数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(1):79–92
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0007

带有衰退记忆的非自治经典反应扩散方程的吸引子*

汪 璇[1] 张玉宝[1] 杨 璐[2]

提要 当非线性项以任意阶多项式增长, 且外力项仅为平移有界而非平移紧时, 研究了非自治经典反应扩散方程解的长时间动力学行为. 应用抽象函数理论和新的估计技术, 在拓扑空间 $L^2(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^1_0(\Omega))$ 上, 证明了一致吸引子的存在性. 该结果改进和推广了 Chepyzhov 等 (2006) 和钟承奎等 (2006) 的相应结果.

关键词 非自治经典反应扩散方程, 一致吸引子, 任意阶多项式增长, 衰退记忆
MR (2000) 主题分类 34Q35, 35B40, 35B41
中图法分类 O175.27, O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)01-0079-14

1 引 言

在本文中, 我们考虑了带有衰退记忆的非自治经典反应扩散方程的渐近性态:

$$\begin{cases} u_t-\Delta u-\displaystyle\int_0^\infty k(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s+f(u)=g(x,t), & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R},\\ u(x,t)=0, & x\in\ \partial\Omega,\ t\in\mathbb{R},\\ u(x,t)=u_\tau(x,t), & x\in\Omega,\ t\leqslant\tau, \end{cases}\tag{1.1}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中带有光滑边界的有界域.

关于外力项 g, 如上所述, 仅设 $g(x,t)\in L^2_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ (即平移有界), 且

$$\mathcal{H}(g_0)=[g_0(x,s+h)|h\in\mathbb{R}]_{L^{2,w}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L^2(\Omega))},$$

其中 $[\cdot]$ 表示 $g_0(x,s+h)$ 关于空间 $L^{2,w}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ 弱收敛拓扑的闭包. 如果 $g\in\mathcal{H}(g_0)$, 则

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\|g(x,s)\|^2\mathrm{d}s<+\infty,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 范数.

关于非线性项, 设 f 为 C^1 函数且满足: 存在正常数 l, 使得

$$f'(s)\geqslant -l,\quad \forall s\in\mathbb{R},\tag{1.2}$$

且

$$C_1|s|^p-C_0\leqslant f(s)s\leqslant C_2|s|^p+C_0,\quad p\geqslant 0,\quad \forall s\in\mathbb{R},\tag{1.3}$$

本文 2016 年 9 月 30 日收到, 2018 年 6 月 6 日收到修改稿.
[1]西北师范大学数学与统计学院, 兰州 730070. E-mail: wangxuan@nwnu.edu.cn; blcx07@qq.com
[2]兰州大学数学与统计学院, 兰州 730000. E-mail: yanglu@lzu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11761062, No. 11561064, No. 11661071) 的资助.

其中常数 $C_i(i=0,1,2)$ 均为正数.

方程中衰退记忆项对应历史外力的作用, 通过函数 $\Delta u(\cdot)$ 和记忆核函数 $k(\cdot)$ 的线性卷积项来实现. 因此设 $k(\cdot)\in C^2(\mathbb{R}^+),\ k(s)\geqslant 0,\ k'(s)\leqslant 0,\ \ \forall s\in\mathbb{R}^+$. 设 $\mu(s)=-k'(s)$ 且满足

$$\mu\in C^1(\mathbb{R}^+)\cap L^1(\mathbb{R}^+),\quad \mu(s)\geqslant 0,\ \mu'(s)\leqslant 0,\ \ \forall s\in\mathbb{R}^+, \tag{1.4}$$

$$\mu'(s)+\delta\mu(s)\leqslant 0,\quad \forall s\geqslant 0, \tag{1.5}$$

其中 δ 为正常数.

显然, (1.5) 蕴含

$$0\leqslant \mu(s)\leqslant \mu(0)\mathrm{e}^{-\delta s},\quad 0\leqslant k(s)\leqslant \frac{\mu(0)}{\delta}\mathrm{e}^{-\delta s} \tag{1.6}$$

成立, 因此记忆核函数 $k(s)$ 和 $\mu(s)$ 沿指数衰退于零. 这种具有衰退记忆的长时间动力学行为成为我们研究的重点.

当记忆项被略去时 ($k\equiv 0$), 方程 (1.1) 成为通常意义下的经典反应扩散方程. 近年来, 许多学者都在从事该方程解的渐近性态研究[1–7]. 例如, 当非线性项满足超临界增长时, 文 [1] 通过构造相空间的斜积流, 证明了一致吸引子的存在性并且刻画出吸引子的结构.

当记忆项被包含时, 模型 (1.1) 成为我们的研究问题, 在文 [8] 被提及并且类似的问题在文 [9–10] 也被讨论和研究. 该模型来源于文 [11] 中 Coleman 和 Gurtin 建立的带有记忆的热流理论框架, 描述了热流在同类的、固定的和各向同性黏弹性 (衰退记忆) 热传导体中的热传导过程, 能量耗散的速度快于通常意义下的经典反应扩散方程. 在热能的传导过程中, 不仅受到现时外力的影响, 而且还受到历史外力的影响 (这种影响随着时间的流逝而逐渐衰退).

带有衰退记忆的经典反应扩散方程 (即热传导方程) 解的渐近性行为已被许多研究者考虑和探究, 参见文 [12–17] 以及相应文献. 文 [13] 中, Chepyzhov 和 Miranville 借助轨道吸引子获得了全局吸引子在空间 $L^2(\Omega)$ 的存在性. 在文 [16–17] 中, 我们已对自治情形下的模型 (1.1) 的长时间行为作了深入研究, 并且运用收缩函数理论证明了全局吸引子在弱拓扑空间 $L^2(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^1_0(\Omega))$ 和强拓扑空间 $H^1_0(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega))$ 中的存在性.

本文将在上述工作基础上研究非自治情形下模型 (1.1) 解的渐近性态. 关于方程 (1.1), 我们在空间 $L^2(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^1_0(\Omega))$ 中继续研究一致吸引子的存在性. 在研究过程中, 我们遇到了一些本质性研究困难. 首先, 由于方程 (1.1) 包含记忆项, 相对于通常的经典反应扩散方程的一元解空间, 需要构造更加复杂的二元解空间, 并且在此空间上作先验估计. 其次, 在超临界非线性项和衰退记忆项的影响下, 记忆项所在空间非紧, 同时不能使用 $(I-P_m)u$ 证明紧性, 外力项非紧 (仅满足平移有界), 因而在非自治系统中验证解过程的连续性、紧性或者渐近紧性是非常困难的. 最后, 因为记忆项无法得到 $\|\nabla u\|$ 的有界性, 从而文 [7] 的研究框架和证明方法不能平移到带有衰退记忆的经典反应扩散方程. 因此, 怎样攻克这些研究瓶颈成为本文的研究关键所在.

在本文中, 我们另辟新径建立了一种新的研究框架, 运用收缩函数理论成功地攻克了由超临界非线性项和衰退记忆项所带来的本质性研究困难. 最终验证了解过程的紧性, 在空间 $L^2(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^1_0(\Omega))$ 中得到了一致吸引子的存在性.

本文的主要结果为定理 3.3 (一致吸引子).

在随后的论述中, 为了简便起见, 定义 C(或者 C_i) 为任意正常数.

本文结构如下: 在第 2 节中, 介绍 (回顾) 了一些预备结果, 包括记号、空间的定义、关于非线性项的假设以及动力系统理论的一些抽象结果. 在第 3 节中, 证明了方程 (1.1) 的解生成的非自治动力系统的一致吸引子的存在性.

2　记号和预备结果

本节主要介绍将要用到的记号、函数空间和一些预备结果.

如同文 [18], 我们引入反映过往历史的新变量, 定义如下:

$$\eta^t(x,s)=\int_0^s u(x,t-r)\mathrm{d}r,\quad s\geqslant 0,\tag{2.1}$$

则

$$\partial_t\eta^t(x,s)=u(x,t)-\partial_s\eta^t(x,s),\quad s\geqslant 0.\tag{2.2}$$

令 $\mu(s)=-k'(s)$ 并且利用条件 $k(\infty)=0$, 方程 (1.1) 可转化为

$$\begin{cases}u_t-\Delta u-\displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s+f(u)=g(x,t),\\ \eta_t^t=-\eta_s^t+u.\end{cases}\tag{2.3}$$

相应的初值-边值条件为

$$\begin{cases}u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\geqslant\tau,\\ \eta^t(x,s)=0, & (x,s)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}^+,\ t\geqslant\tau,\\ u(x,\tau)=u_\tau(x), & x\in\Omega,\\ \eta^\tau(x,s)=\eta_\tau(x,s)=\displaystyle\int_0^s u_\tau(x,\tau-r)\mathrm{d}r, & (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}^+,\end{cases}\tag{2.4}$$

其中 $u(\cdot)$ 满足以下条件: 存在正常数 $\mathcal{R}$ 和 $\varrho=\min\{\frac{\delta}{2},\frac{\lambda_1}{2}\}$, 使得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\varrho s}\|\nabla u(-s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\mathcal{R},$$

其中 λ_1 为 $-\Delta$ 的第一特征值.

我们将使用文 [19] 中的记号. 设

$$A=-\Delta,\quad \text{其定义域为}\quad D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega).$$

考虑 Hilbert 空间族 $D(A^{\frac{s}{2}})$, $s\in\mathbb{R}$, 并且赋予相应的内积与范数:

$$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{D(A^{\frac{s}{2}})}=\langle A^{\frac{s}{2}}\cdot,A^{\frac{s}{2}}\cdot\rangle,\quad \|\cdot\|_{D(A^{\frac{s}{2}})}=\|A^{\frac{s}{2}}\cdot\|,$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 为空间 $L^2(\Omega)$ 的内积与范数. 因此, 有紧嵌入

$$D(A^{\frac{s}{2}})\hookrightarrow D(A^{\frac{r}{2}}),\quad \text{对于任意的}\quad s>r,$$

以及连续嵌入

$$D(A^{\frac{s}{2}})\hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}(\Omega),\quad \text{对于所有的}\quad s\in[0,\frac{n}{2})\tag{2.5}$$

成立.

为了书写方便, 对于 $0 \leqslant s < 3$, 记

$$\mathcal{H}_s = D(A^{\frac{s}{2}}), \quad \text{相应范数 } \|\cdot\|_{\mathcal{H}_s} = \|\cdot\|_{D(A^{\frac{s}{2}})},$$

则 $\mathcal{H}_0 = L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_1 = H_0^1(\Omega)$ 且 $\mathcal{H}_2 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

根据记忆核函数 $\mu(\cdot)$ 满足的条件, 设 $L_\mu^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_r)$ 为定义于 $\mathbb{R}^+$ 上取值于 $\mathcal{H}_r$ 的一族 Hilbert 空间,$\varphi:\ \mathbb{R}^+ \to \mathcal{H}_r$, $0 < r < 3$, 并且赋予相应内积与范数

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mu,\mathcal{H}_r} = \int_0^\infty \mu(s) \langle \varphi_1(s), \varphi_2(s) \rangle_{\mathcal{H}_r} \mathrm{d}s,$$

$$\|\varphi\|_{\mu,\mathcal{H}_r} = \int_0^\infty \mu(s) \|\varphi(s)\|_{\mathcal{H}_r}^2 \mathrm{d}s.$$

定义一族 Hilbert 空间

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{H}_{r-1} \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_r),$$

并且赋予范数

$$\|z\|_{\mathcal{E}_r} = \|(u,\eta^t)\|_{\mathcal{E}_r} = \Big(\frac{1}{2}(\|u\|_{\mathcal{H}_{r-1}}^2 + \|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_r}^2)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

为了便于估计, 还需以下预备结果 (见 [20–22]).

引理 2.1 记 $I = [0,T]$, $\forall\, T > 0$. 设记忆核函数 $\mu(s)$ 满足 (1.4)–(1.5) 式, 则对于任意的 $\eta^t \in C(I; L_\mu^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_r))$, $0 < r < 3$, 存在常数 $\delta > 0$, 使得

$$\langle \eta^t, \eta_s^t \rangle_{\mu,\mathcal{H}_r} \geqslant \frac{\delta}{2} \|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_r}^2. \tag{2.6}$$

以下预备结果将用于验证解过程的渐近紧性和证明一致吸引子的存在性.

定义 2.1 [23] 设 X 为 Banach 空间,B 为 X 中的有界集,Σ 为符号空间. 定义于 $(X\times X)\times(\Sigma\times\Sigma)$ 上的函数 $\phi(\cdot,\cdot\,;\ \cdot,\cdot)$ 称为 $B\times B$ 上的渐近收缩函数, 如果对于任意的序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ 及 $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma$, 存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ 及子列 $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{l\to\infty} \phi(x_{n_k}, x_{n_l}; \sigma_{n_k}, \sigma_{n_l}) = 0,$$

$\mathfrak{C}(B\times\Sigma)$ 表示定义于 $B\times B$ 上的收缩函数集合.

引理 2.2 (一致渐近紧性的验证) 设 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $t \geqslant \tau$, $\sigma \in \Sigma$ 为作用于 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 的过程族. 对于平移半群 $\{T(h)\}_{h\geqslant 0}$, 以下平移等式成立:

$$U_{T(h)\sigma}(t,\tau) = U_\sigma(t+h,\tau+h), \quad \forall h \geqslant 0,\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

如果过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$ 拥有一致 (w.r.t. $\sigma \in \Sigma$) 有界吸收集 B_0, 并且对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T = T(B_0,\varepsilon)$ 及 $\phi_T(\cdot,\cdot\,;\ \cdot,\cdot) \in \mathfrak{C}(B_0\times\Sigma)$, 使得

$$\|U_{\sigma_1}(T,\tau)x - U_{\sigma_2}(T,\tau)y\| \leqslant \varepsilon + \phi_T(x, y; \sigma_1, \sigma_2), \quad \forall x, y \in B_0,\ \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma, \tag{2.8}$$

其中 ϕ_T 依赖于 T, 则过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$ 在空间 X 中一致 (w.r.t. $\sigma \in \Sigma$) 渐近紧, 即对于任意有界序列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, $\{\sigma_n\} \subset \Sigma$ 和 $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$, 满足 $\{U_{\sigma_n}(t_n,\tau)y_n\}_{n=1}^\infty$ 在 X 相对紧, 当 $n\to\infty$, $t_n\to\infty$ 时.

证　设 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的有界序列, $\sigma\in\Sigma$, 并且 $\{t_n\}\subset\mathbb{R}^+$ 满足当 $n\to\infty$ 时,$t_n\to\infty$. 下面证明

$$\{U_{\sigma_n}(t_n,\tau)y_n\}_{n=1}^{\infty}\ \text{在 } X \text{ 中相对紧.}\tag{2.9}$$

运用文 [24] 的方法, 仅需证明 $\{U_{\sigma_n}(t_n,\tau)y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在收敛子列.

取正序列 $\{\varepsilon_m\}$ 满足 当 $m\to\infty$ 时,$\varepsilon_m\to 0$.

首先, 对于 ε_1, 根据 (2.8), 存在 $T_1=T_1(\varepsilon_1)$ 和 $\phi_1(\cdot,\cdot\,;\,\cdot,\cdot)\in\mathfrak{C}(B_0\times\Sigma)$, 使得

$$\|U_{\sigma_1}(T_1,\tau)x-U_{\sigma_2}(T_1,\tau)y\|\leqslant\varepsilon_1+\phi_{T_1}(x,\,y;\sigma_1,\sigma_2),\quad\forall x,y\in B_0,\ \forall\sigma_1,\sigma_2\in\Sigma.\tag{2.10}$$

由于 $t_n\to\infty$, 对于固定的 T_1, 设 t_n 足够大, 使得

$$U_{\sigma_n}(t_n-T_1+\tau,\tau)y_n\subset B_0,\quad n=1,2,\cdots.\tag{2.11}$$

记 $x_n=U_{\sigma_n}(t_n-T_1+\tau,\tau)y_n$, $x_m=U_{\sigma_m}(t_m-T_1+\tau,\tau)y_m$, 根据 (2.10) 式, 有

$$\begin{aligned}
&\|U_{\sigma_n}(t_n,\tau)y_n-U_{\sigma_m}(t_m,\tau)y_m\|\\
=&\|U_{T(t_n-T_1)\sigma_n}(t_n-t_n+T_1,\tau-t_n+T_1)y_n\\
&-U_{T(t_m-T_1)\sigma_m}(t_m-t_m+T_1,\tau-t_m+T_1)y_m\|\\
=&\|U_{T(t_n-T_1)\sigma_n}(T_1,\tau-t_n+T_1)y_n-U_{T(t_m-T_1)\sigma_m}(T_1,\tau-t_m+T_1)y_m\|\\
=&\|U_{T(t_n-T_1)\sigma_n}(T_1,\tau)U_{T(t_n-T_1)\sigma_n}(\tau,\tau-t_n+T_1)y_n\\
&-U_{T(t_m-T_1)\sigma_m}(T_1,\tau)U_{T(t_m-T_1)\sigma_m}(\tau,\tau-t_m+T_1)y_m\|\\
=&\|U_{T(t_n-T_1)\sigma_n}(T_1,\tau)U_{\sigma_n}(t_n-T_1+\tau,\tau)y_n\\
&-U_{T(t_m-T_1)\sigma_m}(T_1,\tau)U_{\sigma_m}(t_m-T_1+\tau,\tau)y_m\|\\
=&\|U_{T(t_n-T_1)\sigma_n}(T_1,\tau)x_n-U_{T(t_m-T_1)\sigma_m}(T_1,\tau)x_m\|\\
\leqslant&\varepsilon_1+\phi_{T_1}(x_n,\,x_m;\overline{\sigma}_n,\overline{\sigma}_m),
\end{aligned}\tag{2.12}$$

其中 $\overline{\sigma}_n=T(t_n-T_1)\sigma_n$ 且 $\overline{\sigma}_m=T(t_m-T_1)\sigma_m$.

根据 $\mathfrak{C}(B\times\Sigma)$ 的定义并且 $\phi_{T_1}(x_n,\,x_m;\overline{\sigma}_n,\overline{\sigma}_m)\in\mathfrak{C}(B\times\Sigma)$, 可知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 拥有子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$, 并且 $\{\overline{\sigma}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 拥有子列 $\{\overline{\sigma}_{n_k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\phi_{T_1}(x_{n_k}^{(1)},\,x_{n_l}^{(1)};\overline{\sigma}_{n_k}^{(1)},\,\overline{\sigma}_{n_l}^{(1)})\leqslant\varepsilon_1.\tag{2.13}$$

类似于文 [24], 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\sup_{p\in\mathbb{N}}\|U_{\sigma_{n_{k+p}}^{(1)}}(t_{n_{k+p}}^{(1)},\tau)y_{n_{k+p}}^{(1)}-U_{\sigma_{n_k}^{(1)}}(t_{n_k}^{(1)},\tau)y_{n_k}^{(1)}\|\\
\leqslant&\lim_{k\to\infty}\sup_{p\in\mathbb{N}}\limsup_{l\to\infty}\|U_{\sigma_{n_{k+p}}^{(1)}}(t_{n_{k+p}}^{(1)},\tau)y_{n_{k+p}}^{(1)}-U_{\sigma_{n_l}^{(1)}}(t_{n_l}^{(1)},\tau)y_{n_l}^{(1)}\|\\
&+\limsup_{k\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\|U_{\sigma_{n_k}^{(1)}}(t_{n_k}^{(1)},\tau)y_{n_k}^{(1)}-U_{\sigma_{n_l}^{(1)}}(t_{n_l}^{(1)},\tau)y_{n_l}^{(1)}\|\\
\leqslant&\varepsilon_1+\lim_{k\to\infty}\sup_{p\in\mathbb{N}}\lim_{l\to\infty}\phi_{T_1}(x_{n_{k+p}}^{(1)},\,x_{n_l}^{(1)};\overline{\sigma}_{n_{k+p}}^{(1)},\,\overline{\sigma}_{n_l}^{(1)})\\
&+\varepsilon_1+\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\phi_{T_1}(x_{n_k}^{(1)},\,x_{n_l}^{(1)};\overline{\sigma}_{n_k}^{(1)},\,\overline{\sigma}_{n_l}^{(1)}),
\end{aligned}\tag{2.14}$$

因此, 利用 (2.13) 式和 (2.14) 式, 可知

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{p\in\mathbb{N}}\|U_{\sigma^{(1)}_{n_{k+p}}}(t^{(1)}_{n_{k+p}},\tau)y^{(1)}_{n_{k+p}}-U_{\sigma^{(1)}_{n_k}}(t^{(1)}_{n_k},\tau)y^{(1)}_{n_k}\|\leqslant 4\varepsilon_1. \tag{2.15}$$

故存在常数 K_1, 使得

$$\|U_{\sigma^{(1)}_{n_k}}(t^{(1)}_{n_k},\tau)y^{(1)}_{n_k}-U_{\sigma^{(1)}_{n_l}}(t^{(1)}_{n_l},\tau)y^{(1)}_{n_l}\|\leqslant 5\varepsilon_1,\quad \text{对于所有的 } k,l\geqslant K_1. \tag{2.16}$$

根据归纳假设可知, 对于每一个 $m\geqslant 1$, 存在 $\{U_{\sigma^{(m)}_{n_k}}(t^{(m)}_{n_k},\tau)y^{(m)}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列

$$\{U_{\sigma^{(m+1)}_{n_k}}(t^{(m+1)}_{n_k},\tau)y^{(m+1)}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty},$$

和特定的常数 K_{m+1}, 使得

$$\|U_{\sigma^{(m+1)}_{n_k}}(t^{(m+1)}_{n_k},\tau)y^{(m+1)}_{n_k}-U_{\sigma^{(m+1)}_{n_l}}(t^{(m+1)}_{n_l},\tau)y^{(m+1)}_{n_l}\|\leqslant 5\varepsilon_{m+1},\quad \forall k,l\geqslant K_{m+1}. \tag{2.17}$$

下面我们考虑对角线子列 $\{U_{\sigma^{(k)}_{n_k}}(t^{(k)}_{n_k},\tau)y^{(k)}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. 由于 $\{U_{\sigma^{(k)}_{n_k}}(t^{(k)}_{n_k},\tau)y^{(k)}_{n_k}\}_{k=m}^{\infty}$ 为 $\{U_{\sigma^{(m)}_{n_k}}(t^{(m)}_{n_k},\tau)y^{(m)}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列, 对于每一个 $m\in\mathbb{N}$, 有

$$\|U_{\sigma^{(k)}_{n_k}}(t^{(k)}_{n_k},\tau)y^{(k)}_{n_k}-U_{\sigma^{(k)}_{n_l}}(t^{(l)}_{n_l},\tau)y^{(l)}_{n_l}\|\leqslant 5\varepsilon_m,\quad \text{对所有的 } k,l\geqslant \max\{m,K_m\}, \tag{2.18}$$

联合当 $m\to\infty$ 时,$\varepsilon_m\to 0$, 故 $\{U_{\sigma^{(k)}_{n_k}}(t^{(k)}_{n_k},\tau)y^{(k)}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 为 X 的 Cauchy 列. 即 $\{U_{\sigma_n}(t_n,\tau)y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中相对紧.

以下结果来自 Chepyzhov 和 Vishik[25].

定义 2.2[25] 作用于 X 的过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Sigma$ 称为 $(X\times\Sigma,X)$- 连续, 如果对于所有固定的 t 和 τ, $t\geqslant\tau$, $\tau\in\mathbb{R}$, 映射 $(u,\sigma)\mapsto U_\sigma(t,\tau)u$ 映 $X\times\Sigma$ 入 X 连续.

定理 2.1[25] (一致吸引子的存在性和结构) 设作用于 X 的过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $t\geqslant\tau$, $\sigma\in\Sigma$ 为一致 (w.r.t. $\sigma\in\Sigma$) 渐近紧且 $(X\times\Sigma,X)$- 连续. 设 Σ 为紧的度量空间, 并且 $\{T(h)\}_{h\geqslant 0}$ 为 Σ 上的连续不变 $(T(h)\Sigma=\Sigma)$ 半群, 满足平移等式 (2.7), 则过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Sigma$ 拥有紧的一致吸引子 $\mathcal{A}_\Sigma$. 进一步, 有

$$\mathcal{A}_\Sigma=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{K}_\sigma(0), \tag{2.19}$$

其中 $\mathcal{K}_\sigma(0)$ 为 过程 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ 带着符号 $\sigma\in\Sigma$ 在 $t=0$ 时的核截片.

3 $\mathcal{E}_1$ 中的一致吸引子

下面将研究问题 (2.3)–(2.4) 在 $\mathcal{E}_1$ 中一致吸引子的存在性.

3.1 解的适定性

首先, 关于带有衰退记忆的动力系统 (2.3)–(2.4), 我们给出弱解的定义 (见文 [21] 关于波方程解的定义).

定义 3.1　记 $I=[\tau,T], \forall\, T>\tau$. 设 $g\in\mathcal{H}(g_0)$ 且 $z_\tau\in\mathcal{E}_1$. 二元组 $z=(u,\eta^t)$, 满足

$$u\in C(I;\mathcal{H}_0)\cap L^2(I;\mathcal{H}_1)\cap L^p(I;L^p(\Omega)),\quad \eta^t\in C(I;L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1));$$
$$\eta^t_t+\eta^t_s\in L^\infty(I;L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^{-1}))\cap L^2(I;L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_0)),$$

称 $z(t)$ 为问题 (2.3)–(2.4) 当初值 $z(\tau)=z_\tau$ 时于时间区间 I 上的弱解, 如果

$$\begin{aligned}&\langle u_t,\omega\rangle+\langle u,\omega\rangle_{\mathcal{H}_1}+\langle\eta^t,\omega\rangle_{\mu,\mathcal{H}_1}+\langle f(u),\omega\rangle=\langle g,\omega\rangle,\\&\langle\eta^t_t+\eta^t_s,\varphi\rangle_{\mu,\mathcal{H}_1}=\langle u,\varphi\rangle_{\mu,\mathcal{H}_1},\end{aligned}\tag{3.1}$$

对于所有的 $\omega\in\mathcal{H}_1$, $\varphi\in L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)$ 以及 a.e. $t\in I$.

应用文 [20–21] 中的 Galerkin 逼近方法, 可以得到问题 (2.3)–(2.4) 在空间 $\mathcal{E}_1$ 中解的存在唯一性.

定理 3.1　(解的存在唯一性)　记 $I=[\tau,T], \forall\, T>\tau$. 设 (1.2)–(1.3) 且 (1.4)–(1.5) 成立, $g_0\in L^2_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ 且 $g\in\mathcal{H}(g_0)$, 那么对于任意给定的初值 $z_\tau\in\mathcal{E}_1$, 问题 (2.3)–(2.4) 在 $\mathcal{E}_1$ 中存在唯一的解 $z=(u,\eta^t)$, 满足

$$\begin{aligned}&u\in L^2(I;\mathcal{H}_1)\cap L^p(I;L^p(\Omega)),\\&z\in L^2(I;\mathcal{E}_1)\cap L^\infty([0,\infty);\mathcal{E}_1).\end{aligned}\tag{3.2}$$

进一步, 设 $\{z^i_\tau,g^i\}(z^i_\tau\in\mathcal{E}_1$ 且 $g^i\in L^2_b(\mathbb{R};L^2(\Omega)))$, $i=1,2$ 为初始条件, 定义 z^i_τ 为问题 (2.3)–(2.4) 对应初始条件的解, 则以下估计成立: 对于所有的 $\tau\leqslant t\leqslant t+\tau$,

$$\|z_1(t)-z_2(t)\|^2_{\mathcal{E}_1}\leqslant Q(\|z^i_\tau\|_{\mathcal{E}_1},T)(\|z^1_\tau-z^2_\tau\|^2_{\mathcal{E}_1}+\|g_1-g_2\|^2_{L^2_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))}).\tag{3.3}$$

根据定理 3.1, 对于每一个 $g\in\mathcal{H}(g_0)$, 可以定义空间 $\mathcal{E}_1$ 上的解过程, 即

$$\begin{aligned}&U_g(t,\tau):\ \mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_1,\\&z_\tau=(u_t,\eta^\tau)\to(u(t),\eta^t)=U_g(t,\tau)z_\tau,\end{aligned}$$

且 $U_g(t,\tau)$, $g\in\mathcal{H}(g_0)$ 作用于 $\mathcal{E}_1$ 上的过程族.

3.2 有界一致吸收集

类似于自治系统有界吸收集的存在性证明, 可以得到以下对应于过程族 $U_g(t,\tau)$, $g\in\mathcal{H}(g_0)$ 的有界一致 (w.r.t. $g\in\mathcal{H}(g_0)$) 吸收集的存在性结果.

引理 3.1　(有界一致吸收集)　设 (1.2)–(1.5) 式成立, $g_0\in L^2_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ 且 $g\in\mathcal{H}(g_0)$, 那么对于 $\mathcal{E}_1$ 任意的有界子集 B, 存在仅依赖于 $\|g\|_{L^2_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))}$ 的正常数 N_0 和时刻 $T_B=T(\|B\|_{\mathcal{E}_1})$, 有

$$\|U_g(t,\tau)z_\tau\|^2_{\mathcal{E}_1}=\frac{1}{2}(\|u\|^2_{\mathcal{H}_0}+\|\eta^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_1})\leqslant N_0,\quad t-\tau\geqslant T_B,\ z_\tau\in B,\ g\in\mathcal{H}(g_0)\tag{3.4}$$

成立.

证　用 u 与方程 (2.3) 在空间 $L^2(\Omega)$ 上作内积, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|\nabla u\|^2-\int_0^\infty\mu(s)\langle\Delta\eta^t(s),u(t)\rangle\mathrm{d}s+\langle f(u),u\rangle=\langle g(x,t),u\rangle.\tag{3.5}$$

利用等式 $u(x,t)=\eta_t^t(x,s)+\eta_s^t(x,s)$, 将上式的积分项进行变换, 可得

$$\begin{aligned}&-\int_0^\infty \mu(s)\langle \Delta\eta(t,s),u(t)\rangle \mathrm{d}s\\ =&-\int_0^\infty \mu(s)\langle \Delta\eta(t,s),\eta_t^t(x,s)+\eta_s^t(x,s)\rangle \mathrm{d}s\\ =&\int_0^\infty \mu(s)\langle \nabla\eta(t,s),\nabla\eta_t^t(x,s)+\nabla\eta_s^t(x,s)\rangle \mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{3.6}$$

关于变量 x 在空间 Ω 积分, 有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mu(s)\langle \nabla\eta(t,s),\nabla\eta_t^t(x,s)\rangle \mathrm{d}s&=\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla\eta(t,s)|^2\mathrm{d}s\\ &=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty \mu(s)|\nabla\eta(t,s)|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{3.7}$$

应用引理 2.1, 可知

$$\int_0^\infty \mu(s)\langle \nabla\eta(t,s),\nabla\eta_s^t(x,s)\rangle \mathrm{d}s\geqslant \frac{\delta}{2}\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2.\tag{3.8}$$

利用 (1.3) 式, 可得

$$\langle f(u),u\rangle \geqslant C_1\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x-C_0|\Omega|,\tag{3.9}$$

并且

$$\langle g(t),u\rangle\leqslant \|g(t)\|\cdot\|u\|\leqslant \frac{1}{2\lambda_1}\|g(t)\|^2+\frac{\lambda_1}{2}\|u\|^2\leqslant \frac{1}{2\lambda_1}\|g(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2.\tag{3.10}$$

将以上估计代入 (3.5) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{\delta}{2}\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2+C_1\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x\\ \leqslant&\frac{1}{2\lambda_1}\|g(t)\|^2+C_0|\Omega|.\end{aligned}\tag{3.11}$$

应用 Poincaré 不等式, 且取 $\alpha=\min\{\lambda_1,\delta\}$, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)+\frac{\alpha}{2}(\|u\|^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)\\ \leqslant&\frac{1}{2\lambda_1}\|g(t)\|^2+C_0|\Omega|\leqslant C(1+\|g(t)\|^2).\end{aligned}\tag{3.12}$$

根据 Gronwall 引理, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\|u(t)\|^2+\|\eta^t(s)\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)\\ \leqslant&\frac{1}{2}(\|u(\tau)\|^2+\|\eta^\tau(s)\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}+\frac{C}{\alpha}+C\int_\tau^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\int_\tau^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s&\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}\Big(\int_{t-1}^t \mathrm{e}^{\alpha s}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s+\int_{t-2}^{t-1}\mathrm{e}^{\alpha s}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s+\cdots\Big)\\ &\leqslant (1+\mathrm{e}^{-\alpha}+\mathrm{e}^{-2\alpha}+\cdots)\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s\\ &\leqslant \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}\|g\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))}^2.\end{aligned}$$

设 $\|z(\tau)\|_{\mathcal{E}_1}^2 \leqslant R$, 则

$$\|z(t)\|_{\mathcal{E}_1}^2 \leqslant N_0, \quad t-\tau \geqslant T_B. \tag{3.13}$$

3.3 一致吸引子的存在性

为了得到一致吸引子在空间 $\mathcal{E}_1$ 的存在性, 我们还需证明以下预备结果.

引理 3.2　设 $z(t)$ 为问题 (2.3)–(2.4) 在空间 $\mathcal{E}_1$ 中的解. 如果 $g_0 \in L_b^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ 且 $g \in \mathcal{H}(g_0)$, (1.2)–(1.5) 成立, 那么对于任意的有界子集 $B \subseteq \mathcal{E}_1$, 存在常数 $N_1 > 0$ 和时刻 $T_B^* \geqslant T_B = T(\|B\|_{\mathcal{E}_1})$, 使得

$$\int_t^{t+1} \|\nabla u(s)\|^2 \mathrm{d}s + \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{L^p}^p \mathrm{d}s \leqslant N_1, \quad t-\tau \geqslant T_B^*. \tag{3.14}$$

证　关于 (3.11) 式在 $[t,\ t+1]$ 上积分, 利用 (3.13) 式, 可知

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+1} \|\nabla u(s)\|^2 \mathrm{d}s + \delta \int_t^{t+1} \|\eta^s(r)\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2 \mathrm{d}s + 2C_1 \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{L^p}^p \mathrm{d}s \\
&\leqslant 2C_0|\Omega| + \frac{1}{\lambda_1} \int_t^{t+1} \|g(s)\|^2 \mathrm{d}s + 2N_0 \\
&\leqslant 2C_0|\Omega| + \frac{1}{\lambda_1} \|g\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))}^2 \mathrm{d}s + 2N_0 \\
&= N_1, \quad t-\tau \geqslant T_B^*.
\end{aligned}$$

因此, (3.14) 式成立.

根据无穷维动力系统关于一致吸引子存在性的基本定理, 即定理 2.1[25], 还需验证过程族 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \mathcal{H}(g_0)$ 在空间 $\mathcal{E}_1$ 中的渐近紧性.

定理 3.2　设 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \mathcal{H}(g_0)$ 为问题 (2.3)–(2.4) 在能量空间 $\mathcal{E}_1$ 的解生成的过程族. 如果非线性项 $f(u)$ 满足 (1.2)–(1.3) 式, $g_0 \in L_b^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, $g \in \mathcal{H}(g_0)$ 且 (1.4)–(1.5) 式成立, 那么 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \mathcal{H}(g_0)$ 在空间 $\mathcal{E}_1$ 一致渐近紧.

证　设 $z_i = (u_i, \eta_i^t)$, $i = 1,2$ 为问题 (2.3)–(2.4) 分别满足初值条件 $z_{i\tau} = (u_{i\tau}, \eta_i^\tau)$ 的两个解, 初值属于空间 $\mathcal{E}_1$ 对应过程族 $\{U_g(t,\tau)\}, g \in \mathcal{H}(g_0)$ 的一致有界吸收集 B_0 且 $g_i \in \mathcal{H}(g_0)$. 记 $w = u_1 - u_2$, $\xi^t = \eta_1^t - \eta_2^t$, 则根据 (2.3) 式可知

$$\begin{cases}
w_t + Aw + \displaystyle\int_0^\infty \mu(s) A\xi^t(s) \mathrm{d}s + f(u_1) - f(u_2) = g_1(t) - g_2(t), \\
w(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \geqslant \tau, \\
\xi^t(x,s) = 0, \quad (x,s) \in (\partial\Omega \times \mathbb{R}^+),\ t \geqslant \tau, \\
w(\tau) = u_{1\tau} - u_{2\tau}, \\
\xi^\tau = \eta_1^\tau - \eta_2^\tau, \\
w(t) = \xi_t^t + \xi_s^t.
\end{cases} \tag{3.15}$$

将 (3.15) 式乘以 $w(t)$, 并且在 Ω 上积分, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|^2 + \|\nabla w\|^2 - \int_0^\infty \mu(s) \langle \Delta\xi^t(s), w \rangle \mathrm{d}s + \langle f(u_1) - f(u_2), w \rangle = \langle g_1(t) - g_2(t), w \rangle.$$

定义如下泛函:

$$E(t)=\frac{1}{2}(\|w\|^2+\|\xi^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_1}).$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)&=\int_\Omega w(t)w_t(t)\mathrm{d}x+\int_0^\infty\mu(s)\langle\nabla\xi_t^t(s),\nabla\xi^t(s)\rangle\mathrm{d}s\\&=-\|\nabla w\|^2-\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\nabla\xi^t(s)|^2\mathrm{d}s\\&\quad-\langle f(u_1)-f(u_2),w\rangle+\langle g_1(t)-g_2(t),w\rangle.\end{aligned}\tag{3.16}$$

根据 (1.2) 式, 可知

$$-\langle f(u_1)-f(u_2),w\rangle\leqslant l\|w\|^2.\tag{3.17}$$

应用引理 2.1, 可得

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\nabla\xi^t(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant-\frac{\delta}{2}\|\xi^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_1}.\tag{3.18}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+C_\delta E(t)\leqslant l\|w(t)\|^2+\int_\Omega(g_1(t)-g_2(t))w(t)\mathrm{d}x,\tag{3.19}$$

其中 $C_\delta=\min\{\delta,2\lambda_1\}$.

对于任意给定的 $T>\tau$, 将 (3.18) 式乘以 $\mathrm{e}^{C_\delta t}$ 并且从 τ 到 T 积分, 可得

$$\begin{aligned}E(T)\leqslant{}&\mathrm{e}^{-C_\delta(T-\tau)}E(\tau)+l\mathrm{e}^{-C_\delta T}\int_\tau^T\mathrm{e}^{C_\delta s}\|w(s)\|^2\mathrm{d}s\\&+\int_\tau^T\mathrm{e}^{-C_\delta(T-s)}\int_\Omega(g_1(s)-g_2(s))w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{3.20}$$

对应于引理 2.2, 设

$$\begin{aligned}&\phi_T(z_1,z_2;g_1,g_2)\\&=l\mathrm{e}^{-C_\delta T}\int_\tau^T\mathrm{e}^{C_\delta s}\|w(s)\|^2\mathrm{d}s+\int_\tau^T\mathrm{e}^{-C_\delta(T-s)}\int_\Omega(g_1(s)-g_2(s))w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&=l\mathrm{e}^{-C_\delta T}\int_\tau^T\mathrm{e}^{C_\delta s}\|u_1(s)-u_2(s)\|^2\mathrm{d}s\\&\quad+\int_\tau^T\mathrm{e}^{-C_\delta(T-s)}\int_\Omega(g_1(s)-g_2(s))(u_1(s)-u_2(s))\mathrm{d}x\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{3.21}$$

随后我们将验证定义于 $(\mathcal{E}_1\times\mathcal{E}_1)\times(\mathcal{H}(g_0)\times\mathcal{H}(g_0))$ 的函数 $\phi_T(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)$ 为 $B_0\times B_0$ 中的渐近收缩函数, 其中 B_0 为 $\mathcal{E}_1$ 的有界一致吸收集.

根据定义 2.1, 对于任意序列 $\{z_n^\tau\}\subset B_0$, 仅需证明存在子列 $\{z_{n_k}^\tau\}_{k=1}^\infty\subset\{z_n^\tau\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\|u_{n_l}(s)-u_{n_m}(s)\|^2\mathrm{d}s=0,\tag{3.22}$$

其中 $u_{n_l}(t)=\Pi_1U_{g_{n_l}}(t,\tau)z_{n_l}^\tau$, $\Pi_1:\ L^2(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathcal{H}_1)\to L^2(\Omega)$ 为投影算子.

下面证明

$$A := \{u(t), t\in[\tau,T] : u(t) = \Pi_1 U_g(t,\tau)z_\tau, z_\tau\in B_0, g\in\mathcal{H}(g_0)\} \tag{3.23}$$

在 $L^2([\tau,T];L^2(\Omega))$ 中相对紧.

首先, 关于 (3.11) 式在 $[\tau,T]$ 上积分并且利用 (3.13) 式, 可知

$$\begin{aligned}&\int_\tau^T \|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}s + \delta\int_\tau^T \|\eta^s(r)\|^2_{\mu,\mathcal{H}_1}\mathrm{d}s + 2C_1\int_\tau^T \|u(s)\|^p_{L^p}\mathrm{d}s\\ &\leqslant 2TC_0|\Omega| + \frac{1}{\lambda_1}\int_\tau^T \|g(s)\|^2\mathrm{d}s + C\\ &\leqslant 2TC_0|\Omega| + \frac{T}{\lambda_1}\|g\|^2_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))} + C,\quad t\geqslant 0.\end{aligned} \tag{3.24}$$

故 A 在 $L^2([\tau,T];\mathcal{H}_1)\cap L^p([\tau,T];L^p(\Omega))$ 中有界.

然后, 利用 (2.3) 式, 有

$$u_t = \Delta u + \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s - f(u) + g(x,t). \tag{3.25}$$

显然 $\Delta u \in L^2([\tau,T];H^{-1})$ 且 $g\in L^2([\tau,T];L^2(\Omega))$. 利用条件 (1.3) 可知,$f(u)\in L^{\frac{p}{p-1}}\big([\tau,T];L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)\big)$. 因为 $L^q(\Omega)\hookrightarrow H^{-\gamma}(\Omega)$, 所以 $f(u)\in L^q([\tau,T];H^{-\gamma}(\Omega))$, 其中 q 为 p 的对偶数, $p\geqslant 2$, $q>1$, 且 $\gamma>1$.

最后, 对于任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \mu(s)\langle\Delta\eta^t(s), v(t)\rangle\mathrm{d}s\\ &\leqslant \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^t(s)\|\cdot\|\nabla v(t)\|\mathrm{d}s\\ &\leqslant \Big(\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^t(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\cdot\Big(\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla v(t)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\\ &\leqslant \|\nabla v\|\Big(\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^t(t)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\cdot\Big(\int_0^\infty \mu(s)\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

利用 (3.11) 式可知, $\int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s \in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^+;H^{-1})$.

故 $\partial_t A$ 在 $L^q([\tau,T];H^{-\gamma})$ 中有界. 显然,A 在 $L^2([\tau,T];L^2(\Omega))$ 中相对紧, 即 (3.22) 式成立.

利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega (g_{n_l}(s)-g_{n_m}(s))(u_{n_l}(s)-u_{n_m}(s))\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &\leqslant \lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Big(\int_\tau^T\int_\Omega |g_{n_l}(s)-g_{n_m}(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\Big(\int_\tau^T\int_\Omega |u_{n_l}(s)-u_{n_m}(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\\ &\leqslant 2T\|g_0\|^2_{L_b^2(\mathbb{R};L(\Omega))}\cdot\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Big(\int_\tau^T\int_\Omega |u_{n_l}(s)-u_{n_m}(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.27}$$

因此, 根据引理 2.2 和定理 3.1 可知, $\{U_g(t,\tau)\}$, $g\in\mathcal{H}(g_0)$ 在 $\mathcal{E}_1$ 中一致渐近紧.

根据定理 2.1, 定理 3.1 和 定理 3.2, 可以得到如下定理.

定理 3.3 设 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g\in\mathcal{H}(g_0)$ 为问题 (2.3)–(2.4) 在能量空间 $\mathcal{E}_1$ 的解生成的过程族. 当定理 3.2 的假设成立时, 过程族 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g\in\mathcal{H}(g_0)$ 在空间 $\mathcal{E}_1$ 中拥有紧的一致吸引子 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}$. 进一步, 有

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}=\bigcup_{g\in\mathcal{H}(g_0)}\mathcal{K}_g(0), \tag{3.28}$$

其中 $\mathcal{K}_g(0)$ 为过程族 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g\in\mathcal{H}(g_0)$ 的核 $\mathcal{K}_g$ 在 $t=0$ 时刻的核截片.

注 3.1 在文 [7, 13] 中, 当非线性项满足超临界增长时, 作者利用渐近先验估计或者轨道吸引子, 证明了吸引子在 $L^2(\Omega)$ 中的存在性, 但是这些结果仅仅是本文工作的一个特例.

致谢 由衷感谢孙春友教授有益的讨论和帮助.

参 考 文 献

[1] Song H T, Ma S, Zhong C K. Attractors of non-autonomous reaction-diffusion equations [J]. *Nonlinearity*, 2009, 22:667–681.

[2] Sun C Y, Wang S H, Zhong C K. Global attractors for a nonclassical diffusion equation [J]. *Acta Math Sin(Engl Ser)*, 2007, 23:1271–1280.

[3] Sun C Y, Yang M H. Dynamics of the nonclassical diffusion equtions [J]. *Asymptot Anal*, 2008, 59:51–81.

[4] Yang L, Yang M H. Long-time behavior of reaction-diffusion equations with dynamical boundary condition [J]. *Nonlinear Anal*, 2011, 74:3876–3883.

[5] Yang L, Yang M H. Attractors of the non-autonomous reaction-diffusion equations with nonlinear boundary condition [J]. *Nonlinear Anal*, 2010, 11:3946–3954.

[6] Yang L. Uniform attractors for the closed process and application to the reaction-diffusion equation with dynamical boundary condition [J]. *Nonlinear Anal*, 2009, 71:4012–4025.

[7] Zhong C K, Yang M H, Sun C Y. The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the nonlinear reaction-diffusion equations [J]. *Journal of Differential Equations*, 2006, 223:367–399.

[8] Gurtin M E, Pipkin A. A gengral theory of heat conduction with finite wave speed [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1968, 31:113–126.

[9] Meixner J. On the linear theory of heat conduction [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1970, 39:108–130.

[10] Nunziato J. On heat conduction in materials with memory [J]. *Quart Appl Math*, 1971, 29:187–204.

[11] Coleman B D, Gurtin M E. Equipresence and constitutive equations for rigid heat conductors [J]. *Z Angew Math Phys*, 1967, 18:199–208.

[12] Chepyzhov V V, Gatti S, Grasselli M, et al. Trajectory and global attractors for evolution equations with memory [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2006, 19:87–96.

[13] Chepyzhov V V, Miranville A. On trajectory and global attractors for semilinear heat equations with fading memory [J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 2006, 55:119–167.

[14] Giorgi C, Naso M G, Pata V. Exponential stability in linear heat conduction with memory: a semigroup approach [J]. *Comm Appl Anal*, 2001, 5:121–133.

[15] Giorgi C, Pata V. Asymptotic behavior of a nonlinear hyperbolic heat equation with memory [J]. *Nonlin Diff Eq Appl*, 2001, 8:157–171.

[16] Wang X, Duan F X, Ma Q, et al. Strong global attractors for the classical reaction diffusion equations with fading memory [J]. *Chin Ann Math Ser A*, 2015, 36(3):265–276.

[17] Wang X, Zhu Z W, Ma Q Z. Global attractors for the classical reaction diffusion equations with fading memory [J]. *Chin Ann Math Ser A*, 2014, 35(4):423–434.

[18] Dafermos C M. Asymptotic stability in viscoelasticity [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1970, 37:297–308.

[19] Pata V, Squassina M. On the strongly damped wave equation [J]. *Comm Math Phys*, 2005, 253:511–533.

[20] Pata V, Zucchi A. Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory [J]. *Adv Math Sci Appl*, 2001, 11(2):505–529.

[21] Borini S, Pata V. Uniform attractors for a strongly damped wave equations with linear memory [J]. *Asymptot Anal*, 1999, 20:263–277.

[22] Gatti C, Miranville A, Pata V, et al. Attractors for semilinear equations of viscoelasticity with very low dissipation [J]. *R Mountain J Math*, 2008, 38:1117–1138.

[23] Sun C Y, Cao D M, Duan J Q. Non-autonomous dynamics of wave equations with nonlinear damping and critical nonlinearity [J]. *Nonlinearity*, 2006, 19:2645–2665.

[24] KHanmamedov A Kh. Global attractors for von Karman equations with nonlinear interior dissipation [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, 318:92–101.

[25] Chepyzhov V V, Vishik M I. Attractors for equations of mathematical physics [M]. Providence, RI: Amer Math Soc, 2001.

Attractor for the Non-autonomous Classical Reaction Diffusion Equations with Fading Memory

WANG Xuan[1] ZHANG Yubao[1] YANG Lu[2]

[1]College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou, 730070, China. E-mail: wangxuan@nwnu.edu.cn; blcx07@qq.com

[2]School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China. E-mail: yanglu@lzu.edu.cn

Abstract The long-time dynamical behavior of the non-autonomous classical reaction diffusion equations with fading memory is studied, when the nonlinearity adheres to polynomial growth of arbitrary order and the forcing term is only translation bounded instead of translation compact. By virtue of the contract function theory and some new estimate technique, the author prove the existence of uniform attractors in the space $L^2(\Omega) \times L^2_\mu(\mathbb{R}^+; H^1_0(\Omega))$. The result extends and improves some results by Chepyzhov et al. (2006) and Zhong et al. (2006).

Keywords Non-autonomous classical reaction diffusion equation, Uniform attractor, Polynomial growth of arbitrary order, Fading memory

2000 MR Subject Classification 34Q35, 35B40, 35B41

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 1, 2019

by ALLERTON PRESS, INC., USA