, 在 Δ_ε 上有表达式

$$\mathrm{d}\sigma^2|_{\Delta_\varepsilon} = \frac{4\alpha^2|z|^{2\alpha-2}}{(1-|z|^{2\alpha})^2}|\mathrm{d}z|^2.$$

而且, 在相差一个变换 $z \longrightarrow \lambda z$, $|\lambda| = 1$ 下, z 是唯一的. 如果 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在 $w = 0$ 处为一个尖奇点, 那么存在 $\varepsilon > 0$, 在 $\Delta_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C}||w| < \varepsilon\}$ 上存在一个全纯坐标 z, 使得 $z(0) = 0$, 在 Δ_ε 上有表达式

$$\mathrm{d}\sigma^2|_{\Delta_\varepsilon} = |z|^{-2}(\ln|z|)^{-2}|\mathrm{d}z|^2.$$

而且, 在相差一个变换 $z \longrightarrow \lambda z$, $|\lambda| = 1$ 下, z 是唯一的.

主定理为深入研究紧 Riemann 面上奇异共形双曲度量的整体几何性质奠定了基础.

本文的组织如下. 在第 2 节, 我们首先回顾了双曲几何的一些基本知识. 然后我们给出展开映射的性质, 并证明了与文 [6] 中引理 3.2 平行的关于双曲度量的双曲版本 (引理 2.4). 第 3 节是主定理的证明.

2 预备知识

2.1 双曲几何的基本知识

记二维双曲空间形式的 Poincaré 圆盘模型 $\left(\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \frac{4|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2}\right)$ 和上半平面模型 $\left(\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}, \frac{|\mathrm{d}z|^2}{(\mathrm{Im z})^2}\right)$ 的保方向等距群分别为

$$\mathrm{PSU}(1,1) = \left\{z \longmapsto \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} : \ a,\ b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1\right\},$$

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \left\{z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} : \ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1\right\}.$$

Poincaré 圆盘模型 $\mathbb{D}$ 的等距群为 $\mathrm{I}(\mathbb{D})$.

定义 2.1 [7,p. 136] 若 $\mathfrak{L} \in \mathrm{I}(\mathbb{D})$ 且 $\mathfrak{L}$ 不为恒同变换, 那么 $\mathfrak{L}$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上有一个不动点. 变换 $\mathfrak{L}$ 称为:

(i) 椭圆变换, 若 $\mathfrak{L}$ 在 $\mathbb{D}$ 内有一个不动点.

(ii) 抛物变换, 若 $\mathfrak{L}$ 在 $\mathbb{D}$ 内没有不动点, 在 $\partial\mathbb{D}$ 上有唯一不动点.

(iii) 双曲变换, 若 $\mathfrak{L}$ 在 $\mathbb{D}$ 内没有不动点, 在 $\partial\mathbb{D}$ 上有两个不动点.

注意到上述定义仅依赖于 $\mathfrak{L}$ 在 $\mathrm{I}(\mathbb{D})$ 中的共轭类. 即 $\mathfrak{L}$ 是椭圆、抛物或双曲变换当且仅当 $\mathfrak{K} \circ \mathfrak{L} \circ \mathfrak{K}^{-1}$ 分别是椭圆、抛物或双曲变换, 其中 $\mathfrak{K} \in \mathrm{I}(\mathbb{D})$. 而且在上半平面模型中、

椭圆、抛物和双曲变换也有类似的定义方式.

下面我们只在 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{H}$ 的保方向等距群中考虑, 而且为了方便, 将适当选取这两个模型.

定理 2.1 [8−9]　(i) 对于 Poincaré 圆盘模型 $\mathbb{D}$, 若 $\mathfrak{L} \in \mathrm{PSU}(1,1)$ 是椭圆变换, 那么存在 $\mathfrak{K} \in \mathrm{PSU}(1,1)$, 使得 $\mathfrak{K} \circ \mathfrak{L} \circ \mathfrak{K}^{-1}(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$, 其中 θ 是实数.

(ii) 对于上半平面模型 $\mathbb{H}$, 若 $\mathfrak{L} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 是抛物变换, 那么存在 $\mathfrak{K} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, 使得 $\mathfrak{K} \circ \mathfrak{L} \circ \mathfrak{K}^{-1}(z) = z + t$, 其中 t 是非零实数.

(iii) 对于上半平面模型 $\mathbb{H}$, 若 $\mathfrak{L} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 是双曲变换, 那么存在 $\mathfrak{K} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, 使得 $\mathfrak{K} \circ \mathfrak{L} \circ \mathfrak{K}^{-1}(z) = \lambda z$, 其中 $\lambda > 0$.

2.2 展开映射

在文 [6] 中, 作者详细讨论了紧 Riemann 面上常曲率一锥度量的展开映射的性质, 事实上, 这些结论在一般的 Riemann 面上也是成立的, 这里我们给出相应的奇异共形双曲度量的情况. 特别地, 我们将陈述如下的两个引理, 而略去它们的证明, 这与文 [6] 中引理 2.1-2 的证明类似. 在此之前需要相关概念的准备.

Riemann 面 Σ (不必是紧致的) 上一个多值局部单叶亚纯函数 H 称为是射影函数, 如果 H 在点 $p \in \Sigma$ 附近的任意两个函数元 $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ 通过一个分式线性变换 $\mathfrak{L} \in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ 联系起来, 即 $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{L} \circ \mathfrak{H}_2$.

设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是 Riemann 面 Σ 上表示除子 $\mathrm{D} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\theta_i - 1) p_i,\ 0 \leqslant \theta_i \neq 1$ 的共形双曲度量. 我们称射影函数 $F : \Sigma \backslash \operatorname{supp} D \longrightarrow \mathbb{D}$ 为度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的一个展开映射, 如果 $\mathrm{d}\sigma^2 = F^* \mathrm{d}\sigma_0^2$, 其中 $\mathrm{d}\sigma_0^2 = \frac{4|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2}$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的双曲度量.

引理 2.1　设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是 Riemann 面 Σ 上表示除子 $\mathrm{D} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\theta_i - 1) p_i,\ 0 \leqslant \theta_i \neq 1$ 的共形双曲度量, 那么存在一个从 $\Sigma \backslash \operatorname{supp} D$ 到单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的射影函数 F, 使得 F 的单值化群包含于群 PSU(1,1), 而且

$$\mathrm{d}\sigma^2 = F^* \mathrm{d}\sigma_0^2,$$

其中 $\mathrm{d}\sigma_0^2 = \frac{4|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的双曲度量.

引理 2.2　度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的任意两个展开映射 F_1, F_2 通过一个分式线性变换 $\mathfrak{L} \in \mathrm{PSU}(1,1)$ 联系起来, 即 $F_2 = \mathfrak{L} \circ F_1$. 特别地, $\mathrm{d}\sigma^2$ 的任意两个展开映射在 PSU(1,1) 中有相互共轭的单值化群, 那么称这个共轭类为度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的单值化表示.

下述的引理给出了展开映射的 Schwarz 导数的局部表达式.

引理 2.3 [10, 定理1.2]　设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是 Riemann 面 Σ 上的共形双曲度量, 且 $\mathrm{d}\sigma^2$ 表示除子 $\mathrm{D} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\theta_i - 1) p_i,\ 0 \leqslant \theta_i \neq 1$. 若 $F : \Sigma \backslash \operatorname{supp} D \longrightarrow \mathbb{D}$ 是 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的一个展开映射, 那么在 p_i 的一个邻域 U_i 中, 存在复坐标 z, 使得 $z(p_i) = 0$, F 的 Schwarz 导数 $\{F, z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$

等于

$$\{F,z\}=\frac{1-\theta_i^2}{2z^2}+\frac{d_i}{z}+\phi_i(z),$$

其中 d_i 是复常数, ϕ_i 是 U_i 中的全纯函数, 它们依赖于复坐标 z.

F 称为与除子 $\mathrm{D}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\theta_i-1)p_i,\ 0\leqslant\theta_i\neq 1$ 相容, 如果 F 的 Schwarz 导数 $\{F,z\}$ 有上述形式. 在下面的引理中, 我们给出在共形双曲度量的锥或尖奇点附近的展开映射的局部表达式, 为了叙述的方便, 我们适当调整一下 D 的记号.

引理 2.4 设 $F:\Sigma\backslash\operatorname{supp}D\longrightarrow\mathbb{D}$ 是与除子 $\mathrm{D}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i-1)p_i-\sum\limits_{j=1}^{m}q_j,\ 0<\alpha_j\neq 1$ 相容的射影函数, 它的单值化群包含于群 PSU(1,1), 那么存在 p_i 的一个邻域 U_i, 相应的复坐标系 z 和 $\mathfrak{L}_i\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, 使得 $z(p_i)=0$ 且 $G_i=\mathfrak{L}_i\circ F$ 有表达式 $G_i(z)=z^{\alpha_i}$; 存在 q_j 的一个邻域 U_j, 相应的复坐标系 z 和 $\mathfrak{L}_j\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, 使得 $z(q_j)=0$ 且 $G_j=\mathfrak{L}_j\circ F$ 有表达式 $G_j(z)=\log z$. 而且 $\Sigma\backslash\operatorname{supp}D$ 上的拉回度量 $F^*\mathrm{d}\sigma_0^2$ 是表示 D 的共形双曲度量.

证 我们首先证明存在 p_i 的一个邻域 U_i, 相应的复坐标系 z 和 $\mathfrak{L}_i\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, 使得 $z(p_i)=0$ 且 $G_i=\mathfrak{L}_i\circ F$ 有表达式 $G_i(z)=z^{\alpha_i}$. 因为 F 与除子 D 相容, 我们可以选择 p_i 的一个邻域 U_i 和 U_i 上的复坐标 x, 使得 $x(p_i)=0$ 且

$$\{F,x\}=\frac{1-\alpha_i^2}{2x^2}+\frac{d_i}{x}+\phi_i(x),$$

其中 $\phi_i(x)$ 在 U_i 中是全纯的. 根据文 [11], 在邻域 U_i 中, 单值系数的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\Big(\frac{1-\alpha_i^2}{2x^2}+\frac{d_i}{x}+\phi_i(x)\Big)u=0 \tag{2.1}$$

存在两个线性无关解 u_1 和 u_2, 使得

$$F(x)=\frac{u_2(x)}{u_1(x)}.$$

定义一个算子 $L_i:=x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+q_i(x)$, 其中 $q_i(x)=\frac{\frac{1-\alpha_i^2}{2}+d_ix+x^2\phi_i(x)}{2}$, 那么 u_1 和 u_2 都是方程 $L_iu=0$ 的解. 注意到方程 (2.1) 在 $x=0$ 处有一个正则奇点, 我们可以应用 Frobenius 方法. 微分方程 $L_iu=0$ 在 $x=0$ 处的指数方程

$$f(s)=s(s-1)+\frac{1-\alpha_i^2}{4}=0$$

有两个根 $s_1=\frac{1-\alpha_i}{2}$ 和 $s_2=\frac{1+\alpha_i}{2}$, 且 $s_2-s_1=\alpha_i>0$. 令 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ 是 $q_i(x)$ 的幂级数展开式, 其中 $b_0=\frac{1-\alpha_i^2}{4}$. 令 s 为参数, 那么

$$u(s,x)=x^s\sum_{k=0}^{\infty}c_k(s)x^k,\quad c_0(s)=1$$

是 $L_iu=0$ 的一个解当且仅当对所有的 $n=0,1,2,\cdots$,

$$(\sharp_n):f(s+n)c_n+R_n=0$$

成立, 其中 $R_0=0$. 对 $n>0$,

$$R_n=R_n(c_1,\cdots,c_{n-1},s)=\sum_{i=0}^{n-1}c_ib_{n-i}.$$

因为对所有的 $n\geqslant 1$, 有 $f(s_2+n)\neq 0$, 那么 $u(s_2,x)$ 是微分方程的一个解. 注意到 $c_n(s)$ 是 s 的有理函数. 若 $\alpha_i=s_2-s_1$ 不是整数, 即 $s_2-s_1\neq 1,2,\cdots$, 那么由相同的原因, $u(s_1,x)$ 是微分方程的另一个解. $u(s_2,x)$ 与 $u(s_1,x)$ 线性无关. 若 $m:=\alpha_i=s_2-s_1$ 是大于等于 2 的整数且 $R_m=0$. 在这种情况下, 对 $s=s_1$ 和所有的 $n\geqslant 1$, 我们可以通过任意选择 c_m 解方程 $(\sharp_n)$, 由此得到微分方程的另一个解 $u(s_1,x)$, 它与 $u(s_2,x)$ 线性无关. 利用和文 [6, 引理 3.2] 中相同的论证, 我们可以完成上述两种情况的证明. 对于 $m=s_2-s_1$ 是大于等于 2 的整数且 $R_m\neq 0$ 的情况的排除, 我们需要不同的论证, 其详细如下.

若 $m=s_2-s_1$ 是大于等于 2 的整数, 且 $R_m\neq 0$, 则根据文 [11, p. 23], 下面的表达式

$$u_{\log}:=u(s_2,x)\log x+x^{s_1}v(x)$$

是具有对数奇性的解, 其中

$$v(x)=-\frac{f'(s_2)}{R_m}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(s_1)x^k+x^m\sum_{k=0}^{\infty}c'_k(s_2)x^k.$$

注意到 $f'(s_2)\neq 0$, $v(x)$ 是 $x=0$ 处全纯的函数, $v(0)=-\frac{f'(s_2)}{R_m}\neq 0$. 因此 $u_{\log}$, $u(s_2,x)$ 是 $L_iu=0$ 在 $x=0$ 附近的两个线性无关解. 有

$$F(x)=\frac{au_{\log}+bu(s_2,x)}{cu_{\log}+du(s_2,x)}=:\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\circ\frac{u_{\log}}{u(s_2,x)},$$

其中

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}),\quad \frac{u_{\log}}{u(s_2,x)}=\frac{u(s_2,x)\log x+x^{s_1}v}{u(s_2,x)}.$$

因为 F 的单值化群包含于群 PSU(1,1), 不妨设

$$\mathfrak{F}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\circ\frac{u_{\log}}{u(s_2,x)}$$

为 F 在点 p_i 附近一个不含 p_i 的开圆盘内的一个单值分支, 则存在 $\begin{pmatrix}s&t\\\overline{t}&\overline{s}\end{pmatrix}\in\mathrm{PSU}(1,1)$, 使得

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}s&t\\\overline{t}&\overline{s}\end{pmatrix}\circ\mathfrak{F}\\=&\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\circ\frac{\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}s_2}u(s_2,x)(\log x+2\pi\sqrt{-1})+\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}s_1}x^{s_1}v}{\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}s_2}u(s_2,x)}\\=&\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\pi\sqrt{-1}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}\right\}\circ\mathfrak{F}.\end{aligned}$$

我们有

$$\pm\begin{pmatrix} s & t \\ \overline{t} & \overline{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-ac\cdot 2\pi\sqrt{-1} & a^2\cdot 2\pi\sqrt{-1} \\ -c^2\cdot 2\pi\sqrt{-1} & 1+ac\cdot 2\pi\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

因此 $a\neq 0$, $c\neq 0$ 且 $|c|=|a|$. 进一步, 有

$$\frac{u_{\log}}{u(s_2,x)} = \frac{u(s_2,x)\log x + x^{s_1}v}{u(s_2,x)} = \log x + x^{-m}\varphi,$$

其中

$$\varphi = \frac{-\frac{f'(s_2)}{R_m}\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(s_1)x^k + x^m\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k'(s_2)x^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(s_2)x^k}.$$

注意到 $\varphi(x)$ 是 $x=0$ 处全纯的函数, $\varphi(0)=-\frac{f'(s_2)}{R_m}\neq 0$. 因此, 有

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{a(\log x + x^{-m}\varphi)+b}{c(\log x + x^{-m}\varphi)+d} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c(\log x + x^{-m}\varphi)+d} \\ &= \frac{a}{c}\Big[1 - \frac{1}{ac(x^m\log x+\varphi)+adx^m}\cdot x^m\Big] \\ &= \frac{a}{c}(1+h(x)x^m), \end{aligned}$$

其中

$$h(x) = -\frac{1}{ac(x^m\log x+\varphi)+adx^m}, \quad \lim_{x\to 0} h(x) = -\frac{1}{ac\varphi(0)}\neq 0.$$

可以选择数列 $\{x_n\}\to 0$ 且 $\alpha<\beta$, 使得

$$\arg h(x_n)\in(\alpha,\,\beta), \quad \arg x_n\in\Big(\frac{-\beta}{m},\,\frac{-\alpha}{m}\Big), \quad \text{且} \quad 0<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

于是, 我们有

$$\arg(h(x_n)\cdot x_n^m)\in\Big(-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\Big), \quad \text{且} \quad \mathrm{Re}(h(x_n)x_n^m)>0.$$

回顾 F 的表达式和 $|c|=|a|$, 有 $|F(x_n)|>1$, 这与 F 在 $\mathbb{D}$ 中取值矛盾.

总结上述两段, 证明了引理在 p_i 附近的第一个论断.

下面, 我们证明存在 q_j 的一个邻域 U_j, 相应的复坐标系 z 和 $\mathfrak{L}_j\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, 使得 $z(q_j)=0$ 且 $G_j=\mathfrak{L}_j\circ F$ 有表达式 $G_j(z)=\log z$. 因为 F 与除子 D 相容, 我们可以选择 q_j 的一个邻域 U_j 和 U_j 上的复坐标 x, 使得 $x(q_j)=0$ 且

$$\{F,x\} = \frac{1}{2x^2} + \frac{d_j}{x} + \phi_j(x),$$

其中 $\phi_j(x)$ 在 U_j 中是全纯的. 和上面的证明类似, 指数方程

$$f(s) = s(s-1)+\frac{1}{4} = 0$$

有两个根 $s_1=s_2=\frac{1}{2}$. 下面的表达式

$$u_{\log} = u(s_2,x)\log x + x^{s_2}\sum_{k\geqslant 0} c_k'(s_2)x^k$$

是 $L_j u=0$ 的一个解, 因此 $u_{\log}$, $u(s_2,x)$ 是 $L_j u=0$ 在 $x=0$ 附近的两个线性无关解. 不妨设

$$F(x)=\frac{au_{\log}+bu(s_2,x)}{cu_{\log}+du(s_2,x)}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\circ\frac{u_{\log}}{u(s_2,x)},$$

其中

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}),\quad \frac{u_{\log}}{u(s_2,x)}=\log x+\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k'(s_2)x^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(s_2)x^k}=\log x+\psi(x),$$

$\psi(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内全纯, $\psi(0)=0$. 令 $z=x\mathrm{e}^{\psi(x)}$, 则 $\log z=\log x+\psi(x)$, $F=\frac{a\log z+b}{c\log z+d}$.

至此, 我们已经完成了引理第一个论断的证明. 至于第二个论断, 因为 F 在 Σ^* 上是局部单叶的, 且它的单值化群包含于群 PSU(1,1), $F^*\mathrm{d}\sigma_0^2$ 是 $\Sigma\backslash\mathrm{supp}\,D$ 上定义良好的光滑共形双曲度量. 上面第一个论断的证明表明此度量在 p_i 处有角度为 $2\pi\alpha_i$ 的锥奇点, 在 q_j 处为尖奇点.

注 2.1　在上半平面模型 $\mathbb{H}$ 上存在类似于上述引理的版本, 现将其陈述如下并应用于下一节.

设 $F:\Sigma\backslash\mathrm{supp}\,D\longrightarrow\mathbb{H}$ 是与除子 $\mathrm{D}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i-1)p_i-\sum\limits_{j=1}^{m}q_j$, $0<\alpha_j\neq 1$ 相容的射影函数, 它的单值化群包含于群 PSL(2,R), 那么存在 p_i 的一个邻域 U_i, 相应的复坐标系 z 和 $\mathfrak{L}_i\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, 使得 $z(p_i)=0$ 且 $G_i=\mathfrak{L}_i\circ F$ 有表达式 $G_i(z)=z^{\alpha_i}$; 存在 q_j 的一个邻域 U_j, 相应的复坐标系 z 和 $\mathfrak{L}_j\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, 使得 $z(q_j)=0$ 且 $G_j=\mathfrak{L}_j\circ F$ 有表达式 $G_j(z)=\log z$. 而且把 $\mathbb{H}$ 上的双曲度量 $\mathrm{d}\sigma_0^2=\frac{|\mathrm{d}z|^2}{(\mathrm{Im}\,z)^2}$ 通过 F 拉回的度量 $F^*\mathrm{d}\sigma_0^2$ 是 $\Sigma\backslash\mathrm{supp}\,D$ 上的表示 D 的共形双曲度量.

3　主定理的证明

首先证明定理的第一部分. 设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是在去心圆盘 $\triangle^*=\{w\in\mathbb{C}\mid 0<|w|<1\}$ 上的共形双曲度量, $\mathrm{d}\sigma^2$ 在 $w=0$ 处有一个角度为 $2\pi\alpha>0$ 的锥奇点, 不妨设这一点为 p. 由引理 2.1, 在 $\triangle^*$ 上存在一个从 Δ^* 到单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的射影函数 F, 使得 F 的单值化群包含于群 PSU(1,1) 且 $\mathrm{d}\sigma^2=F^*(\mathrm{d}\sigma_0^2)$, 其中 $\mathrm{d}\sigma_0^2=\frac{4|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的双曲度量. 因此得到 F 的一个单值化表示 $\rho_F:\pi_1(\triangle^*)\longrightarrow\mathrm{PSU}(1,1)$, 其中 $\pi_1(\triangle^*)\cong\mathbb{Z}$. 记 $\rho_F(e)$ 为 $\mathfrak{L}$, 其中 e 是指闭曲线 $t\mapsto\frac{1}{2}\exp(2\pi\sqrt{-1}t)$, $t\in[0,1]$ 的同伦类. 由引理 2.4, 存在 p 的一个邻域 U, 相应的复坐标系 ξ 和 $\mathrm{j}\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, 使得 $\xi(p)=0$ 且 $J=\mathrm{j}\circ F$ 有表达式 $J(\xi)=\xi^{\alpha}$, 其中 $\alpha>0$. 我们将这一部分分为以下两种情况.

(1) 若 α 是一个整数, 则 F 在点 p 处的局部单值化群是平凡的. 全纯映射 $F:\triangle^*\longrightarrow\mathbb{D}$

有一个在 Δ 上的全纯扩张. 设 $\alpha = n \in \mathbb{Z} > 1$, 则

$$F(\xi) = \frac{a\xi^n + b}{c\xi^n + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}).$$

不妨设 $F(0) = 0$, 则 $b = 0$, $d \neq 0$, $F(\xi) = \frac{a}{c\xi^n + d}\xi^n$. 因此我们可以选择 U 上的另一个复坐标 $z = z(\xi)$, 使得 $F = F(z) = z^n$. 因为 p 的 z 坐标与 ξ 坐标都为 0, 由连续性, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\Delta_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\} \subset U$. 在 Δ_ε 上, 由 $\mathrm{d}\sigma^2 = F^*(\mathrm{d}\sigma_0^2)$, 得

$$\mathrm{d}\sigma^2|_{\Delta_\varepsilon} = \frac{4n^2|z|^{2n-2}}{(1-|z|^{2n})^2}|\mathrm{d}z|^2.$$

(2) 当 α 不是整数时, 注意到 $\rho_F(e) = \mathfrak{L} \in \mathrm{PSU}(1,1)$. 我们将这种情况又分为以下 3 种情况.

(i) 若 $\mathfrak{L}$ 是椭圆变换, 则存在 $\mathfrak{K} \in \mathrm{PSU}(1,1)$, 使得 $\mathfrak{K} \circ \mathfrak{L} \circ \mathfrak{K}^{-1}(\xi) = \mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\theta}\xi$, 其中 θ 是某一实数, 那么 $G = \mathfrak{K} \circ F$ 也是展开映射. 不妨设 $\mathfrak{g} = \frac{a\xi^\alpha + b}{c\xi^\alpha + d}$, $ad - bc = 1$ 为 G 在点 p 附近一个不含 p 的开圆盘内的一个单值分支, 则

$$\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\theta}\mathfrak{g} = \mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\theta}\frac{a\xi^\alpha + b}{c\xi^\alpha + d} = \frac{a\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\xi^\alpha + b}{c\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\xi^\alpha + d}.$$

这等价于下面的等式成立:

$$\begin{cases} ac\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}(1 - \mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\theta}) = 0, \\ (ad\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\alpha} + bc) - \mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\theta}(bc\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\alpha} + ad) = 0, \\ bd(1 - \mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\theta}) = 0. \end{cases}$$

解这个方程组, 得出 $c = b = 0$ 或 $a = d = 0$. 若 $a = d = 0$, 则 $\mathfrak{g} = \frac{b}{c\xi^\alpha}$, 这与 $G : \triangle^* \longrightarrow \mathbb{D}$ 矛盾, 故 $c = b = 0$. 因此 $\mathfrak{g}(\xi)$ 等于 $\mu\xi^\alpha (\mu \neq 0)$. $\mathfrak{g}(0)$ 等于 0. 这时, 我们可以选择点 p 附近的另一个复坐标 z, 使得 $\mathfrak{g}(z) = z^\alpha$. 因为 p 的 z 坐标与 ξ 坐标都为 0, 由连续性, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得在 $\Delta_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\}$ 上, 有

$$\mathrm{d}\sigma^2|_{\Delta_\varepsilon} = \frac{4\alpha^2|z|^{2\alpha-2}}{(1-|z|^{2\alpha})^2}|\mathrm{d}z|^2.$$

对于双曲和抛物变换, 在上半平面模型 $\mathbb{H}$ 中考虑更为方便. 在 $\triangle^*$ 上存在一个射影函数 $F : \triangle^* \longrightarrow \mathbb{H}$, 满足 $\mathrm{d}\sigma^2 = F^*(\mathrm{d}\sigma_0^2)$, 其中 $\mathrm{d}\sigma_0^2 = \frac{|\mathrm{d}z|^2}{(\mathrm{Im}\, z)^2}$ 是 $\mathbb{H}$ 上的双曲度量, 而且 F 的单值化群包含于群 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. 因此, 我们得到 F 的一个单值化表示 $\rho_F : \pi_1(\triangle^*) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, $\pi_1(\triangle^*) \cong \mathbb{Z}$. 记 $\rho_F(e)$ 为 $\mathfrak{L}$.

(ii) 若 $\mathfrak{L}$ 是双曲变换, 则存在 $\mathfrak{K} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, 使得 $\mathfrak{K} \circ \mathfrak{L} \circ \mathfrak{K}^{-1}(\xi) = \lambda\xi$, 其中 λ 是某一正实数, 那么 $G = \mathfrak{K} \circ F$ 也是展开映射. 不妨设 $\mathfrak{g} = \frac{a\xi^\alpha + b}{c\xi^\alpha + d}$, $ad - bc = 1$ 为 G 在点 p 附近一个不含 p 的开圆盘内的一个单值分支, 则

$$\lambda\mathfrak{g} = \lambda\frac{a\xi^\alpha + b}{c\xi^\alpha + d} = \frac{a\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\xi^\alpha + b}{c\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\xi^\alpha + d}.$$

这等价于下面的等式成立:

$$\begin{cases} ace^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}(1-\lambda)=0, \\ (ade^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}+bc)-\lambda(bce^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}+ad)=0, \\ bd(1-\lambda)=0. \end{cases}$$

因为 λ 是不等于 1 的正实数且 $ad-bc=1$, 这个方程组无解, 得出矛盾.

(iii) 若 $\mathfrak{L}$ 是抛物变换, 则存在 $\mathfrak{K}\in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, 使得 $\mathfrak{K}\circ\mathfrak{L}\circ\mathfrak{K}^{-1}(\xi)=\xi+t$, 其中 t 是某一非零实数, 那么 $G=\mathfrak{K}\circ F$ 也是展开映射. 不妨设 $\mathfrak{g}=\frac{a\xi^\alpha+b}{c\xi^\alpha+d}$, $ad-bc=1$ 为 G 在点 p 附近一个不含 p 的开圆盘内的一个单值分支, 则

$$\mathfrak{g}+t=\frac{a\xi^\alpha+b}{c\xi^\alpha+d}+t=\frac{ae^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\xi^\alpha+b}{ce^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\xi^\alpha+d}.$$

这等价于下面的等式成立:

$$\begin{cases} tc^2e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}=0, \\ ad+tcd-bc+(bc+tcd-ad)e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}=0, \\ td^2=0. \end{cases}$$

因为 $t\neq 0$, 解得 $c=d=0$, 但 $ad-bc=1$, 矛盾.

下证定理第一部分中坐标 z 的唯一性. 不妨设 z, $\widetilde{z}$ 都是满足定理条件的复坐标, 则 $F(z)=z^\alpha$, $\widetilde{F}(\widetilde{z})=\widetilde{z}^\alpha$ 都是度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的展开映射. 由引理 2.2, 存在 $\mathfrak{L}\in$PSU(1,1), 使得 $\widetilde{F}=\mathfrak{L}\circ F$, 则 $\widetilde{F}=\frac{aF+b}{\overline{b}F+\overline{a}}$, $|a|^2-|b|^2=1$. 因为在 z, $\widetilde{z}$ 坐标下, $p=0$, $F(p)=\widetilde{F}(p)=0$, 计算得 $b=0$. 故 $\widetilde{F}=\frac{a}{\overline{a}}F=\mu F$, $|\mu|=1$, 则 $\widetilde{z}^\alpha=\mu z^\alpha$ 在点 p 附近一个不含 p 的开圆盘 V 内成立, 那么 $\widetilde{z}=\lambda z$, $|\lambda|=1$ 在 V 内成立. 因为 z, $\widetilde{z}$, w 是点 p 附近的复坐标, z , $\widetilde{z}$ 是 w 的全纯函数, 则 $\widetilde{z}=\lambda z, |\lambda|=1$ 在点 p 的一个邻域内成立.

下面证明定理的第二部分. 设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是在去心圆盘 $\triangle^*=\{w\in\mathbb{C}\mid 0<|w|<1\}$ 上的共形双曲度量, $\mathrm{d}\sigma^2$ 在 $w=0$ 处有一个尖奇点, 不妨设这一点为 q. 由引理 2.1, 在 $\triangle^*$ 上存在一个从 Δ^* 到单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的射影函数 F, 使得 F 的单值化群包含于群 PSU(1,1) 且 $\mathrm{d}\sigma^2=F^*(\mathrm{d}\sigma_0^2)$, 其中 $\mathrm{d}\sigma_0^2=\frac{4|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的双曲度量. 因此得到 F 的一个单值化表示 $\rho_F:\pi_1(\triangle^*)\longrightarrow \mathrm{PSU}(1,1)$, 其中 $\pi_1(\triangle^*)\cong\mathbb{Z}$. 记 $\rho_F(e)$ 为 $\mathfrak{L}$. 由引理 2.4, 存在 q 的一个邻域 U, 相应的复坐标系 ξ 和 $\mathrm{j}\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, 使得 $\xi(q)=0$ 且 $J=\mathrm{j}\circ F$ 有表达式 $J(\xi)=\log\xi$. 我们将这一部分分为以下 3 种情况.

(1) 若 $\mathfrak{L}$ 是椭圆变换, 则存在 $\mathfrak{K}\in\mathrm{PSU}(1,1)$, 使得 $\mathfrak{K}\circ\mathfrak{L}\circ\mathfrak{K}^{-1}(\xi)=e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}\xi$, 其中 θ 是某一实数, 那么 $G=\mathfrak{K}\circ F$ 也是展开映射. 设

$$G(\xi)=\frac{a\log\xi+b}{c\log\xi+d},\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}).$$

不妨设 $\mathfrak{g}=\frac{a\log\xi+b}{c\log\xi+d}$, $ad-bc=1$ 为 G 在点 q 附近一个不含 q 的开圆盘内的一个单值分支, 则

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}\mathfrak{g}=e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}\frac{a\log\xi+b}{c\log\xi+d}=\frac{a(\log\xi+2\pi\sqrt{-1})+b}{c(\log\xi+2\pi\sqrt{-1})+d}.$$

这等价于下面的等式成立:

$$\begin{cases} ac(1-\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\theta})=0, \\ (ac2\pi\sqrt{-1}+ad+bc)(1-\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\theta})=0, \\ (ad-\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\theta}bc)2\pi\sqrt{-1}+(1-\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\theta})bd=0. \end{cases}$$

解这个方程组, 得出 $a=b=0$ 或 $c=d=0$. 但是 $ad-bc=1$, 矛盾.

对于双曲和抛物变换, 同第一部分的证明, 在上半平面模型 $\mathbb{H}$ 中考虑更为方便.

(2) 若 $\mathfrak{L}$ 是双曲变换, 则存在 $\mathfrak{K}\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, 使得 $\mathfrak{K}\circ\mathfrak{L}\circ\mathfrak{K}^{-1}(\xi)=\lambda\xi$, 其中 λ 是某一正实数, 那么 $G=\mathfrak{K}\circ F$ 也是展开映射. 设

$$G(\xi)=\frac{a\log\xi+b}{c\log\xi+d},\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}).$$

不妨设 $\mathfrak{g}=\frac{a\log\xi+b}{c\log\xi+d}$, $ad-bc=1$ 为 G 在点 q 附近一个不含 q 的开圆盘内的一个单值分支, 则

$$\lambda\mathfrak{g}=\lambda\frac{a\log\xi+b}{c\log\xi+d}=\frac{a(\log\xi+2\pi\sqrt{-1})+b}{c(\log\xi+2\pi\sqrt{-1})+d}.$$

这等价于下面的等式成立:

$$\begin{cases} ac(1-\lambda)=0, \\ (ac2\pi\sqrt{-1}+ad+bc)(1-\lambda)=0, \\ \lambda b(c2\pi\sqrt{-1}+d)-d(a2\pi\sqrt{-1}+b)=0. \end{cases}$$

因为 λ 是不等于 1 的正实数, 解得 $a=b=0$ 或 $c=d=0$. 但是 $ad-bc=1$, 矛盾.

(3) 若 $\mathfrak{L}$ 是抛物变换, 则存在 $\mathfrak{K}\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, 使得 $\mathfrak{K}\circ\mathfrak{L}\circ\mathfrak{K}^{-1}(\xi)=\xi+t$, 其中 t 是某一非零实数, 那么 $G=\mathfrak{K}\circ F$ 也是展开映射. 设

$$G(\xi)=\frac{a\log\xi+b}{c\log\xi+d},\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}).$$

不妨设 $\mathfrak{g}=\frac{a\log\xi+b}{c\log\xi+d}$, $ad-bc=1$ 为 G 在点 q 附近一个不含 q 的开圆盘内的一个单值分支, 则

$$\mathfrak{g}+t=\frac{a\log\xi+b}{c\log\xi+d}+t=\frac{a(\log\xi+2\pi\sqrt{-1})+b}{c(\log\xi+2\pi\sqrt{-1})+d}.$$

这等价于下面的等式成立:

$$\begin{cases} tc^2=0, \\ 2tc(c\pi\sqrt{-1}+d)=0, \\ td(c2\pi\sqrt{-1}+d)-2\pi\sqrt{-1}=0. \end{cases}$$

因为 $t\neq 0$, 解得 $c=0$, $td^2=2\pi\sqrt{-1}$. 因为 $ad-bc=1$, 则 $ad=1$, $t=a^2 2\pi\sqrt{-1}$. 因为 t 是非零实数, 不妨设 $a^2=\sqrt{-1}\delta$, 其中 δ 是非零实数. $\mathfrak{g}(\xi)=a^2\log\xi+ab=a^2\big(\log\xi+\frac{b}{a}\big)$, 令 $z=\xi\mathrm{e}^{\frac{b}{a}}$, 则 $\log z=\log\xi+\frac{b}{a}$, $\mathfrak{g}(z)=a^2\log z=\sqrt{-1}\delta\log z$. 若 $\delta>0$, 令 $H=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\delta}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\delta} \end{pmatrix}\circ G$,

则 $H(z)=\sqrt{-1}\log z$ 也应是展开映射. 但这与 $H:\triangle^*\longrightarrow\mathbb{H}$ 矛盾! 故 $\delta<0$, 令 $H=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{-\delta}} & 0\\ 0 & \sqrt{-\delta}\end{pmatrix}\circ G$, 则 $H(z)=-\sqrt{-1}\log z$ 也是展开映射. 因为 q 的 z 坐标与 ξ 坐标都为 0, 由连续性, 存在 $\varepsilon>0$, 使得在 $\Delta_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<\varepsilon\}$ 上, 有

$$\mathrm{d}\sigma^2|_{\Delta_\varepsilon}=|z|^{-2}(\ln|z|)^{-2}|\mathrm{d}z|^2.$$

最后证明定理第二部分中坐标 z 的唯一性. 设 z, $\widetilde{z}$ 都是满足定理条件的复坐标, 则 $F(z)=-\sqrt{-1}\log z$, $\widetilde{F}(\widetilde{z})=-\sqrt{-1}\log\widetilde{z}$ 都是度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的展开映射. 由引理 2.2, 存在 $\mathfrak{L}\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, 使得 $\widetilde{F}=\mathfrak{L}\circ F$, 则 $\widetilde{F}=\frac{aF+b}{cF+d}$, $ad-bc=1$. 因为在 z, $\widetilde{z}$ 坐标下, $p=0$, $F(p)=\widetilde{F}(p)=\infty$, 计算得 $c=0$. 故 $\widetilde{F}=\frac{aF+b}{d}=a^2F+ab$, 则 $-\sqrt{-1}\log\widetilde{z}=-a^2\sqrt{-1}\log z+ab$, 故有 $a^2=1$, $\log\widetilde{z}=\log z+ab\sqrt{-1}$ 在点 q 附近一个不含 q 的开圆盘 V 内成立, 那么 $\widetilde{z}=\lambda z$, $|\lambda|=1$ 在 V 内成立. 因为 z, $\widetilde{z}$, w 是点 q 附近的复坐标, z, $\widetilde{z}$ 是 w 的全纯函数, 则 $\widetilde{z}=\lambda z$, $|\lambda|=1$ 在点 q 的一个邻域内成立.

致谢 2016 年夏天许斌与加州大学伯克利分校孙崧教授的讨论启发我们证明主定理. 许斌对孙崧教授表示衷心感谢.

参　考　文　献

[1] Nitsche J. Über die isolierten singularitäten der Lösungen von $\Delta u=\mathrm{e}^u$ [J]. *Math Z*, 1957, 68(3):316–324.

[2] Heins M. On a class of conformal metrics [J]. *Nagoya Math J*, 1962, 21:1–60.

[3] Yamada A. Bounded analytic functions and metrics of constant curvature of Riemann surfaces [J]. *Kodai Math J*, 1988, 11:317–324.

[4] McOwen R. Point singularities and conformal metrics on Riemann surfaces [J]. *Proc AMS*, 1988, 103:222–224.

[5] Troyanov M. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities [J]. *Trans AMS*, 1991, 324:793–821.

[6] Chen Q, Wang W, Wu Y Y, et al. Conformal metrics with constant curvature one and finitely many conical singularities on compact Riemann surface [J]. *Pacific Journal of Mathematics*, 2015, 273(1):75–100.

[7] Ratcliffe J G. Foundations of hyperbolic manifolds(2nd edition) [M]. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2006.

[8] Anderson J W. Hyperbolic Geometry(2nd edition) [M]. London: Springer-Verlag, 2005.

[9] Beardon A F. The geometry of discrete groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[10] Li B, Li L, Xu B. Hyperbolic metrics and bounded projective functions with isolated singularities [J]. arXiv: 1709.03112[math.DG], 2017.

[11] Yoshida M. Fuchsian differential equations: with special emphasis on the Gauss-Schwarz theory [M]. Braunschweig: Vieweg, 1987.

Isolated Singularities of Conformal Hyperbolic Metrics

FENG Yu[1] SHI Yiqian[1] XU Bin[2]

[1]School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China.
E-mail: yuf@mail.ustc.edu.cn; yqshi@ustc.edu.cn

[2]Corresponding author. School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China.
E-mail: bxu@ustc.edu.cn

Abstract Nitsche proved that an isolated singularity of a conformal hyperbolic metric is either a conical singularity or a cusp one (Nitsche, J., Über die isolierten singularitäten der Lösungen von $\Delta u = \mathrm{e}^u$, *Math. Z*, 1957, vol. 68, no. 3, pp. 316–324.). The authors prove that there exists a complex coordinate z centered at the singularity where the metric has the expression of either $\dfrac{4\alpha^2|z|^{2\alpha-2}}{(1-|z|^{2\alpha})^2}|\mathrm{d}z|^2$ with $\alpha > 0$ or $|z|^{-2}\big(\ln|z|\big)^{-2}|\mathrm{d}z|^2$ by developing map.

Keywords Hyperbolic metric, Conical singularity, Cusp singularity, Developing map

2000 MR Subject Classification 51M10, 34M35

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 1, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA