数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(1):55–78
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0006

一类耗散型电流体动力学方程组自相似解的渐近稳定性*

赵继红[1] 李秀蓉[2]

提要 主要考虑一类来源于电流体动力学中的由非线性非局部方程组耦合而成的耗散型系统的初值问题. 利用 Lorentz 空间中广义 L^p-L^q 热半群估计和广义 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式, 首先证明了该系统在 Lorentz 空间中自相似解的整体存在性和唯一性, 然后建立了自相似解当时间趋于无穷时的渐近稳定性. 因为 Lorentz 空间包含了具有奇性的齐次函数, 因次上述结果保证了具有奇性的初值所对应的自相似解的整体存在性和渐近稳定性.

关键词 电流体动力学方程组, Lorentz 空间, 自相似解, 渐近稳定性
MR (2010) 主题分类 35B40, 35C06, 35K15, 35Q35
中图法分类 O175.21
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)01-0055-24

1 引 言

本文主要研究如下由电动力学中的 Poisson-Nernst-Planck 方程组和流体力学中的不可压 Navier-Stokes 方程组耦合而成的非线性耗散型系统 ($n \geqslant 3$):

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} - \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nabla P = \Delta\phi\nabla\phi, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \partial_t v - \Delta v + \boldsymbol{u} \cdot \nabla v = -\nabla \cdot (v\nabla\phi), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \partial_t w - \Delta w + \boldsymbol{u} \cdot \nabla w = \nabla \cdot (w\nabla\phi), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \Delta\phi = v - w, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

并赋予如下初值:

$$(\boldsymbol{u}, v, w)|_{t=0} = (\boldsymbol{u}_0, v_0, w_0), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

系统 (1.1)–(1.2) 由 Rubinstein 于 20 世纪末在文 [1] 中首次提出, 主要用来刻画等温不可压粘性流体中速度场和带电离子密度函数之间的相互作用, 从而更好地理解和掌握流场和电场相互作用的发展演变原理. 方程组 $(1.1)_1$–$(1.1)_2$ 表示以 $\Delta\phi\nabla\phi$ 为外力项的不可压 Navier-Stokes 方程组. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t)$ 和 $P = P(x,t)$ 分别表示速度场和压力场, $\phi = \phi(x,t)$ 表示电子静电势.

本文 2017 年 3 月 27 日收到, 2018 年 1 月 3 日收到修改稿.

[1]通信作者. 宝鸡文理学院数学与信息科学学院, 陕西 宝鸡 721013; 西北农林科技大学理学院, 陕西 杨凌 712100. E-mail: jihzhao@163.com

[2]西北农林科技大学理学院, 陕西 杨凌 712100. E-mail: 18435154219@163.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11501453) 和陕西省自然科学基金 (No. 2018JM1004, No. 2017JM1016) 的资助.

方程组 $(1.1)_3$–$(1.1)_5$ 是电动力学中的 Poisson-Nernst-Planck 方程组, 主要刻画带电离子密度函数在流场和电场作用下的漂移、扩散和对流现象[2]. $v=v(x,t)$ 和 $w=w(x,t)$ 分别表示流体中带正电荷和负电荷离子的密度函数. Poisson 方程 $(1.1)_5$ 的右端表示净电荷密度.

本文的主要目的是在全空间 $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 3)$ 上证明上述系统 (1.1)–(1.2) 自相似解的整体存在性和渐近稳定性. 注意到其子系统 Poisson-Nernst-Planck 方程组在过去的几十年已被众多学者所研究, 现已有很多关于弱解、强解和古典解的局部和整体存在性结果. 例如, 其 Neumann 边值问题稳态解的存在性和渐近稳定性已由 Mock 在文 [3–4] 中证明; 其 no-flux 边值问题弱解的局部和整体存在性, 稳态解的渐近稳定性则由 Biler-Hebisch-Nadzieja[5]和 Biler-Dolbeault[6]等人建立. 对于 Poisson-Nernst-Planck 方程组的初值问题, Karch 在文 [7] 中建立了临界 Besov 空间 $\dot{B}^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)(-1<s<0,\ p=\frac{n}{s+2})$ 中小初值问题的整体存在性和唯一性. Kurokiba-Ogawa 在文 [8] 中建立了 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间中小初值问题的整体适定性和大初值问题的局部适定性. 特别地, 在二维情形下, Ogawa-Shimizu 在文 [9–10] 中分别建立了临界 Hardy 空间 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ 和临界 Besov 空间 $\dot{B}^0_{1,2}(\mathbb{R}^2)$ 空间中小初值问题的整体适定性. 最近, Zhao-Liu-Cui 在文 [11] 中将 Karch 在文 [7] 中的结果推广至了范围更广的 Besov 空间 $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $-\frac{3}{2}<s\leqslant -2+\frac{n}{2}$, $p=\frac{n}{s+2}$, $1\leqslant q\leqslant\infty$.

就我们所知, 系统 (1.1) 严格的数学分析始于文 [12], 此文中 Jerome 利用 Kato 半群理论证明了系统 (1.1)–(1.2) 存在唯一的局部光滑解. 最近, 关于系统 (1.1) 的各类初边值问题整体弱解的存在性已经由诸多作者建立, 例如, 混合 Dirichlet 初边值问题见 Jerome-Sacco[13], no-flux 初边值问题见 Ryham[14], Neumann 初边值问题见 Schmuck[15]. 对于初值问题 (1.1)–(1.2), Zhao-Deng-Cui 在文 [16] 中建立了临界 Lebesgue 空间中小初值问题的整体适定性和一般初值问题的局部适定性; Zhang-Yin 在文 [17] 中证明了二维情形下一般初值问题的整体适定性; Zhao-Liu 在文 [18] 中利用 Fourier 局部化方法和插值不等式在齐次 Besov 空间框架下建立了整体解的最优衰减估计. 对于系统 (1.1)–(1.2)(以及更一般的电流体动力学模型) 整体弱解的正则性、唯一性和局部光滑解的爆破准则, 读者可以参见文 [19–22] 及其后的参考文献.

本文我们主要建立系统 (1.1)–(1.2) 在 Lorentz 空间 $[L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)]^n\times[L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)]^2$($q$ 和 p 满足一定的条件) 中自相似解的整体存在性和渐近稳定性. 我们先来分析系统 (1.1) 满足的伸缩不变性. 令

$$(\boldsymbol{u}_\lambda,v_\lambda,w_\lambda,P_\lambda,\phi_\lambda)(x,t):=(\lambda\boldsymbol{u},\lambda^2v,\lambda^2w,\lambda^2P,\phi)(\lambda x,\lambda^2t). \tag{1.3}$$

显然, 若 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 是系统 (1.1) 对应于初值 $(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)$ 的解 (P 和 ϕ 由 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 唯一确定), 则 $(\boldsymbol{u}_\lambda,v_\lambda,w_\lambda)$ 是系统 (1.1) 对应于初值 $(\boldsymbol{u}_{0\lambda},v_{0\lambda},w_{0\lambda})$ 的解 (P_λ 和 ϕ_λ 由 $(\boldsymbol{u}_\lambda,v_\lambda,w_\lambda)$ 唯一确定), 其中

$$\boldsymbol{u}_{0\lambda}(x):=\lambda\boldsymbol{u}_0(\lambda x),\quad v_{0\lambda}(x):=\lambda^2v_0(\lambda x),\quad w_{0\lambda}(x):=\lambda^2w_0(\lambda x).$$

如果对任意的 $\lambda>0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t\geqslant 0$, 有

$$\boldsymbol{u}(x,t)=\boldsymbol{u}_\lambda(x,t),\quad v(x,t)=v_\lambda(x,t),\quad w(x,t)=w_\lambda(x,t)$$

成立, 则我们称系统 (1.1)–(1.2) 的解 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 为自相似解.

注意到若 $(\boldsymbol{u}, v, w)$ 是系统 (1.1)–(1.2) 的自相似解, 则有

$$\boldsymbol{u}_0(\lambda x) = \lambda^{-1}\boldsymbol{u}_0(x), \quad v_0(\lambda x) = \lambda^{-2} v_0(x), \quad w_0(\lambda x) = \lambda^{-2} w_0(x),$$

即 $\boldsymbol{u}_0$ 是度数为 -1 的齐次函数, v_0 和 w_0 是度数为 -2 的齐次函数. 由于此类函数在 $x=0$ 处的强奇性和 $|x|\to\infty$ 时的缓慢衰减, 所以不属于任何的 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间. 另一方面在文 [23] 中, Tian-Xin 对于具有零外力的三维不可压 Navier-Stokes 方程组, 构造出了一类含单参数稳态解的显式解, 这类解整体存在但不光滑, 其在坐标原点具有形如 $\sim \frac{1}{|x|}$ 的奇性. 由于 $\frac{1}{|x|} \notin L^n(\mathbb{R}^n)$, 但有 $\frac{1}{|x|} \in L^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)$, 所以 Lorentz 空间 $L^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 是包含此类奇性函数最自然的函数空间. 注意到不可压 Navier-Stokes 方程组在临界 Lorentz 空间中的整体存在性、正则性和稳定性已由 Barraza[24−25]和 Yamazaki[26]分别建立, 因此, 本文将利用 Lorentz 空间上的广义热半群 L^p-L^q 估计和广义 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式, 把文 [24–27] 中的结果推广至更复杂的非线性耦合系统 (1.1)–(1.2). 需要强调的是, 一旦我们在 Lorentz 空间中证明了解的整体存在性, 则由解的唯一性即得自相似解的存在性, 并且基于弱收敛方法和 Lebesgue 控制收敛定理, 我们可以建立当时间 t 趋于无穷时自相似解的渐近稳定性.

为简化问题, 我们将系统 (1.1)–(1.2) 约化为相应的积分系统. 为此先求解方程 $(1.1)_5$, 可得

$$\phi = (-\Delta)^{-1}(w-v) = K * (w-v), \tag{1.4}$$

其中

$$K(x) = \frac{1}{4}\pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma\Big(\frac{n}{2}-1\Big)|x|^{-(n-2)}, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

其次为消去压力项 P, 我们在方程组 $(1.1)_1$ 的左右两端同时作用 Leray 投影算子 $\mathbb{P}$, 并利用上述 (1.4), 可将方程组 $(1.1)_1$–$(1.2)_2$ 转化为如下的等价方程组:

$$\partial_t \boldsymbol{u} - \Delta \boldsymbol{u} + \mathbb{P}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = \mathbb{P}(v-w)\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v),$$

其中 Leray 投影算子 $\mathbb{P}$ 由下式确定:

$$\mathbb{P} = I + \nabla(-\Delta)^{-1}\,\mathrm{div},$$

即 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上以 $\widehat{\mathbb{P}}(\xi) = (\delta_{jk} - \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2})_{j,k=1}^n$ 为象征的 $n\times n$ 阶拟微分矩阵算子. 由奇异积分算子理论可知 $\mathbb{P}$ 是 Lebesgue 空间 $[L^p(\mathbb{R}^n)]^n (1<p<\infty)$ 和 Lorentz 空间 $[L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)]^n (1<p<\infty)$ 上的有界线性算子. 最后, 利用著名的 Duhamel 原理, 我们可以将系统 (1.1)–(1.2) 进一步约化为下面的积分系统:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0 + \mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + \mathcal{B}_2(v-w, w-v), \\ v = \mathrm{e}^{t\Delta} v_0 + \mathcal{B}_3(\boldsymbol{u}, v) + \mathcal{B}_4(v, w-v), \\ w = \mathrm{e}^{t\Delta} w_0 + \mathcal{B}_3(\boldsymbol{u}, w) + \mathcal{B}_4(w, v-w), \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $\mathrm{e}^{t\Delta}$ 表示核函数为 $G(t,x)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\exp\big(-\frac{|x|^2}{4t}\big)$ 的热算子, 且

$$\begin{cases}\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}):=-\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\mathrm{d}\tau,\\ \mathcal{B}_2(v,w):=\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}v(\nabla(-\Delta)^{-1}w)\mathrm{d}\tau,\\ \mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v):=-\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot(\boldsymbol{u}v)\mathrm{d}\tau,\\ \mathcal{B}_4(v,w):=-\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot(v\nabla(-\Delta)^{-1}w)\mathrm{d}\tau.\end{cases}$$

在陈述本文的主要结果之前, 先介绍文中所需的函数空间. 令 $\mathbf{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n)=[L^{p,q}(\mathbb{R}^n)]^n$, 并用 $\mathbb{P}\mathbf{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 表示由空间 $\mathbf{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 中所有散度为零的函数构成的子空间, 即

$$\mathbb{P}\mathbf{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n):=\{\boldsymbol{u}:\ \boldsymbol{u}\in\mathbf{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n)\ \ 且\ \ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0\}.$$

在上述记号下, 易知 $\mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)\times[L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)]^2$ 是系统 (1.1)–(1.2) 的临界 Lorentz 空间. 在临界情形下, 任取 $n<q\leqslant 2n$, 我们寻求系统 (1.1)–(1.2) 的解, 使得速度场 $\boldsymbol{u}$ 属于

$$\mathcal{X}:=\{\boldsymbol{u}:\ \boldsymbol{u}\in C_w([0,\infty),\mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n))\ \ 且\ \ t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\boldsymbol{u}\in C_w((0,\infty),\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n))\},$$

其上范数定义为 $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X}}:=\sup\limits_{t\geqslant0}\|\boldsymbol{u}(t)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}}+\sup\limits_{t>0}t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(t)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}$; 带电离子密度函数 v 和 w 属于

$$\mathcal{Y}:=\{v:\ v\in C_w([0,\infty),L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n))\ \ 且\ \ t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}v\in C_w((0,\infty),L^{\frac{nq}{n+q},\infty}(\mathbb{R}^n))\},$$

其上范数定义为 $\|v\|_{\mathcal{Y}}:=\sup\limits_{t\geqslant0}\|v(t)\|_{L^{\frac{n}{2},\infty}}+\sup\limits_{t>0}t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|v(t)\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}}$. 简单起见, 我们分别用 $\|\cdot\|_{\mathcal{X},1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{X},2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Y},1}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{Y},2}$ 表示空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 中对应的两部分范数. 另一方面, 系统 (1.1)–(1.2) 所对应的次临界 Lorentz 空间为 $\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)\times[L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)]^2$, 其中 $n<q<\infty$, $\frac{n}{2}<p<\infty$. 在次临界情形下, 令 T 为固定的正常数, 对应于系统 (1.1)–(1.2) 的解 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 所属的空间为

$$\mathcal{Z}_T:=\{(\boldsymbol{u},v,w):\ \boldsymbol{u}(t)\in C_w([0,T),\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)),\quad v,w\in C_w([0,T),L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n))\},$$

其上范数定义为 $\|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathcal{Z}_T}:=\sup\limits_{0\leqslant t<T}\|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}\times[L^{p,\infty}]^2}$. 基于上述函数空间的引入, 我们给出系统 (1.1)–(1.2) 温和解的定义如下.

定义 1.1 设 $n\leqslant q<\infty$, $\frac{n}{2}\leqslant p<\infty$. 称向量值函数 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 为系统 (1.1)–(1.2) 的温和解, 若对于某个 $0<T\leqslant\infty$, 有

$$\boldsymbol{u}\in C_w([0,T),\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)),\quad v,w\in C_w([0,T),L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)),$$

并且对于任意的函数 $\varphi\in\mathbb{P}\mathbf{L}^{q',1}(\mathbb{R}^n)$, $\psi\in L^{p',1}(\mathbb{R}^n)$, 有如下的等式对于所有的 $0\leqslant t<T$ 成立:

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{u}(t),\varphi\rangle=\langle\boldsymbol{u}_0,\mathrm{e}^{t\Delta}\varphi\rangle&+\int_0^t\langle[\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}](\tau),\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\mathbb{P}\varphi(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t\langle[(v-w)\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)](\tau),\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\varphi(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\langle v(t),\psi\rangle &= \langle v_0, \mathrm{e}^{t\Delta}\psi\rangle + \int_0^t \langle [\boldsymbol{u}v](\tau), \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\psi(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau \\ &\quad + \int_0^t \langle [v\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)](\tau), \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\psi(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}\langle w(t),\psi\rangle &= \langle w_0, \mathrm{e}^{t\Delta}\psi\rangle + \int_0^t \langle [\boldsymbol{u}w](\tau), \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\psi(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau \\ &\quad - \int_0^t \langle [w\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)](\tau), \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\psi(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{1.8}$$

其中 $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示空间 $L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 和空间 $L^{r',1}(\mathbb{R}^n)(1<r<\infty)$ 中的对偶对.

本文的主要结果如下.

定理 1.1　设 $n\geqslant 3$, $n<q\leqslant 2n$, 并设 $\boldsymbol{u}_0\in\mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)$, v_0, $w_0\in L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)$, 则存在常数 ε ($0<\varepsilon<\frac{1}{4\eta^2}$, η 是由 (3.10) 确定的一致常数), 使得若初值 $\|(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}\leqslant\varepsilon$, 那么系统 (1.1)–(1.2) 在空间 $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}^2$ 中存在唯一的整体温和解 $(\boldsymbol{u},v,w)$, 满足

$$\|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}^2}\leqslant 2\eta\varepsilon. \tag{1.9}$$

并且, 上述解满足解对初值的连续依赖性, 即若 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 和 $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{v},\widetilde{w})$ 分别表示系统 (1.1)–(1.2) 对应于初值 $(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)$ 和 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{v}_0,\widetilde{w}_0)$ 且满足如下条件的两个温和解:

$$\|(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}\leqslant\varepsilon,\qquad \|(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{v}_0,\widetilde{w}_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}\leqslant\varepsilon,$$

则

$$\|(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}},v-\widetilde{v},w-\widetilde{w})\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}^2}\leqslant\frac{\eta}{1-4\varepsilon\eta^2}\|(\boldsymbol{u}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,v_0-\widetilde{v}_0,w_0-\widetilde{w}_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}.$$

注 1.1　注意到, 在定理 1.1 的证明过程中, 实际上我们是在 $C_w([0,\infty),\mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n))\times[C_w([0,\infty),L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n))]^2$ 的子空间中建立了系统 (1.1)–(1.2) 温和解的整体存在性. 需要指出的是, 可类似选取的子空间还有很多. 实际上, 由压缩映像原理, 我们可以直接在空间 $C_w([0,\infty),\mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n))\times[C_w([0,\infty),L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n))]^2$ 中建立系统 (1.1)–(1.2) 解的整体存在性 (见 [26, 28]), 这是区别于 Lebesgue 空间中的相关结果的[16].

注 1.2　定理 1.1 表明, 对于小初值, 系统 (1.1)–(1.2) 的温和解不仅是整体存在的而且还随时间 $t\to\infty$ 衰减至零. 事实上, 对任意的 $n<q\leqslant 2n$, 当时间 $t\to\infty$ 时, 我们有

$$\|(\boldsymbol{u}(\cdot,t),v(\cdot,t),w(\cdot,t))\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}\times[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\sim t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}.$$

一般来说, 不能期望类似的衰减结果在空间 $\mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)\times[L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)]^2$ 中成立, 因为基于伸缩变换 (1.3), 对于任意的 $\lambda>0$, 很容易验证

$$\|(\boldsymbol{u}_\lambda(\cdot,t),v_\lambda(\cdot,t),w_\lambda(\cdot,t))\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}=\|(\boldsymbol{u}(\cdot,t),v(\cdot,t),w(\cdot,t))\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}.$$

由此可得 $\|(\boldsymbol{u}(\cdot,t),v(\cdot,t),w(\cdot,t))\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}$ 是与时间 t 无关的. 因此系统 (1.1)–(1.2) 的平凡解 $(\mathbf{0},0,0)$ 在空间 $\mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)\times[L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)]^2$ 中不是渐近稳定的. 这个结果和 Lebesgue 空间 $\mathbb{P}\mathbf{L}^n(\mathbb{R}^n)\times[L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)]^2$ 中的结果是不同的, 可参见文 [16].

由上述注 1.2, 一般来说, 无法期望解 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 在空间 $\mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)\times[L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)]^2$ 中随时间趋于无穷而衰减到零. 但是, 利用弱收敛方法, 我们可以证明如下结果.

定理 1.2 在定理 1.1 的假设条件下, 当 $t\to\infty$ 时, 有

$$\boldsymbol{u}(x,t)-\mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0(x)\to\mathbf{0}\ \text{ 在 }\ \mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)\ \text{ 中弱 * 收敛,}\tag{1.10}$$

$$v(x,t)-\mathrm{e}^{t\Delta}v_0(x)\to 0\ \text{ 在 }\ L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)\ \text{ 中弱 * 收敛,}\tag{1.11}$$

$$w(x,t)-\mathrm{e}^{t\Delta}w_0(x)\to 0\ \text{ 在 }\ L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)\ \text{ 中弱 * 收敛.}\tag{1.12}$$

基于定理 1.1 中温和解的唯一性, 我们即可推出系统 (1.1)–(1.2) 自相似解的存在性.

推论 1.1 在定理 1.1 的假设条件下, 若再假设 $\boldsymbol{u}_0$ 是度数为 -1 的齐次函数, v_0 和 w_0 是度数为 -2 的齐次函数, 即

$$\boldsymbol{u}_0(x)=\lambda\boldsymbol{u}_0(\lambda x),\quad v_0(x)=\lambda^2v_0(\lambda x),\quad w_0(x)=\lambda^2w_0(\lambda x),\tag{1.13}$$

则由定理 1.1 得到的温和解 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 是自相似解.

对于次临界 Lorentz 空间, 我们有如下的局部存在性结果.

定理 1.3 设 $n\geqslant 3$, $n<q<\infty$, $\frac{n}{2}<p<n$ 且满足 $\frac{2}{p}<\frac{3}{n}+\frac{1}{q}$, 并设 $\boldsymbol{u}_0\in\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $v_0,w_0\in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, 则存在 $T>0$, 使得系统 (1.1)–(1.2) 存在唯一的温和解 $(\boldsymbol{u},v,w)\in\mathcal{Z}_T$, 即

$$\boldsymbol{u}\in C_w([0,T),\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)),\qquad v,w\in C_w([0,T),L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)).$$

注 1.3 约束条件 $\frac{n}{2}<p<n$ 是利用广义 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式来克服非局部函数 ϕ 所产生的困难时附加的条件. 而条件 $\frac{2}{p}<\frac{1}{q}+\frac{3}{n}$ 是处理系统 (1.1)–(1.2) 耦合项时附加的条件, 它在某种层面上反映了速度场 $\boldsymbol{u}$ 和带电离子密度函数 (v,w) 之间的特殊耦合关系.

最后, 我们建立了当时间趋于无穷时自相似解的渐近稳定性.

定理 1.4 设 ε 充分小且满足 $\varepsilon<\min\left\{\frac{1}{4\eta^2},\frac{1}{\widetilde{\eta}}\right\}$, 这里常数 η 和 $\widetilde{\eta}$ 分别由 (3.10) 和 (5.23) 所确定. 设初值 $(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)$ 和 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{v}_0,\widetilde{w}_0)$ 满足定理 1.1 的假设条件, 并设 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 和 $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{v},\widetilde{w})$ 分别表示对应于初值 $(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)$ 和 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{v}_0,\widetilde{w}_0)$ 的系统 (1.1)–(1.2) 的两个整体温和解, 则下面两个结果是等价的:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\big(\|\mathrm{e}^{t\Delta}(\boldsymbol{u}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,v_0-\widetilde{v}_0,w_0-\widetilde{w}_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}\\&+t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|\mathrm{e}^{t\Delta}(\boldsymbol{u}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,v_0-\widetilde{v}_0,w_0-\widetilde{w}_0)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}\times[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\big)=0,\end{aligned}\tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\big(\|(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}},v-\widetilde{v},w-\widetilde{w})\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}\\&+t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}},v-\widetilde{v},w-\widetilde{w})\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}\times[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\big)=0.\end{aligned}\tag{1.15}$$

注 1.4 作为定理 1.4 的直接应用, 我们可得自相似解的渐近稳定性, 即对任意满足 (1.13) 的初值 $(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)$, 由定理 1.4 可知, 只要 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{v}_0,\widetilde{w}_0)$ 满足条件 (1.14), 则其所对应的温和解 $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{v},\widetilde{w})$ 随时间趋向于无穷时趋向于自相似解 $(\boldsymbol{u},v,w)$.

本文结构如下. 第 2 节, 介绍一些证明主要定理用到的 Lorentz 空间中的一些基础知识. 第 3 节, 给出定理 1.1 和定理 1.2 的证明, 并基于唯一性推出自相似解的存在性. 定理 1.3 和定理 1.4 的证明将分别在第 4 节和第 5 节给出. 贯穿全文, 我们用 $A \lesssim B$ 表示估计 $A \leqslant CB$, 其中 C 是与所研究问题参量无关的一致常数. 如果 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$, 则可表示为 $A \sim B$.

2　预备知识

2.1　Lorentz 空间

设 $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Lorentz 空间 $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 可通过 Lesbegue 空间的实插值方法定义如下[29]:

$$L^{p,q}(\mathbb{R}^n) := (L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n))_{(1-\frac{1}{p},q)}.$$

若 $1 < q < \infty$, 则 $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 是自反的且其对偶空间 $(L^{p,q}(\mathbb{R}^n))' = L^{p',q'}(\mathbb{R}^n)$, 其中 p' 和 q' 分别是 p 和 q 的共轭指标, 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. 而当 $q = \infty$ 时, $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 不是自反空间, $L^{p,1}(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间是 $L^{p',\infty}(\mathbb{R}^n)$. 注意到由于 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 不是自反空间, 所以热半群 $\{\mathrm{e}^{t\Delta}\}_{t\geqslant 0}$ 在其上不是强连续的, 而是弱连续的 (见下述引理 2.4). 因此贯穿本文, 我们赋予空间 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 上的拓扑为标准的弱 * 拓扑, 并在形如 $C_w([0,T), L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n))$ 的空间中证明温和解的存在性, 其中 $C_w([0,T), L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n))$ 表示在空间 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 中有界且关于时间 t 弱连续的函数全体构成的空间. 关于 Lorentz 空间更多的相关知识, 读者可以参见文 [27, 29].

2.2　解析工具

本小节我们主要介绍一些证明本文主要定理所需要的解析工具.

引理 2.1[30] (广义 Young 不等式)　设 $1 < p_1, p_2 < \infty$, $1 \leqslant q_1, q_2 \leqslant \infty$. 若 $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$, 则 $f * g \in L^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1$, $s \geqslant 1$, 满足 $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geqslant \frac{1}{s}$, 并且有

$$\|f * g\|_{L^{r,s}} \lesssim \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}}. \tag{2.1}$$

引理 2.2[30] (广义 Hölder 不等式)　设 $1 < p_1, p_2 < \infty$, $1 \leqslant q_1, q_2 \leqslant \infty$. 若 $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$, 则 $fg \in L^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $s \geqslant 1$, 满足 $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geqslant \frac{1}{s}$, 并且有

$$\|fg\|_{L^{r,s}} \lesssim \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}}. \tag{2.2}$$

由上述引理 2.1 即得下述热半群 $\{\mathrm{e}^{t\Delta}\}_{t\geqslant 0}$ 的广义 L^p-L^q 估计.

引理 2.3[26]　对任意的 $1 < p < \infty$, 热半群 $\{\mathrm{e}^{t\Delta}\}_{t\geqslant 0}$ 是 $L^{p,1}(\mathbb{R}^n)$(resp. $\mathbb{P}\mathbf{L}^{p,1}(\mathbb{R}^n)$) 上的解析 C_0 半群, 并且对任意的 $1 < p \leqslant q < \infty$, $\varphi \in L^{p,1}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\varphi \in \mathbb{P}\mathbf{L}^{p,1}(\mathbb{R}^n)$), 有如

下估计成立:

$$\|\mathrm{e}^{t\Delta}\varphi\|_{L^{q,1}} \lesssim t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\varphi\|_{L^{p,1}}, \tag{2.3}$$

$$\|\nabla \mathrm{e}^{t\Delta}\varphi\|_{L^{q,1}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\varphi\|_{L^{p,1}}. \tag{2.4}$$

利用对偶方法, 由引理 2.3 可得下述结果, 读者也可参考文 [24, pp. 421, 引理 1].

引理 2.4 [24] 对任意的 $1 < p < \infty$, $\varphi \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, 函数 $t \to \mathrm{e}^{t\Delta}\varphi$ 从 $[0,\infty)$ 映到 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 是弱连续的, 并且对任意的 $1 < p \leqslant q < \infty$, 热算子 $\mathrm{e}^{t\Delta} : L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathbb{P}\mathbf{L}^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$) $\to L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$) 是有界的, 即对任意的 $\varphi \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\varphi \in \mathbb{P}\mathbf{L}^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$), 有

$$\|\mathrm{e}^{t\Delta}\varphi\|_{L^{q,\infty}} \lesssim t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\varphi\|_{L^{p,\infty}}, \tag{2.5}$$

$$\|\nabla \mathrm{e}^{t\Delta}\varphi\|_{L^{q,\infty}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\varphi\|_{L^{p,\infty}}. \tag{2.6}$$

引理 2.5 设 $k \in (0,n)$, 则对于任意的 $1 < p < \frac{n}{k}$, $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ 和 $1 \leqslant q \leqslant \infty$, 非局部算子 $(-\Delta)^{-\frac{k}{2}}$ 映 $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p_1,q}(\mathbb{R}^n)$ 是有界的, 并且对任意的 $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|(-\Delta)^{-\frac{k}{2}}f\|_{L^{p_1,q}} \lesssim \|f\|_{L^{p,q}}. \tag{2.7}$$

证 因为 $(-\Delta)^{-\frac{k}{2}}f = \widetilde{K} * f$, 其中 $\widetilde{K}(x) = C_{n,k}|x|^{-(n-k)}$, $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, 并且 $C_{n,k}$ 是仅依赖于 n 和 k 的常数, 则由引理 2.1 和 $|x|^{-(n-k)} \in L^{\frac{n}{n-k},\infty}(\mathbb{R}^n)$ 可得 Sobolev 不等式 (2.7).

引理 2.6 设 $n < q < \infty$, 并设 $v \in \mathcal{Y}$, 则对于任意的 $t \in (0,\infty)$, $\nabla(-\Delta)^{-1}v(\cdot,t)$ 不仅属于空间 $\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)$, 也属于空间 $\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$, 并且成立下面的估计:

$$\sup_{t\geqslant 0}\|\nabla(-\Delta)^{-1}v\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}} + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|\nabla(-\Delta)^{-1}v\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}} \lesssim \|v\|_{\mathcal{Y}}. \tag{2.8}$$

证 在引理 2.5 中取 $k = 1$, 则对于任意的 $n \leqslant r < \infty$ 和 $t \in (0,\infty)$, 若 $v(\cdot,t) \in L^{\frac{nr}{n+r},\infty}(\mathbb{R}^n)$, 有 $\nabla(-\Delta)^{-1}v(\cdot,t) \in \mathbf{L}^{r,\infty}(\mathbb{R}^n)$, 并且

$$\|\nabla(-\Delta)^{-1}v(\cdot,t)\|_{\mathbf{L}^{r,\infty}} \lesssim \|v(\cdot,t)\|_{L^{\frac{nr}{n+r},\infty}}.$$

因此分别取 $r = n$ 和 $r = q$, 即得 (2.8).

3 临界 Lorentz 空间中的整体适定性

本节我们给出定理 1.1、定理 1.2 和推论 1.1 的证明. 设 $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $v_0, w_0 \in L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)$, 并设 q 为满足条件 $n < q \leqslant 2n$ 的某个固定常数. 令

$$\mathfrak{X} := \{(\boldsymbol{u},v,w) :\ \boldsymbol{u} \in \mathcal{X},\ \ v,w \in \mathcal{Y},\ \ \|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathfrak{X}} := \|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}^2} < \infty\},$$

并定义 $\mathfrak{X}$ 上的映射 $\mathfrak{F}$ 如下: 对于任意的 $(\boldsymbol{u},v,w) \in \mathfrak{X}$, 令 $\mathfrak{F}(\boldsymbol{u},v,w) := (\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{v},\widehat{w})$, 其中 $(\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{v},\widehat{w})$ 由下述积分方程组确定:

$$\widehat{\boldsymbol{u}} = \mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0 + \mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + \mathcal{B}_2(v-w,w-v), \tag{3.1}$$

$$\widehat{v} = \mathrm{e}^{t\Delta}v_0 + \mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v) + \mathcal{B}_4(v,w-v), \tag{3.2}$$

$$\widehat{w} = \mathrm{e}^{t\Delta} w_0 + \mathcal{B}_3(\boldsymbol{u}, w) + \mathcal{B}_4(w, v-w). \tag{3.3}$$

接下来我们将证明映射 $\mathfrak{F}$ 是良定义的, 映空间 $\mathfrak{X}$ 到自身, 且存在常数 $\varepsilon > 0$, 使得若 $\|(\boldsymbol{u}_0, v_0, w_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2} \leqslant \varepsilon$, 则 $\mathfrak{F}$ 是映空间 $\mathfrak{X}$ 中某个充分小的闭球到自身的压缩映射.

3.1 线性和双线性估计

引理 3.1　设 $(\boldsymbol{u}_0, v_0, w_0) \in \mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n) \times [L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)]^2$, 则有

$$(\mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0, \mathrm{e}^{t\Delta}v_0, \mathrm{e}^{t\Delta}w_0) \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}^2, \tag{3.4}$$

并且下面的线性估计成立:

$$\|(\mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0, \mathrm{e}^{t\Delta}v_0, \mathrm{e}^{t\Delta}w_0)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}^2} \lesssim \|(\boldsymbol{u}_0, v_0, w_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}. \tag{3.5}$$

证　见文 [24, p. 422, 引理 3], 此处略去过程.

引理 3.2　设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{X}$, $v, w \in \mathcal{Y}$, 则有

$$\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{B}_2(v, w) \in \mathcal{X}, \tag{3.6}$$

并且成立下面的双线性估计:

$$\|\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\|_{\mathcal{X}} \lesssim \|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{X},2}, \quad \|\mathcal{B}_2(v, w)\|_{\mathcal{X}} \lesssim \|v\|_{\mathcal{Y},2}\|w\|_{\mathcal{Y},2}. \tag{3.7}$$

证　注意到 $\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{X}$ 和 (3.7) 中的第一个估计已经在文 [24] 中给出证明, 所以只需证明 $\mathcal{B}_2(v, w) \in \mathcal{X}$, 并且 (3.7) 中的第二个估计成立. 因为 $v, w \in \mathcal{Y}$, 结合引理 2.4, 可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_2(v, w)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}} &= \Big\|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}[v\nabla(-\Delta)^{-1}w]\mathrm{d}\tau\Big\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}}\\ &\lesssim \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{n})}\|v\nabla(-\Delta)^{-1}w\|_{\mathbf{L}^{r,\infty}}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{r} = \frac{1}{n} + \frac{2}{q}$. 再由广义 Hölder 不等式和引理 2.6, 有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_2(v, w)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}} &\lesssim \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{q}}\|v\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}}\|\nabla(-\Delta)^{-1}w\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\mathrm{d}\tau\\ &\lesssim \|v\|_{\mathcal{Y},2}\|w\|_{\mathcal{Y},2}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{q}}\tau^{-(1-\frac{n}{q})}\mathrm{d}\tau\\ &\lesssim \|v\|_{\mathcal{Y},2}\|w\|_{\mathcal{Y},2}.\end{aligned}$$

注意到 $q > n$, 所以上述式子中积分 $\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{q}}\tau^{-(1-\frac{n}{q})}\mathrm{d}\tau$ 是可积的. 另一方面, 对任意的 $n < q \leqslant 2n$, 再次利用引理 2.4、广义 Hölder 不等式和引理 2.6, 可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_2(v, w)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}} &= \Big\|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}[v\nabla(-\Delta)^{-1}w]\mathrm{d}\tau\Big\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\\ &\lesssim \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n}{q})}\|v\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}}\|\nabla(-\Delta)^{-1}w\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\mathrm{d}\tau\\ &\lesssim \|v\|_{\mathcal{Y},2}\|w\|_{\mathcal{Y},2}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n}{q})}\tau^{-(1-\frac{n}{q})}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$\lesssim t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|v\|_{\mathcal{Y},2}\|w\|_{\mathcal{Y},2}.$$

因此 $\mathcal{B}_2(v,w)\in L^\infty(0,\infty;\mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n))$, $t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\mathcal{B}_2(v,w)\in L^\infty(0,\infty;\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n))$, 且

$$\|\mathcal{B}_2(v,w)\|_{\mathcal{X}}\lesssim \|v\|_{\mathcal{Y},2}\|w\|_{\mathcal{Y},2}.$$

关于 $\mathcal{B}_2(v,w)$ 对时间 t 的弱连续性可类似于文 [24, 26] 证明, 此处略去过程.

引理 3.3 设 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{X}$, $v,w\in\mathcal{Y}$, 则有

$$\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)\in\mathcal{Y},\quad \mathcal{B}_4(v,w)\in\mathcal{Y},\tag{3.8}$$

并且成立下面的双线性估计:

$$\|\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)\|_{\mathcal{Y}}\lesssim\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2},\quad \|\mathcal{B}_4(v,w)\|_{\mathcal{Y}}\lesssim\|v\|_{\mathcal{Y},2}\|w\|_{\mathcal{Y},2}.\tag{3.9}$$

证 我们仅给出相应于 $\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)$ 的结果的证明, 关于 $\mathcal{B}_4(v,w)$ 的结果类似可证. 首先由引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)\|_{L^{\frac{n}{2},\infty}}&=\Big\|-\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot[\boldsymbol{u}v]\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^{\frac{n}{2},\infty}}\\&\lesssim\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{2}{n})}\|\boldsymbol{u}v\|_{\mathbf{L}^{r,\infty}}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{r}=\frac{1}{n}+\frac{2}{q}$. 由引理 2.2 得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)\|_{L^{\frac{n}{2},\infty}}&\lesssim\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{n}{q}}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\|v\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}}\mathrm{d}\tau\\&\lesssim\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{n}{q}}\tau^{-(1-\frac{n}{q})}\mathrm{d}\tau\\&\lesssim\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}.\end{aligned}$$

另一方面, 对任意的 $n<q\leqslant 2n$, 由引理 2.4 和引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}}&=\Big\|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot[\boldsymbol{u}v]\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}}\\&\lesssim\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\|v\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}}\mathrm{d}\tau\\&\lesssim\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n}{q})}\tau^{-(1-\frac{n}{q})}\mathrm{d}\tau\\&\lesssim t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}.\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)\in L^\infty(0,\infty;L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n))$, $t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)\in L^\infty(0,\infty;L^{\frac{nq}{n+q},\infty}(\mathbb{R}^n))$, 并且

$$\|\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)\|_{\mathcal{Y}}\lesssim\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}.$$

关于 $\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)$ 对时间 t 的弱连续性可用文 [24, 26] 中的方法证明, 此处略去过程.

3.2 定理 1.1 的证明

显然, 由引理 3.1– 引理 3.3 可知映射 $\mathfrak{F}$ 是良定义的, 并且存在常数 $\eta>0$, 使得对任意的 $(\boldsymbol{u},v,w)\in\mathfrak{X}$, $(\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{v},\widehat{w})=\mathfrak{F}(\boldsymbol{u},v,w)$, 有

$$\|(\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{v},\widehat{w})\|_{\mathfrak{X}}\leqslant\eta(\|(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}+\|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathfrak{X}}^2).\tag{3.10}$$

令 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 $4\eta^2\varepsilon < 1$ 且 $\|(\boldsymbol{u}_0, v_0, w_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2} \leqslant \varepsilon$, 则由 (3.10) 可知

$$\|(\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{v}, \widehat{w})\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \eta\varepsilon + \eta\|(\boldsymbol{u}, v, w)\|_{\mathfrak{X}}^2. \tag{3.11}$$

令 $\mathfrak{B}$ 为空间 $\mathfrak{X}$ 中半径为 $2\eta\varepsilon$ 的闭球, 即

$$\mathfrak{B} := \{(\boldsymbol{u}, v, w) \in \mathfrak{X} :\ \|(\boldsymbol{u}, v, w)\|_{\mathfrak{X}} \leqslant 2\eta\varepsilon\},$$

则对于任意的 $(\boldsymbol{u}, v, w) \in \mathfrak{B}$, 由 (3.11) 可得

$$\|(\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{v}, \widehat{w})\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \eta\varepsilon + \eta(2\eta\varepsilon)^2 = (1 + 4\eta^2\varepsilon)\eta\varepsilon \leqslant 2\eta\varepsilon.$$

所以 $\mathfrak{F}$ 是映 $\mathfrak{B}$ 到其自身的映射.

引理 3.4　设 ε 如上给出 $\left(\varepsilon < \frac{1}{4\eta^2}\right)$, 则若 $\|(\boldsymbol{u}_0, v_0, w_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2} \leqslant \varepsilon$, 映射 $\mathfrak{F}$ 是映 $\mathfrak{B}$ 到自身的压缩映射.

证　设 $(\boldsymbol{u}_1, v_1, w_1)$, $(\boldsymbol{u}_2, v_2, w_2) \in \mathfrak{B}$, 并设 $(\widehat{\boldsymbol{u}}_j, \widehat{v}_j, \widehat{w}_j) = \mathfrak{F}(\boldsymbol{u}_j, v_j, w_j)$, $j = 1, 2$, 则类似于引理 3.2– 引理 3.3 证明中的推导, 可得下述估计:

$$\begin{aligned} &\|(\widehat{\boldsymbol{u}}_1 - \widehat{\boldsymbol{u}}_2, \widehat{v}_1 - \widehat{v}_2, \widehat{w}_1 - \widehat{w}_2)\|_{\mathfrak{X}} \\ &\leqslant \eta(\|(\boldsymbol{u}_1, v_1, w_1)\|_{\mathfrak{X}} + \|(\boldsymbol{u}_2, v_2, w_2)\|_{\mathfrak{X}})\|(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, v_1 - v_2, w_1 - w_2)\|_{\mathfrak{X}} \\ &\leqslant 4\eta^2\varepsilon\|(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, v_1 - v_2, w_1 - w_2)\|_{\mathfrak{X}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

由于 $4\eta^2\varepsilon < 1$, 则显然 $\mathfrak{F}$ 是压缩映射.

至此, 由引理 3.4 和 Banach 不动点定理可知, 系统 (1.1)–(1.2) 在空间 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}^2$ 中存在整体温和解 $(\boldsymbol{u}, v, w)$, 并且这是满足条件 $\|(\boldsymbol{u}, v, w)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}^2} \leqslant 2\eta\varepsilon$ 的唯一解. 为证明解对初值的连续依赖性, 设 $(\boldsymbol{u}, v, w)$ 和 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}, \widetilde{v}, \widetilde{w})$ 分别是系统 (1.1)–(1.2) 对应于初值 $(\boldsymbol{u}_0, v_0, w_0)$ 和 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0, \widetilde{v}_0, \widetilde{w}_0)$ 的温和解, 并且

$$\|(\boldsymbol{u}_0, v_0, w_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2} \leqslant \varepsilon, \quad \|(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0, \widetilde{v}_0, \widetilde{w}_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2} \leqslant \varepsilon.$$

类似于 (3.12) 的推导, 有

$$\begin{aligned} \|(\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}, v - \widetilde{v}, w - \widetilde{w})\|_{\mathfrak{X}} &\leqslant \eta\|(\boldsymbol{u}_0 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0, v_0 - \widetilde{v}_0, w_0 - \widetilde{w}_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2} \\ &\quad + 4\eta^2\varepsilon\|(\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}, v - \widetilde{v}, w - \widetilde{w})\|_{\mathfrak{X}}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

因为 $4\eta^2\varepsilon < 1$, 由 (3.13) 可知

$$\|(\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}, v - \widetilde{v}, w - \widetilde{w})\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \frac{\eta}{1 - 4\varepsilon\eta^2}\|(\boldsymbol{u}_0 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0, v_0 - \widetilde{v}_0, w_0 - \widetilde{w}_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}.$$

定理 1.1 得证.

3.3 定理 1.2 的证明

首先证明 (1.10). 因为 $\boldsymbol{u} = \mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0 + \mathcal{B}_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \mathcal{B}_2(v - w, w - v)$, 所以我们仅需要证明下述结果.

引理 3.5　设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{X}$, $v, w \in \mathcal{Y}$, 则当 $t \to \infty$ 时, 有

$$\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),\ \mathcal{B}_2(v, w) \to \mathbf{0}\ \text{ 在 }\ \mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)\text{中弱 * 收敛}. \tag{3.14}$$

证 事实上, 当 $t\to\infty$ 时, $\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 在空间 $\mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 中弱 * 收敛到 $\mathbf{0}$ 已在文 [25, p. 755, 命题 2] 中给出证明, 但由于在条件 $1<r<\frac{n}{n-1}$$(-\frac{3}{2}+\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})<-1)$ 下, 积分 $\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{3}{2}+\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})}\mathrm{d}\tau$ 不收敛, 所以文 [25] 中给出的证明不完整. 这里我们给出一个更简单的证明方法. 我们仅给出项 $\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 相应结果的证明, 项 $\mathcal{B}_2(v,w)$ 对应的结果类似可证. 为此, 令 $\varphi\in[\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)]^n$ 且 $\operatorname{div}\varphi=0$, 由引理 2.2 和引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\varphi\rangle&=\Big\langle-\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot[\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}](\tau)\mathrm{d}\tau,\varphi\Big\rangle\\&=\int_0^t\langle[\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}](\tau),\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla\varphi\rangle\mathrm{d}\tau\\&\lesssim\int_0^t\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\|\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla\varphi\|_{\mathbf{L}^{\frac{q}{q-2},1}}\mathrm{d}\tau\\&\lesssim\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{X},2}\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{r,1}}\int_0^t\tau^{-(1-\frac{n}{q})}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{q-2}{q})}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

其中 $1<r\leqslant\frac{q}{q-2}$ 为待定常数. 由于我们已经假设 $n<q\leqslant 2n$, 因此我们只需验证存在数 r, 使得

$$-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\Big(\frac{1}{r}-\frac{q-2}{q}\Big)>-1,\tag{3.15}$$

并且

$$-\Big(1-\frac{n}{q}\Big)-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\Big(\frac{1}{r}-\frac{q-2}{q}\Big)+1<0.\tag{3.16}$$

经过简单的计算可知, 条件 (3.15) 等价于条件 $\frac{1}{r}+\frac{2}{q}<1+\frac{1}{n}$, 条件 (3.16) 等价于条件 $1-\frac{1}{n}<\frac{1}{r}$. 因此, 对于任意的 $n<\widetilde{q}<q$, 令 $\frac{1}{r}=1-\frac{1}{\widetilde{q}}$, 则易验证 (3.15) 和 (3.16) 对这样选取的 r 是成立的, 并且

$$\langle\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\varphi\rangle\lesssim t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{X},2}\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{r,1}}\int_0^1\tau^{-(1-\frac{n}{q})}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{q-2}{q})}\mathrm{d}\tau.$$

注意到 $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}$ 和 $\|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{X},2}$ 是有界的, 因此当 $t\to\infty$ 时, 有 $\langle\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\varphi\rangle\to 0$. 最后, 基于 $\{\varphi:\ \varphi\in[\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)]^n,\operatorname{div}\varphi=0\}$ 在 $\mathbb{P}\mathbf{L}^{\frac{n}{n-1},1}(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性, 由标准的稠密化方法可得, 当 $t\to\infty$ 时, 有

$$\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\to\mathbf{0}\ \text{在}\ \mathbb{P}\mathbf{L}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)\text{弱 * 收敛}.$$

引理 3.5 得证.

下面我们证明 (1.11), (1.12) 类似可证. 因为 $v=\mathrm{e}^{t\Delta}v_0+\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)+\mathcal{B}_4(v,w-v)$, 所以只需证明下述引理.

引理 3.6 设 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{X},\ v,w\in\mathcal{Y}$, 则当 $t\to\infty$ 时, 有

$$\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v),\ \mathcal{B}_4(v,w)\to 0\ \text{在}\ L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)\text{中弱 * 收敛}.\tag{3.17}$$

证 这里我们只给出当 $t\to\infty$ 时, $\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)$ 在空间 $L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)$ 中弱 * 收敛到 0, $\mathcal{B}_4(v,w)$ 对应的结果类似可证. 为此, 任取 $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 由引理 2.2 和引理 2.3 可知

$$\langle\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v),\psi\rangle=\Big\langle-\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot[\boldsymbol{u}v](\tau)\mathrm{d}\tau,\psi\Big\rangle=\int_0^t\langle[\boldsymbol{u}v](\tau),\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\psi\rangle\mathrm{d}\tau$$

$$\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}} \|v\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}} \|\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\psi\|_{\mathbf{L}^{\frac{nq}{nq-2n-q},1}} \mathrm{d}\tau$$

$$\lesssim \|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}\|\psi\|_{\mathbf{L}^{r,1}} \int_0^t \tau^{-(1-\frac{n}{q})}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{nq-2n-q}{nq})}\mathrm{d}\tau,$$

其中 $1 < r \leqslant \frac{nq}{nq-2n-q}$ 是待定常数. 显然, 我们仅需验证存在常数 r, 使得

$$-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\Big(\frac{1}{r}-\frac{nq-2n-q}{nq}\Big) > -1, \tag{3.18}$$

且

$$-\Big(1-\frac{n}{q}\Big)-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\Big(\frac{1}{r}-\frac{nq-2n-q}{nq}\Big)+1 < 0. \tag{3.19}$$

注意到条件 (3.18) 等价于 $\frac{1}{r} < 1-\frac{2}{q}$, 条件 (3.19) 等价于 $1-\frac{2}{n} < \frac{1}{r}$. 因此, 对任意的 $n < \bar{q} < q$, 我们取 $\frac{1}{r} = 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{\bar{q}}$. 显然 (3.18) 和 (3.19) 对如此选取的 r 成立, 并且有

$$\langle \mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v),\psi\rangle \lesssim t^{-(1-\frac{n}{\bar{q}})}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}\|\psi\|_{\mathbf{L}^{r,1}} \int_0^1 \tau^{-(1-\frac{n}{q})}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{nq-2n-q}{nq})}\mathrm{d}\tau.$$

由于 $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}$ 和 $\|v\|_{\mathcal{Y},2}$ 是有界的, 因此由上式可知当 $t\to\infty$ 时, 有 $\langle \mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v),\psi\rangle \to 0$. 除此之外, 基于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^{\frac{n}{n-2},1}(\mathbb{R}^n)$ 中稠密这一事实, 由标准的稠密化方法可得当 $t\to\infty$ 时, 有

$$\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v) \to 0 \text{ 在 } L^{\frac{n}{2},\infty}(\mathbb{R}^n)\text{弱 * 收敛}.$$

引理 3.6 得证.

由引理 3.5 和引理 3.6 即得定理 1.2.

3.4 推论 1.1 的证明

设 $(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)$ 满足条件 (1.13), 则由定理 1.1 可知系统 (1.1)–(1.2) 存在唯一的温和解 $(\boldsymbol{u},v,w)$, 使得

$$\|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}^2} \leqslant 2\eta\varepsilon.$$

另一方面, 由于系统 (1.1) 满足伸缩不变性, 则对于任意的 $\lambda>0$, 由 (1.3) 给出的 $(\boldsymbol{u}_\lambda,v_\lambda,w_\lambda)$ 同样也是初值 $(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)$ 所确定的解. 注意到空间 $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}^2$ 的范数在伸缩变换 (1.3) 下不变, 即

$$\|(\boldsymbol{u}_\lambda,v_\lambda,w_\lambda)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}^2} = \|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}^2},$$

因此 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 是自相似解.

4 次临界 Lorentz 空间中的局部适定性

本节我们给出定理 1.3 的证明. 设 q 和 p 为两个给定常数并满足 $n<q<\infty$, $\frac{n}{2}<p<n$ 和 $\frac{2}{p}<\frac{3}{n}+\frac{1}{q}$, 并设

$$\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n), \quad v_0,w_0 \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

对于待定常数 $T>0$, 我们想在空间 $\mathcal{Z}_T$ 中建立系统 (1.1)–(1.2) 的局部适定性, 其中

$$\mathcal{Z}_T=\{(\boldsymbol{u},v,w):\ \boldsymbol{u}(t)\in C_w([0,T),\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)),\quad v,w\in C_w([0,T),L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n))\}.$$

同样, 对于给定的 $(\boldsymbol{u},v,w)\in\mathcal{Z}_T$, 定义映射 $\mathfrak{F}(\boldsymbol{u},v,w)=(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{v},\widehat{w})$, 其中 $(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{v},\widehat{w})$ 由 (3.1)–(3.3) 确定. 接下来我们将证明: 如果 T 充分小, 则 $\mathfrak{F}$ 是将 $\mathcal{Z}_T$ 中的闭球映到自身的压缩映射. 不失一般性, 令 $0<T\leqslant 1$.

4.1 线性和双线性估计

引理 4.1 设 $(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)\in\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)\times[L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)]^2$, 则有

$$(\mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0,\mathrm{e}^{t\Delta}v_0,\mathrm{e}^{t\Delta}w_0)\in\mathcal{Z}_T,\tag{4.1}$$

并且成立下面的线性估计:

$$\|(\mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0,\mathrm{e}^{t\Delta}v_0,\mathrm{e}^{t\Delta}w_0)\|_{\mathcal{Z}_T}\lesssim\|(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}\times[L^{p,\infty}]^2}.\tag{4.2}$$

证 由引理 2.4 即得引理 4.1, 此处略去过程.

引理 4.2 设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in C_w([0,T),\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)),\ v,w\in C_w([0,T),L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n))$, 则有

$$\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\ \mathcal{B}_2(v,w)\in C_w([0,T),\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)),\tag{4.3}$$

并且成立下面的双线性估计:

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t<T}\|\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}&\lesssim T^{\frac12(1-\frac nq)}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big),\\ \sup_{0\leqslant t<T}\|\mathcal{B}_2(v,w)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}&\lesssim T^{\frac32+\frac{n}{2q}-\frac np}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|v\|_{L^{p,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|v\|_{L^{p,\infty}}\Big).\end{aligned}\tag{4.4}$$

证 对于 $\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, 由条件 $n<q<\infty$ 可知 $\frac12\big(1+\frac nq\big)<1$, 从而由引理 2.2 和引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}&=\Big\|-\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\mathrm{d}\tau\Big\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\\&\lesssim\int_0^t(t-\tau)^{-\frac12(1+\frac nq)}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\mathrm{d}\tau\\&\lesssim t^{\frac12(1-\frac nq)}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big).\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in C_w([0,T),\mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n))$, 并且

$$\sup_{0\leqslant t<T}\|\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\lesssim T^{\frac12(1-\frac nq)}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big).$$

对于 $\mathcal{B}_2(v,w)$, 设 $1<r\leqslant q$ 满足 $\frac1r=\frac1p+\frac{n-p}{np}=\frac2p-\frac1n$ $(p<n)$, 则由引理 2.2 和引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_2(v,w)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}&=\Big\|\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}[v\nabla(-\Delta)^{-1}w]\mathrm{d}\tau\Big\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\\&\lesssim\int_0^t(t-\tau)^{-\frac n2(\frac1r-\frac1q)}\|v\nabla(-\Delta)^{-1}w\|_{\mathbf{L}^{r,\infty}}\mathrm{d}\tau\\&\lesssim\int_0^t(t-\tau)^{-\frac n2(\frac2p-\frac1n-\frac1q)}\|v\|_{L^{p,\infty}}\|\nabla(-\Delta)^{-1}w\|_{\mathbf{L}^{\frac{np}{n-p},\infty}}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

结合引理 2.5, 对于每个 $0 \leqslant t < T$, 有

$$\|\nabla(-\Delta)^{-1}w\|_{\mathbf{L}^{\frac{np}{n-p},\infty}} \lesssim \|w\|_{L^{p,\infty}},$$

并由假设条件 $\frac{2}{p} < \frac{3}{n} + \frac{1}{q}$ 可知 $\frac{1}{2}\big(\frac{2n}{p} - \frac{n}{q} - 1\big) < 1$, 即 $\frac{3}{2} + \frac{n}{2q} - \frac{n}{p} > 0$, 由此可推得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_2(v,w)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}} &\lesssim \Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|v\|_{L^{p,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|w\|_{L^{p,\infty}}\Big)\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\frac{2n}{p}-\frac{n}{q}-1)}\mathrm{d}\tau \\ &\lesssim t^{\frac{3}{2}+\frac{n}{2q}-\frac{n}{p}}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|v\|_{L^{p,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|w\|_{L^{p,\infty}}\Big).\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{B}_2(v,w) \in C_w([0,T), \mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n))$, 并且

$$\sup_{t\in[0,T)}\|\mathcal{B}_2(v,w)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}} \lesssim T^{\frac{3}{2}+\frac{n}{2q}-\frac{n}{p}}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|v\|_{L^{p,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|w\|_{L^{p,\infty}}\Big).$$

证毕.

令 $\theta_1 := \min\big\{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q}), \frac{3}{2}+\frac{n}{2q}-\frac{n}{p}\big\}$, 则由引理 4.1–4.2 可知 $\widehat{\mathbf{u}} \in C_w([0,T), \mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n))$, 且

$$\sup_{t\in[0,T)}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_{L^{q,\infty}} \lesssim \|\boldsymbol{u}_0\|_{L^{q,\infty}} + T^{\theta_1}\|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathcal{Z}_T}^2. \tag{4.5}$$

引理 4.3　设 $\boldsymbol{u} \in C_w([0,T), \mathbb{P}\mathbf{L}^{q,\infty}(\mathbb{R}^n))$, $v, w \in C_w([0,T), L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n))$, 则有

$$\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v),\ \mathcal{B}_4(v,w) \in C_w([0,T), L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)), \tag{4.6}$$

并且成立下面的双线性估计:

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t<T}\|\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)\|_{L^{p,\infty}} &\lesssim T^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|v\|_{L^{p,\infty}}\Big), \\ \sup_{0\leqslant t<T}\|\mathcal{B}_4(v,w)\|_{L^{p,\infty}} &\lesssim T^{1-\frac{n}{2p}}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|v\|_{L^{p,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|w\|_{L^{p,\infty}}\Big).\end{aligned} \tag{4.7}$$

证　对于 $\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)$, 由引理 2.2 和引理 2.4 易得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)\|_{L^{p,\infty}} &= \Big\|-\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot[\boldsymbol{u}v]\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^{p,\infty}} \\ &\lesssim \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\|v\|_{L^{p,\infty}}\mathrm{d}\tau \\ &\lesssim t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|v\|_{L^{p,\infty}}\Big).\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v) \in C_w([0,T), L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n))$, 且下述估计成立:

$$\|\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u},v)\|_{L^{p,\infty}} \lesssim T^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|v\|_{L^{p,\infty}}\Big).$$

对于 $\mathcal{B}_4(v,w)$, 由引理 2.2、引理 2.4 和引理 2.6 可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_4(v,w)\|_{L^{p,\infty}} &= \Big\|-\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot(v\nabla(-\Delta)^{-1}w)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^{p,\infty}} \\ &\lesssim \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{2p}}\|v\|_{L^{p,\infty}}\|\nabla(-\Delta)^{-1}w\|_{\mathbf{L}^{\frac{np}{n-p},\infty}}\mathrm{d}\tau \\ &\lesssim t^{1-\frac{n}{2p}}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|v\|_{L^{p,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|w\|_{L^{p,\infty}}\Big).\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{B}_4(v,w)\in C_w([0,T),L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n))$, 且下述估计成立:

$$\|\mathcal{B}_4(v,w)\|_{L^{p,\infty}}\lesssim T^{1-\frac{n}{2p}}\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|v\|_{L^{p,\infty}}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t<T}\|w\|_{L^{p,\infty}}\Big).$$

引理 4.3 得证.

令 $\theta_2:=\min\big\{\frac{1}{2}\big(1-\frac{n}{q}\big),1-\frac{n}{2p}\big\}$, 则由引理 4.1 和引理 4.3 可得 $\widehat{v}\in C_w([0,T),L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n))$, 且

$$\sup_{0\leqslant t<T}\|\widehat{v}\|_{L^{p,\infty}}\lesssim\|v_0\|_{L^{p,\infty}}+T^{\theta_2}\|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathcal{Z}_T}^2. \tag{4.8}$$

类似可证 $\widehat{w}\in C_w([0,T),L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n))$, 且

$$\sup_{0\leqslant t<T}\|\widehat{w}\|_{L^{p,\infty}}\lesssim\|w_0\|_{L^{p,\infty}}+T^{\theta_2}\|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathcal{Z}_T}^2. \tag{4.9}$$

结合引理 4.1– 引理 4.3, 我们有如下结果.

引理 4.4 $\mathfrak{F}$ 是良定义的并且映 $\mathcal{Z}_T$ 到自身.

4.2 定理 1.3 的证明

令 $\theta:=\min\{\theta_1,\theta_2\}$, 则由 (4.5), (4.8) 和 (4.9) 可知, 存在与 T 和 θ 无关的常数 $\eta_0>0$, 使得对于任意的 $(\boldsymbol{u},v,w)\in\mathcal{Z}_T$, $(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{v},\widehat{w})=\mathfrak{F}(\boldsymbol{u},v,w)$, 有

$$\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{v},\widehat{w})\|_{\mathcal{Z}_T}\leqslant\eta_0(\|(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}\times[L^{p,\infty}]^2}+T^{\theta}\|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathcal{Z}_T}^2). \tag{4.10}$$

令 $R:=\eta_0\|(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}\times[L^{p,\infty}]^2}$, 并用 $\mathfrak{B}_T$ 表示 $\mathcal{Z}_T$ 中半径为 $2R$ 的闭球, 即

$$\mathfrak{B}_T:=\{(\boldsymbol{u},v,w)\in\mathcal{Z}_T:\ \|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathcal{Z}_T}\leqslant 2R\},$$

则对于任意的 $(\boldsymbol{u},v,w)\in\mathfrak{B}_T$, 由 (4.10) 可知

$$\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{v},\widehat{w})\|_{\mathcal{Z}_T}\leqslant R+4\eta_0R^2T^{\theta}.$$

因此, 若取 T 充分小, 使得 $4\eta_0RT^{\theta}<1$, 则 $\mathfrak{F}$ 将 $\mathfrak{B}_T$ 映到了自身, 并且类似于引理 3.4 的证明, 我们可证 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{B}_T$ 上的压缩映射.

引理 4.5 设 R,T 和 $\mathfrak{B}_T$ 如上给出. 则 $\mathfrak{F}$ 是映 $\mathfrak{B}_T$ 到自身的压缩映射.

由引理 4.1– 引理 4.5 和 Banach 不动点定理, 可得定理 1.3.

5 自相似解的渐近稳定性

设 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 和 $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{v},\widetilde{w})$ 是由定理 1.1 构造的系统 (1.1)–(1.2) 分别对应于初值 $(\boldsymbol{u}_0,v_0,w_0)$ 和 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{v}_0,\widetilde{w}_0)$ 的两个解, 则由引理 3.4 可知, 存在以 $2\eta\varepsilon$ 为半径的球 $\mathfrak{B}$, 使得

$$\|(\boldsymbol{u},v,w)\|_{\mathfrak{X}}\leqslant 2\eta\varepsilon,\qquad \|(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{v},\widetilde{w})\|_{\mathfrak{X}}\leqslant 2\eta\varepsilon. \tag{5.1}$$

用 $(\boldsymbol{u},v,w)$ 满足的积分方程 (1.5) 减去 $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{v},\widetilde{w})$ 满足的类似方程可得

$$\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}=\mathrm{e}^{t\Delta}(\boldsymbol{u}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0)+\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u})+\mathcal{B}_1(\widetilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}})$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \mathcal{B}_2((v-\widetilde{v})-(w-\widetilde{w}), w-v) + \mathcal{B}_2(\widetilde{v}-\widetilde{w}, (w-\widetilde{w})-(v-\widetilde{v})),\\
v-\widetilde{v} &= \mathrm{e}^{t\Delta}(v_0-\widetilde{v}_0) + \mathcal{B}_3(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}, v) + \mathcal{B}_3(\widetilde{\boldsymbol{u}}, v-\widetilde{v})\\
&\quad + \mathcal{B}_4(v-\widetilde{v}, w-v) + \mathcal{B}_4(\widetilde{v}, (w-\widetilde{w})-(v-\widetilde{v})),\\
w-\widetilde{w} &= \mathrm{e}^{t\Delta}(w_0-\widetilde{w}_0) + \mathcal{B}_3(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}, w) + \mathcal{B}_3(\widetilde{\boldsymbol{u}}, w-\widetilde{w})\\
&\quad + \mathcal{B}_4(w-\widetilde{w}, v-w) + \mathcal{B}_4(\widetilde{w}, (v-\widetilde{v})-(w-\widetilde{w})).
\end{aligned}
$$

为简化记号, 我们引入下面两个辅助函数:

$$
\begin{aligned}
h(t) &:= \|\mathrm{e}^{t\Delta}(\boldsymbol{u}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0, v_0-\widetilde{v}_0, w_0-\widetilde{w}_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}\\
&\quad + t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|\mathrm{e}^{t\Delta}(\boldsymbol{u}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0, v_0-\widetilde{v}_0, w_0-\widetilde{w}_0)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}\times[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2},\\
l(t) &:= \|(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}, v-\widetilde{v}, w-\widetilde{w})\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}\times[L^{\frac{n}{2},\infty}]^2}\\
&\quad + t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}, v-\widetilde{v}, w-\widetilde{w})\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}\times[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}.
\end{aligned}
$$

首先假设条件 (1.14) 成立, 则由引理 3.1 即得

$$
h(t)\in L^\infty([0,\infty)) \;\; 且 \;\; \lim_{t\to\infty} h(t) = 0.
$$

因此为证明 (1.15), 我们需要估计 $l(t)$. 先求 $\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}$ 的 $\mathbf{L}^{n,\infty}$ 范数:

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}} &\leqslant \|\mathrm{e}^{t\Delta}(\boldsymbol{u}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}} + \|\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u})\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}} + \|\mathcal{B}_1(\widetilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}})\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}}\\
&\quad + \|\mathcal{B}_2((v-\widetilde{v})-(w-\widetilde{w}), w-v)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}} + \|\mathcal{B}_2(\widetilde{v}-\widetilde{w}, (w-\widetilde{w})-(v-\widetilde{v}))\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}}\\
&:= \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_4.
\end{aligned}
$$

为估计 $\mathrm{A}_i(i=0,1,\cdots,4)$, 令 $\delta\in(0,1)$ 为待定常数, 我们的想法是将积分 $\int_0^t \cdots \mathrm{d}\tau$ 分解为 $\int_0^{\delta t}\cdots\mathrm{d}\tau + \int_{\delta t}^t \cdots \mathrm{d}\tau$, 然后再对分解项分别进行估计. 对 A_1, 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_1 &= \Big\| -\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot[(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}})\otimes\boldsymbol{u}]\mathrm{d}\tau\Big\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}}\\
&\lesssim \Big\|\Big[\int_0^{\delta t} + \int_{\delta t}^t\Big]\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla[(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}})\otimes\boldsymbol{u}]\mathrm{d}\tau\Big\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}}\\
&:= \mathrm{A}_{11} + \mathrm{A}_{12}.
\end{aligned}
$$

利用引理 2.2 和引理 2.4, 我们对 A_{11} 的估计如下:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{11} &\lesssim \int_0^{\delta t}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{n})}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\mathrm{d}\tau\\
&\lesssim \int_0^{\delta t}(t-\tau)^{-\frac{n}{q}}\tau^{-(1-\frac{n}{q})}\Big[\tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\mathrm{d}\tau\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X},2}.
\end{aligned}
$$

在上式中做变量替换 $\tau = ts$, 由 (5.1) 可得

$$
\mathrm{A}_{11} \lesssim \eta\varepsilon\int_0^{\delta}(1-s)^{-\frac{n}{q}}s^{-(1-\frac{n}{q})}\Big[(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(ts)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\mathrm{d}s. \tag{5.2}
$$

对于 A_{12}, 可直接进行如下估计:

$$
\mathrm{A}_{12} \lesssim \eta\varepsilon\Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]. \tag{5.3}
$$

结合 (5.2) 和 (5.3) 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_1 \lesssim \eta\varepsilon \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{n}{q}} s^{-(1-\frac{n}{q})} \Big[(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|\boldsymbol{u}(ts) - \widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big] \mathrm{d}s \\ + \eta\varepsilon \Big[\sup_{\delta t \leqslant \tau \leqslant t} \tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|\boldsymbol{u}(\tau) - \widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]. \end{aligned} \tag{5.4}$$

类似于上述 A_1 的估计, 我们可得 A_2 的估计如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_2 \lesssim \eta\varepsilon \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{n}{q}} s^{-(1-\frac{n}{q})} \Big[(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|\boldsymbol{u}(ts) - \widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big] \mathrm{d}s \\ + \eta\varepsilon \Big[\sup_{\delta t \leqslant \tau \leqslant t} \tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|\boldsymbol{u}(\tau) - \widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

对于 A_3, 注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_3 &= \Big\| \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}[((v-\widetilde{v}) - (w-\widetilde{w}))\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)]\mathrm{d}\tau \Big\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}} \\ &\lesssim \Big\| \Big[\int_0^{\delta t} + \int_{\delta t}^t\Big] \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}[((v-\widetilde{v}) - (w-\widetilde{w}))\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)]\mathrm{d}\tau \Big\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}} \\ &:= \mathrm{A}_{31} + \mathrm{A}_{32}.\end{aligned}$$

对于 A_{31}, 由引理 2.2、引理 2.4 和引理 2.6 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{31} &\lesssim \int_0^{\delta t} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q} + \frac{n+q}{nq} - \frac{1}{n})} \|(v-\widetilde{v}) - (w-\widetilde{w})\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}} \|\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}} \mathrm{d}\tau \\ &\lesssim \int_0^{\delta t} (t-\tau)^{-\frac{n}{q}} \tau^{-(1-\frac{n}{q})} [\tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v-\widetilde{v})(\tau), (w-\widetilde{w})(\tau))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}] \mathrm{d}\tau \|(v,w)\|_{\mathcal{Y},2}.\end{aligned}$$

同样, 在上式中令 $\tau = ts$, 由 (5.1) 可得

$$\mathrm{A}_{31} \lesssim \eta\varepsilon \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{n}{q}} s^{-(1-\frac{n}{q})} \Big[(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v-\widetilde{v})(ts), (w-\widetilde{w})(ts))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big] \mathrm{d}s. \tag{5.6}$$

对于 A_{32}, 直接计算可得

$$\mathrm{A}_{32} \lesssim \eta\varepsilon \Big[\sup_{\delta t \leqslant \tau \leqslant t} \tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v-\widetilde{v})(\tau), (w-\widetilde{w})(\tau))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big]. \tag{5.7}$$

结合 (5.6) 和 (5.7), 有

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_3 \lesssim \eta\varepsilon \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{n}{q}} s^{-(1-\frac{n}{q})} [(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v-\widetilde{v})(ts), (w-\widetilde{w})(ts))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}] \mathrm{d}s \\ + \eta\varepsilon \Big[\sup_{\delta t \leqslant \tau \leqslant t} \tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v-\widetilde{v})(\tau), (w-\widetilde{w})(\tau))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big]. \end{aligned} \tag{5.8}$$

对于 A_4, 应用类似的方法可得

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_4 \lesssim \eta\varepsilon \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{n}{q}} s^{-(1-\frac{n}{q})} [(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v-\widetilde{v})(ts), (w-\widetilde{w})(ts))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}] \mathrm{d}s \\ + \eta\varepsilon \Big[\sup_{\delta t \leqslant \tau \leqslant t} \tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v-\widetilde{v})(\tau), (w-\widetilde{w})(\tau))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

接下来, 我们计算 $\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}$ 的 $\mathbf{L}^{q,\infty}$ 范数:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}} \leqslant \|\mathrm{e}^{t\Delta}(\boldsymbol{u}_0 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}} + \|\mathcal{B}_1(\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u})\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}} + \|\mathcal{B}_1(\widetilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}})\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}} \\ + \|\mathcal{B}_2((v-\widetilde{v}) - (w-\widetilde{w}), w-v)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}} + \|\mathcal{B}_2(\widetilde{v} - \widetilde{w}, (w-\widetilde{w}) - (v-\widetilde{v}))\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\end{aligned}$$

$$:= \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 + \mathrm{B}_3 + \mathrm{B}_4.$$

对于 B_1, 我们将其分解为下面两项:

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_1 &= \Big\| -\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot[(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}})\otimes\boldsymbol{u}]\mathrm{d}\tau\Big\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\\ &\lesssim \Big\|\Big[\int_0^{\delta t} + \int_{\delta t}^t\Big]\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla[(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}})\otimes\boldsymbol{u}]\mathrm{d}\tau\Big\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\\ &:= \mathrm{B}_{11} + \mathrm{B}_{12}.\end{aligned}$$

对于 B_{11}, 由引理 2.2 和引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{11} &\lesssim \int_0^{\delta t}(t-\tau)^{-\frac12-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac1q)}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\mathrm{d}\tau\\ &\lesssim \int_0^{\delta t}(t-\tau)^{-\frac12(1+\frac{n}{q})}\tau^{-(1-\frac{n}{q})}\Big[\tau^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\mathrm{d}\tau\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{\mathcal{X},2}.\end{aligned}$$

类似于之前, 做变量替换 $\tau = ts$, 并利用 (5.1), 有

$$\mathrm{B}_{11} \lesssim \eta\varepsilon t^{-\frac12(1-\frac{n}{q})}\int_0^{\delta}(1-s)^{-\frac12(1+\frac{n}{q})}s^{-(1-\frac{n}{q})}\Big[(ts)^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(ts)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\mathrm{d}s. \tag{5.10}$$

对于 B_{12}, 直接对其进行估计, 得

$$\mathrm{B}_{12} \lesssim \eta\varepsilon t^{-\frac12(1-\frac{n}{q})}\Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\tau^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]. \tag{5.11}$$

因此, 结合 (5.10) 和 (5.11) 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_1 \lesssim{}& \eta\varepsilon t^{-\frac12(1-\frac{n}{q})}\int_0^{\delta}(1-s)^{-\frac12(1+\frac{n}{q})}s^{-(1-\frac{n}{q})}\Big[(ts)^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(ts)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\mathrm{d}s\\ &+ \eta\varepsilon t^{-\frac12(1-\frac{n}{q})}\Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\tau^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big].\end{aligned} \tag{5.12}$$

利用类似的方法, 可得 B_2, B_3 和 B_4 的估计如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_2 \lesssim{}& \eta\varepsilon t^{-\frac12(1-\frac{n}{q})}\int_0^{\delta}(1-s)^{-\frac12(1+\frac{n}{q})}s^{-(1-\frac{n}{q})}\Big[(ts)^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(ts)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\mathrm{d}s\\ &+ \eta\varepsilon t^{-\frac12(1-\frac{n}{q})}\Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\tau^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big],\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_3(\mathrm{B}_4) \lesssim{}& \eta\varepsilon t^{-\frac12(1-\frac{n}{q})}\int_0^{\delta}(1-s)^{-\frac12(1+\frac{n}{q})}s^{-(1-\frac{n}{q})}\\ &\times\Big[(ts)^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|((v-\widetilde{v})(ts),(w-\widetilde{w})(ts))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big]\mathrm{d}s\\ &+ \eta\varepsilon t^{-\frac12(1-\frac{n}{q})}\Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\tau^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|((v-\widetilde{v})(\tau),(w-\widetilde{w})(\tau))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big].\end{aligned} \tag{5.14}$$

合并上述估计 (5.4)–(5.5), (5.8)–(5.9) 和 (5.12)–(5.14), 有如下结果:

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}} + t^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\\ \lesssim{}& \|\mathrm{e}^{t\Delta}(\boldsymbol{u}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0)\|_{\mathbf{L}^{n,\infty}} + t^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|\mathrm{e}^{t\Delta}(\boldsymbol{u}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\\ &+ \eta\varepsilon\int_0^{\delta}(1-s)^{-\frac{n}{q}}s^{-(1-\frac{n}{q})}\Big[(ts)^{\frac12(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{u}(ts)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\eta\varepsilon\Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\tau^{\frac12(1-\frac nq)}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\\
&+\eta\varepsilon\int_0^\delta(1-s)^{-\frac nq}s^{-(1-\frac nq)}\Big[(ts)^{\frac12(1-\frac nq)}\|((v-\widetilde{v})(ts),(w-\widetilde{w})(ts))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big]\mathrm{d}s\\
&+\eta\varepsilon\Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\tau^{\frac12(1-\frac nq)}\|((v-\widetilde{v})(\tau),(w-\widetilde{w})(\tau))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big]\\
&+\eta\varepsilon\int_0^\delta(1-s)^{-\frac12(1+\frac nq)}s^{-(1-\frac nq)}\Big[(ts)^{\frac12(1-\frac nq)}\|\boldsymbol{u}(ts)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\mathrm{d}s\\
&+\eta\varepsilon\int_0^\delta(1-s)^{-\frac12(1+\frac nq)}s^{-(1-\frac nq)}\Big[(ts)^{\frac12(1-\frac nq)}\|((v-\widetilde{v})(ts),(w\\
&-\widetilde{w})(ts))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big]\mathrm{d}s. \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

下面估计 $v-\widetilde{v}$. 先计算 $v-\widetilde{v}$ 的 $L^{\frac n2,\infty}$ 范数, 有

$$
\begin{aligned}
\|v-\widetilde{v}\|_{L^{\frac n2,\infty}}&\leqslant\|\mathrm{e}^{t\Delta}(v_0-\widetilde{v}_0)\|_{L^{\frac n2,\infty}}+\|\mathcal{B}_3(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}},v)\|_{L^{\frac n2,\infty}}+\|\mathcal{B}_3(\widetilde{\boldsymbol{u}},v-\widetilde{v})\|_{L^{\frac n2,\infty}}\\
&\quad+\|\mathcal{B}_4(v-\widetilde{v},w-v)\|_{L^{\frac n2,\infty}}+\|\mathcal{B}_4(\widetilde{v},(w-\widetilde{w})-(v-\widetilde{v}))\|_{L^{\frac n2,\infty}}\\
&:=\mathrm{C}_0+\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3+\mathrm{C}_4.
\end{aligned}
$$

基于与前面相同的方法技巧, 我们对上述 5 项进行如下估计: 对于 C_1, 我们将其分解成如下两项:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_1&=\Big\|-\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot[(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}})v]\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^{\frac n2,\infty}}\\
&\lesssim\Big\|\Big[\int_0^{\delta t}+\int_{\delta t}^t\Big]\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot[(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}})v]\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^{\frac n2,\infty}}\\
&:=\mathrm{C}_{11}+\mathrm{C}_{12}.
\end{aligned}
$$

对于 C_{11}, 由引理 2.2 和引理 2.4 可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_{11}&=\Big\|\int_0^{\delta t}\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot[(\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}})v]\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^{\frac n2,\infty}}\\
&\lesssim\int_0^{\delta t}(t-\tau)^{-\frac12-\frac n2(\frac1q+\frac{n+q}{nq}-\frac2n)}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\|v(\tau)\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}}\mathrm{d}\tau\\
&\lesssim\int_0^{\delta t}(t-\tau)^{-\frac nq}\tau^{-(1-\frac nq)}\Big[\tau^{\frac12(1-\frac nq)}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\mathrm{d}\tau\|v\|_{\mathcal{Y},2}\\
&\lesssim\eta\varepsilon\int_0^\delta(1-s)^{-\frac nq}s^{-(1-\frac nq)}\Big[(ts)^{\frac12(1-\frac nq)}\|\boldsymbol{u}(ts)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\mathrm{d}s. \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

这里我们使用了变量替换 $\tau=ts$ 以及 (5.1) 中 v 的有界性. 对于 C_{12}, 直接计算得

$$
\mathrm{C}_{12}\lesssim\eta\varepsilon\Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}(\tau)^{\frac12(1-\frac nq)}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]. \qquad (5.17)
$$

因此由 (5.16) 和 (5.17), 可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_1&\lesssim\eta\varepsilon\int_0^\delta(1-s)^{-\frac nq}s^{-(1-\frac nq)}\Big[(st)^{\frac12(1-\frac nq)}\|\boldsymbol{u}(ts)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]\mathrm{d}s\\
&\quad+\eta\varepsilon\Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\tau^{\frac12(1-\frac nq)}\|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big]. \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

类似地, 可推得

$$\mathrm{C}_2(\mathrm{C}_3) \lesssim \eta\varepsilon \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{n}{q}} s^{-(1-\frac{n}{q})} \Big[(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|v(ts)-\widetilde{v}(ts)\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}}\Big] \mathrm{d}s + \eta\varepsilon \Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t} \tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|v(\tau)-\widetilde{v}(\tau)\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}}\Big], \tag{5.19}$$

$$\mathrm{C}_4 \lesssim \eta\varepsilon \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{n}{q}} s^{-(1-\frac{n}{q})} \Big[(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v-\widetilde{v})(ts),(w-\widetilde{w})(ts))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big] \mathrm{d}s + \eta\varepsilon \Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t} \tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v-\widetilde{v})(\tau),(w-\widetilde{w})(\tau))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big]. \tag{5.20}$$

对于 $v-\widetilde{v}$ 的 $L^{\frac{nq}{n+q}}$ 范数, 可用类似的方法得到, 因此有

$$\begin{aligned}
&\|v-\widetilde{v}\|_{L^{\frac{n}{2},\infty}} + t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|v-\widetilde{v}\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}} \\
\lesssim\ & \|\mathrm{e}^{t\Delta}(v_0-\widetilde{v}_0)\|_{L^{\frac{n}{2},\infty}} + t^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|\mathrm{e}^{t\Delta}(v_0-\widetilde{v}_0)\|_{L^{\frac{nq}{n+q},\infty}} \\
&+ \eta\varepsilon \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{n}{q}} s^{-(1-\frac{n}{q})} \Big[(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|\boldsymbol{u}(ts)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big] \mathrm{d}s \\
&+ \eta\varepsilon \Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t} \tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|\boldsymbol{u}(\tau)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big] \\
&+ \eta\varepsilon \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{n}{q}} s^{-(1-\frac{n}{q})} \Big[(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v-\widetilde{v})(ts),(w-\widetilde{w})(ts))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big] \mathrm{d}s \\
&+ \eta\varepsilon \Big[\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t} \tau^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v-\widetilde{v})(\tau),(w-\widetilde{w})(\tau))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big] \\
&+ \eta\varepsilon \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n}{q})} s^{-(1-\frac{n}{q})} \Big[(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|\boldsymbol{u}(ts)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(ts)\|_{\mathbf{L}^{q,\infty}}\Big] \mathrm{d}s \\
&+ \eta\varepsilon \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n}{q})} s^{-(1-\frac{n}{q})} \Big[(ts)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})} \|((v \\
&-\widetilde{v})(ts),(w-\widetilde{w})(ts))\|_{[L^{\frac{nq}{n+q},\infty}]^2}\Big] \mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

这里我们指出, $w-\widetilde{w}$ 的估计具有和 (5.21) 式完全相同的形式. 因此, 为证明 (1.15), 令

$$M := \limsup_{t\to\infty} l(t) = \lim_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\to\infty}} \sup_{t\geqslant k} l(t).$$

从而只需证明 $M=0$. 由 (5.1) 可知 M 是有限非负的. 从而对 (5.15), (5.21) 以及与 (5.21) 有相同形式的 $w-\widetilde{w}$ 的估计应用 Lebesgue 控制收敛定理, 并利用假设 (1.14), 有

$$M \lesssim \eta\varepsilon(F(\delta)+1)M, \tag{5.22}$$

其中

$$F(\delta) := \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{n}{q}} s^{-(1-\frac{n}{q})} \mathrm{d}s + \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n}{q})} s^{-(1-\frac{n}{q})} \mathrm{d}s.$$

由 (5.22) 可知, 存在常数 $\widetilde{\eta}$, 使得

$$M \leqslant \widetilde{\eta}\varepsilon(F(\delta)+1)M. \tag{5.23}$$

由假设条件 $\varepsilon\widetilde{\eta}<1$ 以及 $\lim\limits_{\delta\to 0} F(\delta)=0$ 这一事实可知, 若选取 δ 充分小, 使得 $\widetilde{\eta}\varepsilon(F(\delta)+1)<1$, 则由 (5.23) 可推得 $M=0$, 从而 (1.15) 成立.

反过来, 若 (1.15) 成立, 则需要证明 (1.14). 注意到由 (5.1) 可知

$$l(t) \in L^\infty([0,\infty)) \text{ 且 } \lim_{t\to\infty} l(t) = 0.$$

重复上述 (5.15) 和 (5.21) 的证明过程, 可得如下估计:

$$h(t) \leqslant \widetilde{\eta}\varepsilon(F(\delta)+1)l(t). \tag{5.24}$$

因为 $\widetilde{\eta}\varepsilon(F(\delta)+1)$ 有界且与时间 t 无关, 则由 (1.15) 和 (5.24) 即得 (1.14). 定理 1.4 证毕.

参 考 文 献

[1] Rubinstein I. Electro-diffusion of ions [M]. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1990.

[2] Debye P, Hückel E. Zur theorie der elektrolyte, II: das grenzgesetz für die elektrische leitfähigkeit [J]. *Phys Z*, 1923, 24:305–325.

[3] Mock M S. An initial value problem from semiconductor device theory [J]. *SIAM J Math Anal*, 1974, 5:597–612.

[4] Mock M S. Asymptotic behavior of solutions of transport equations for semiconductor devices [J]. *J Math Anal Appl*, 1975, 49:215–225.

[5] Biler P, Hebisch W, Nadzieja T. The Debye system: existence and large time behavior of solutions [J]. *Nonlinear Anal*, 1994, 23:1189–1209.

[6] Biler P, Dolbeault J. Long time behavior of solutions to Nernst-Planck and Debye-Hückel drift-diffusion systems [J]. *Ann Henri Poincaré*, 2000, 1:461–472.

[7] Karch G. Scaling in nonlinear parabolic equations [J]. *J Math Anal Appl*, 1999, 234:534–558.

[8] Kurokiba M, Ogawa T. Well-posedness for the drift-diffusion system in L^p arising from the semiconductor device simulation [J]. *J Math Anal Appl*, 2008, 342:1052–1067.

[9] Ogawa T, Shimizu S. The drift-diffusion system in two-dimensional critical Hardy space [J]. *J Funct Anal*, 2008, 255:1107–1138.

[10] Ogawa T, Shimizu S. End-point maximal regularity and wellposedness of the two dimensional Keller-Segel system in a critical Besov space [J]. *Math Z*, 2010, 264:601–628.

[11] Zhao J H, Liu Q, Cui S B. Existence of solutions for the Debye-Huckel system with low regularity initial data [J]. *Acta Applicanda Mathematicae*, 2013, 125:1–10.

[12] Jerome J W. Analytical approaches to charge transport in a moving medium [J]. *Tran Theo Stat Phys*, 2002, 31:333–366.

[13] Jerome J W, Sacco R. Global weak solutions for an incompressible charged fluid with multi-scale couplings: initial-boundary-value problem [J]. *Nonlinear Anal*, 2009, 71:2487–2497.

[14] Ryham R J. Existence, uniqueness, regularity and long-term behavior for dissipative systems modeling electrohydrodynamics [J]. *Analysis of PDEs*, 2009:1–60, arXiv: 0910.4973v1.

[15] Schmuck M. Analysis of the Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson system [J]. *Math Models & Methods Appl Sci*, 2009, 19(6):993–1015.

[16] Zhao J H, Deng C, Cui S B. Well-posedness of a dissipative system modeling electrohydrodynamics in Lebesgue spaces [J]. *Diff Equa Appl*, 2011, 3(3):427–448.

[17] Zhang Z, Yin Z Y. Global well-posedness for the Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson system in dimension two [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2015, 40:102–106.

[18] Zhao J H, Liu Q. Well-posedness and decay for the dissipative system modeling electrohydrodynamics in negative Besov spaces [J]. *J Differential Equations*, 2017, 263:1293–1322.

[19] Fan J S, Gao H J. Uniqueness of weak solutions to a nonlinear hyperbolic system in electrohydrodynamics [J]. *Nonlinear Anal*, 2009, 70:2382–2386.

[20] Fan J S, Li F C, Nakamura G. Regularity criteria for a mathematical model for the deformation of electrolyte droplets [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2013, 26:494–499.

[21] Fan J S, Nakamura G, Zhou Y. On the Cauchy problem for a model of electro-kinetic fluid [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012, 25:33–37.

[22] Zhao J H, Bai M. Blow-up criteria for the three dimensional nonlinear dissipative system modeling electro-hydrodynamics [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2016, 31:210–226.

[23] Tian G, Xin Z P. One-point singular solutions to the Navier-Stokes equations [J]. *Topol Methods Nonl Anal*, 1998, 11:135–145.

[24] Barraza O A. Self-similar solutions in weak L^p spaces of the Navier-Stokes equations [J]. *Rev Mat Iberoamericana*, 1996, 12:411–439.

[25] Barraza O A. Regularity and stability for the solutions of the Navier-Stokes equations in Lorentz spaces [J]. *Nonlinear Anal*, 1999, 35:747–764.

[26] Yamazaki M. The Navier-Stokes equations in the weak-L^n spaces with time-dependent external force [J]. *Math Ann*, 2000, 317:635–675.

[27] Stein E, Weiss G. Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces [M]. Princeton: Princeton University Press, 1971.

[28] Meyer Y. Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations [M]//Current developments in Mathematics, Cambridge: International Press, 1996:105–212.

[29] Bergh J, Löfström J. Interpolation spaces [M]. An Introduction, Berlin: Springer-Verlag, 1976.

[30] O'Neil R. Convolution operators and $L^{(p,q)}$ spaces [J]. *Duke Math J*, 1963, 30:129–142.

Asymptotic Stability of Self-similar Solutions for Dissipative Systems Modeling Electrohydrodynamics

ZHAO Jihong[1] LI Xiurong[2]

[1]School of Mathematics and Information Science, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, Shaanxi, China; College of Science, Northwest A&F University, Yangling 712100, Shaanxi, China. E-mail: jihzhao@163.com

[2]College of Science, Northwest A&F University, Yangling 712100, Shaanxi, China. E-mail: 18435154219@163.com

Abstract The authors consider a dissipative system of nonlinear and nonlocal equations modeling the flow of electrohydrodynamics in the whole space $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. By making use of the generalized L^p-L^q heat semigroup estimates in the Lorentz spaces and the generalized Hardy-Littlewood-Sobolev inequality, the authors first prove global existence and uniqueness of self-similar solution in the Lorentz spaces, then establish the asymptotic stability of self-similar solutions as time goes to infinity. Since the authors Cope with the initial data in the Lorentz spaces, the existence of self-similar solutions provided the initial data are small homogeneous functions.

Keywords Electrohydrodynamics, Lorentz spaces, Self-similar solution, Asymptotic stability

2010 MR Subject Classification 35B40, 35C06, 35K15, 35Q35

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 1, 2019

by ALLERTON PRESS, INC., USA