数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(2):113–126
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0010

$\mathbf{C}^n$ 中单位球上一般 Hardy 型空间的几种等价刻画*

张学军[1] 吕睿昕[2] 唐鹏程[2]

提要 设 $p>0$, $s\geqslant 0$, $q+n\geqslant 0$, $q+s\geqslant 0$, 本文探讨了 $\mathbf{C}^n$ 中单位球 B 上一般 Hardy 型空间 $H^{p,q,s}(B)$ 的几种等价刻画. 同时, 本文还给出了单位球内双变点球面积分所有情形的双向估计.

关键词 一般 Hardy 型空间, 积分双向估计, 等价刻画, 分式型导数, 单位球

MR (2010) 主题分类 32A37

中图法分类 O174.56

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2019)02-0113-14

1 引 言

设 B 和 ∂B 分别表示 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球体和单位球面; $H(B)$ 表示 B 上全纯函数全体; $\mathrm{d}v$ 和 $\mathrm{d}\sigma$ 分别为 B 和 ∂B 上满足 $v(B)=1$ 和 $\sigma(\partial B)=1$ 的正规化 Lebesgue 体测度和面测度. 对于 $\mathbf{C}^n$ 中的两点 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 和 $w=(w_1,\cdots,w_n)$, 其内积 $\langle z,w\rangle=z_1\overline{w}_1+\cdots+z_n\overline{w}_n$; 设 $m=(m_1,\cdots,m_n)$ 为多重指标, 记 $|m|=m_1+\cdots+m_n$, $z^m=z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}$; $H(B)$ 中函数 f 的复梯度 ∇f 和复径向导数 Rf 分别定义为

$$\nabla f(z)=\Big(\frac{\partial f(z)}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial f(z)}{\partial z_n}\Big),\quad Rf(z)=\sum_{j=1}^n z_j\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)=\langle\nabla f(z),\overline{z}\rangle.$$

设 $\beta(\cdot)$ 为 B 中的 Bergman 距离, $z\in B$, $r>0$, B 中的 Bergman 球定义为

$$D(z,r)=\{w:w\in B\ \text{且}\ \beta(w,z)<r\}.$$

设 $\alpha>-1$, $p>0$, B 上加权 Bergman 空间定义为

$$A^p_\alpha=\Big\{f:f\in H(B)\ \text{且}\ \|f\|_\alpha=\Big(\int_B|f(z)|^p\ \mathrm{d}v_\alpha(z)\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty\Big\},$$

其中 $\mathrm{d}v_\alpha(z)=c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha\ \mathrm{d}v(z)$, 常数 c_α 使得 $\int_B\mathrm{d}v_\alpha(z)=1$.

设 $n+\alpha$ 和 $n+\alpha+\gamma$ 不为负整数, 微分算子 $R^{\alpha,\gamma}$ 和积分算子 $R_{\alpha,\gamma}$ 分别定义如下:

$$R^{\alpha,\gamma}f(z)=\sum_{|m|\geqslant 0}\frac{\Gamma(n+1+\alpha)\ \Gamma(n+1+|m|+\alpha+\gamma)}{\Gamma(n+1+\alpha+\gamma)\ \Gamma(n+1+|m|+\alpha)}\ a_mz^m\ ,$$

$$R_{\alpha,\gamma}f(z)=\sum_{|m|\geqslant 0}\frac{\Gamma(n+1+\alpha+\gamma)\ \Gamma(n+1+|m|+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)\ \Gamma(n+1+|m|+\alpha+\gamma)}\ a_mz^m\ ,$$

本文 2018 年 4 月 14 日收到, 2018 年 10 月 5 日收到修改稿.

[1]通信作者. 湖南师范大学数学与统计学院, 长沙 410006. E-mail: xuejunttt@263.net

[2]湖南师范大学数学与统计学院, 长沙 410006. E-mail: 1019238929@qq.com; 1228928716@qq.com

*本文受国家自然科学基金 (No. 11571104) 和湖南省研究生科研创新项目 (No. CX2018B286) 的资助.

其中 $f \in H(B)$ 且 $f(z) = \sum\limits_{|m|\geqslant 0} a_m z^m \ (z \in B)$. 算子 $R^{\alpha,\gamma}$ 和 $R_{\alpha,\gamma}$ 互为可逆算子.

众所周知, 单位球上的 Hardy 空间 $H^p(B)$ $(0 < p \leqslant \infty)$ 是一个经典的函数空间, 当 $0 < p < q \leqslant \infty$ 时, 具有包含关系 $H^q(B) \subset H^p(B)$, 那么人们自然想知道: 在任何 $H^q(B)$ 和 $H^p(B)$ 之间有没有不是 Hardy 空间的其他全纯函数空间呢? 能不能建立 Hardy 空间和某些其他经典函数空间的一种连续性的包含关系呢? 基于这种考虑, 我们定义如下一种一般 Hardy 型空间: 设 $a \in B$, φ_a 是 B 上的对合自同构变换, 满足 $\varphi_a(0) = a,\ \varphi_a(a) = 0$. 对 $p > 0,\ s \geqslant 0,\ q+s \geqslant 0,\ q+n \geqslant 0$, 如果 $f \in H(B)$ 且 $\|f\|_{p,q,s} = \sup\limits_{0\leqslant r<1} M_{p,q,s}(r,f) < \infty$, 这里

$$M_{p,q,s}^p(r,f) = \sup_{a\in B}(1-r^2)^q \int_{\partial B} |f(r\xi)|^p\ (1-|\varphi_a(r\xi)|^2)^s\ \mathrm{d}\sigma(\xi),$$

称 f 属于一般 Hardy 型空间 $H^{p,q,s}(B)$. 当 $p \geqslant 1$ 时, 空间 $H^{p,q,s}(B)$ 依范数 $\|\cdot\|_{p,q,s}$ 构成一个 Banach 空间; 当 $0 < p < 1$ 时, 空间 $H^{p,q,s}(B)$ 依距离 $\rho(f,g) = ||f-g||_{p,q,s}^p$ 构成一个完备的距离空间. 特别地, 当 $q = s = 0$ 时, 空间 $H^{p,q,s}(B)$ 恰好是 Hardy 空间 $H^p(B)$. 给定 $0 < p < \infty$ 后, 通过取不同的参数 q 和 s, 可以得到一种连续包含关系 $H^\infty(B) \subseteq H^{p,q,s}(B) \subseteq H^p(B)$. 在讨论函数空间时, 另一个问题也是人们一直感兴趣的, 那就是一些经典函数空间能否嵌入某个函数空间做整体讨论呢? 实际上, 通过取不同的参数 q, s 和 p, 我们可以得到 $H^{p,q,s}(B)$ 等很多经典全纯函数空间.

一般 Hardy 型空间 $H^{p,q,s}(B)$ 是 Hardy 空间的一种推广, 与此相关的如文 [1–16] 等. 在探讨 $H^{p,q,s}(B)$ 空间的性质和应用该空间时, 由于受到参数 p, q, s 的制约, 往往会使问题的讨论遇到一些障碍, 为了克服这些障碍, 需要各种手段或处理技巧, 需要各种比较实用的等价范数. 本文的主要工作就是利用微分算子 $R^{\alpha,\gamma}$, 高阶径向导数和高阶偏导数来刻画空间 $H^{p,q,s}(B)$.

2 主要引理及其证明

本文中我们将用记号 $c, c_1, c_2, \cdots$ 表示与变量 z, w 无关的正数, 当然可以与某些参数或固定量有关, 不同的地方可以代表不同的数; "$E \approx F$" 表示比较, 即存在正的常数 A_1 和 A_2, 使得 $A_1 E \leqslant F \leqslant A_2 E$. 为了证明主要结果, 我们先给出一些引理.

在文 [1] 中, Rudin 给出了如下结果.

引理 2.1 设 $z \in B$, c 为实数, $t > -1$, 记

$$I(z) = \int_{\partial B} \frac{1}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{n+c}}\ \mathrm{d}\sigma(\xi), \quad J(z) = \int_B \frac{(1-|w|^2)^t}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+t+c}}\ \mathrm{d}v(w).$$

那么下列结论成立:

(1) 当 $c < 0$ 时, $I(z) \approx J(z) \approx 1$.

(2) 当 $c = 0$ 时, $I(z) \approx J(z) \approx \log \frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}$.

(3) 当 $c > 0$ 时, $I(z) \approx J(z) \approx \frac{1}{(1-|z|^2)^c}$.

下列引理类似文 [3] 中的引理 1.10, 但该引理中恰好不包括下列引理中的这种情形.

引理 2.2 设 S_2 为复二维单位球边界, $f \in L^1(S_2, \mathrm{d}\sigma)$, 则

$$\int_{S_2} f(\xi_1,\xi_2)\ \mathrm{d}\sigma(\xi_1,\xi_2) = \int_D \Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z, \sqrt{1-|z|^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ \mathrm{d}\theta\Big\}\mathrm{d}v(z).$$

证 根据 $\mathrm{d}\sigma$ 的旋转不变性, 对任意 $\theta\in[-\pi,\pi]$, 有

$$\int_{S_2} f(\xi_1,\xi_2)\ \mathrm{d}\sigma(\xi_1,\xi_2)=\int_{S_2} f(\xi_1,\sqrt{1-|\xi_1|^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ \mathrm{d}\sigma(\xi_1,\xi_2).$$

由于 $f\in L^1(S_2,\mathrm{d}\sigma)$, 上式两边关于 θ 积分再结合 Fubini 定理, 可得

$$\int_{S_2} f(\xi_1,\xi_2)\ \mathrm{d}\sigma(\xi_1,\xi_2)=\int_{S_2}\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi_1,\sqrt{1-|\xi_1|^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ \mathrm{d}\theta\Big\}\ \mathrm{d}\sigma(\xi_1,\xi_2).$$

上式结合文 [3] 中引理 1.9 之 $k=1$ 的情形, 可得

$$\int_{S_2} f(\xi_1,\xi_2)\ \mathrm{d}\sigma(\xi_1,\xi_2)=\int_{D}\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z,\sqrt{1-|z|^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ \mathrm{d}\theta\Big\}\mathrm{d}v(z).$$

引理 2.3 设 $p>0$, $s\geqslant 0$, $q+n\geqslant 0$, $q+s\geqslant 0$, $\alpha>-1$ 和 $\gamma\geqslant 0$, M 和 N 是正整数, $f\in H(B)$.

(1) 如果 $I_1^p=\sup\limits_{0\leqslant r<1}\sup\limits_{a\in B}(1-r^2)^{q+p\gamma}\int_{\partial B}|R^{\alpha,\gamma}f(r\xi)|^p\ (1-|\varphi_a(r\xi)|^2)^s\ \mathrm{d}\sigma(\xi)<\infty$, 则

$$|R^{\alpha,\gamma}f(z)|\leqslant\frac{cI_1}{(1-|z|^2)^{\frac{q+pr+n}{p}}}$$

对一切 $z\in B$ 成立. 特别地, 对于 $f\in H^{p,q,s}(B)$, 则 $|f(z)|\leqslant\frac{c\|f\|_{p,q,s}}{(1-|z|^2)^{\frac{q+n}{p}}}$ $(z\in B)$.

(2) 如果 $I_2^p=\sup\limits_{0\leqslant r<1}\sup\limits_{a\in B}(1-r^2)^{q+pM}\int_{\partial B}|R^{(M)}f(r\xi)|^p\ (1-|\varphi_a(r\xi)|^2)^s\ \mathrm{d}\sigma(\xi)<\infty$, 则

$$|R^{(M)}f(z)|\leqslant\frac{cI_2}{(1-|z|^2)^{\frac{q+pM+n}{p}}}$$

对一切 $z\in B$ 成立, 这里 $R^{(M)}=R[R^{(M-1)}]$.

(3) 如果 $I_3^p=\sup\limits_{0\leqslant r<1}\sup\limits_{a\in B}(1-r^2)^{q+pN}\sum\limits_{|m|=N}\int_{\partial B}\Big|\frac{\partial^N f(w)}{\partial w^m}\Big|^p(1-|\varphi_a(r\xi)|^2)^s\ \mathrm{d}\sigma(\xi)<\infty$, 则

$$\Big|\frac{\partial^N f(z)}{\partial z^m}\Big|\leqslant\frac{cI_3}{(1-|z|^2)^{\frac{q+pN+n}{p}}}$$

对一切 $z\in B$ 和 $|m|=N$ 成立.

证 (1) 对任意 $z\in B$, 根据文 [3] 中的引理 2.20 可得, 当 $w\in D(z,1)$ 时,

$$1-|w|^2\ \approx\ |1-\langle z,w\rangle|\ \approx\ 1-|z|^2\ \approx\ 1-|z||w|.$$

再根据 $R^{\alpha,\gamma}f$ 的全纯性, 结合文 [3] 中的引理 1.2, 定理 2.24 和引理 1.8, 就有

$$\begin{aligned}|R^{\alpha,\gamma}f(z)|^p&\leqslant\frac{c}{(1-|z|^2)^{n+1}}\int_{D(z,1)}|R^{\alpha,\gamma}f(w)|^p\ \mathrm{d}v(w)\\&\leqslant\int_{D(z,1)}\frac{c_1|R^{\alpha,\gamma}f(w)|^p(1-|w|^2)^{q+p\gamma}\ (1-|\varphi_z(w)|^2)^s}{(1-|z|^2)^{q+p\gamma+n+1}}\ \mathrm{d}v(w)\\&\leqslant\frac{c_2}{(1-|z|^2)^{q+p\gamma+n-1}}\int_0^1\frac{I^p}{(1-r|z|)^2}\ \mathrm{d}r\leqslant\frac{c_3I^p}{(1-|z|^2)^{q+p\gamma+n}}.\end{aligned}$$

上述结果也可根据文 [5] 中引理 2.1 的办法, 利用 $D(z,\log\sqrt{2})\subset\frac{1+|z|}{2}B$ 进行论证.

特别地, 若取 $\alpha=\gamma=0$, 则可得到 $|f(z)|\leqslant\frac{c\|f\|_{p,q,s}}{(1-|z|^2)^{\frac{q+n}{p}}}$ $(z\in B)$. 类似可证 (2) 和 (3).

下列引理来源于文 [3] 中的定理 2.2.

引理 2.4 设 $\alpha > -1$, 若 $f \in A_\alpha^1$, 则

$$f(z) = \int_B \frac{f(w)}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+\alpha}}\, \mathrm{d}v_\alpha(w), \quad z \in B.$$

引理 2.5 设 $n+\alpha$ 和 $n+\alpha+\gamma$ 不为负整数, N_0 为正整数, $\beta = \alpha + N_0$, 对 B 中的点 z 和 w, 则存在一元 N_0 次多项式 h, 使得

$$R^{\alpha,\gamma}\Big\{\frac{1}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+\beta}}\Big\} = \frac{h(\langle z, w\rangle)}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+\beta+\gamma}}.$$

同样存在关于 z 和 $\overline{w}$ 全纯的多项式 $P(z, w)$, 使得

$$R_{\alpha,\gamma}\Big\{\frac{1}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+\beta+\gamma}}\Big\} = \frac{P(z, w)}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+\beta}}.$$

证 结论来自文 [3] 中的引理 2.18.

3 主要结果及其证明

引理 2.1 的应用非常广泛, 其特点是对单位球内一点的球体积分和球面积分给出了双向估计. 那么, 对于球内两点, 有没有类似的双向估计呢? 对于 $w, a \in B$, 最近文 [2] 给出和证明了如下积分的双向估计:

$$\int_B \frac{(1 - |z|^2)^\delta}{|1 - \langle z, w\rangle|^t\ |1 - \langle z, a\rangle|^r}\, \mathrm{d}v(z), \quad \delta > -1,\ t \geqslant 0,\ r \geqslant 0.$$

进一步在文 [16] 中给出和详细证明了下面积分的双向估计:

$$\int_B \frac{(1 - |z|^2)^\delta}{|1 - \langle z, w\rangle|^t\ |1 - \langle z, a\rangle|^r} \log^k \frac{\mathrm{e}}{1 - |z|^2}\, \mathrm{d}v(z), \quad \delta > -1,\ t \geqslant 0,\ r \geqslant 0,\ k \geqslant 0.$$

为了给出本文的主要结果, 我们首先给出球内双变点的球面积分的估计. 虽然本文只用到 3 种情形的 “$\leqslant$” 部分, 鉴于这个积分的应用性很广泛, 至今为止没有文献给出其双向估计和证明, 并且其证明和球体积分的证明有很多本质相异的地方, 本文就给出全部实质性 8 种情形双向估计的结果和比较详细的证明下面命题主要来自尚清丽的工作.

命题 3.1 设 w 和 a 为 B 中两点. 对于 $r > 0$ 和 $t > 0$, 记积分

$$I_{w,a} = \int_{\partial B} \frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1 - \langle \xi, w\rangle|^t\ |1 - \langle \xi, a\rangle|^r},$$

则有下列结论成立:

(1) 当 $t + r < n$ 时, $I_{w,a} \approx 1$.

(2) 当 $t + r = n$ 时, $I_{w,a} \approx \log \frac{\mathrm{e}}{|1-\langle w,a\rangle|}$.

(3) 当 $t + r > n$ 且 $\max\{t, r\} < n$ 时, $I_{w,a} \approx \frac{1}{|1-\langle w,a\rangle|^{t+r-n}}$.

(4) 当 $t = n > r$ 时, $I_{w,a} \approx \frac{1}{|1-\langle w,a\rangle|^r} \log \frac{\mathrm{e}}{|1-\langle w,\varphi_w(a)\rangle|}$.

(5) 当 $t = n = r$ 时, $I_{w,a} \approx \frac{1}{|1-\langle w,a\rangle|^n} \log \frac{\mathrm{e}}{1-|\varphi_w(a)|^2}$.

(6) 当 $t > n > r$ 时, $I_{w,a} \approx \frac{1}{(1-|w|^2)^{t-n}\ |1-\langle w,a\rangle|^r}$.

(7) 当 $t > n$ 且 $r > n$ 时, $I_{w,a} \approx \frac{1}{(1-|w|^2)^{t-n}|1-\langle w,a\rangle|^r} + \frac{1}{(1-|a|^2)^{r-n}|1-\langle w,a\rangle|^t}$.

(8) 当 $t > n = r$ 时, $I_{w,a} \approx \frac{1}{(1-|w|^2)^{t-n}|1-\langle w,a\rangle|^n} + \frac{1}{|1-\langle w,a\rangle|^t} \log \frac{\mathrm{e}}{1-|\varphi_a(w)|^2}$.

证 如果存在常数 $0<r_0<1$, 使得 $|w|\leqslant r_0$ 或 $|a|\leqslant r_0$, 根据引理 2.1, 这些双向估计是显然的. 不失一般性, 下列证明中设 w 和 a 充分靠近 B 的边界. 此外, 我们还利用结果: $(p+q)^\sigma\approx p^\sigma+q^\sigma$ $(\sigma>0)$ 对一切 $p\geqslant 0$ 和 $q\geqslant 0$ 成立.

根据引理 2.1, 若 $t+r<n$, 则

$$2^{-t-r}\leqslant I_{w,a}\leqslant\int_{\partial B}\frac{1}{|1-\langle\xi,w\rangle|^{t+r}}\ \mathrm{d}\sigma(\xi)+\int_{\partial B}\frac{1}{|1-\langle\xi,a\rangle|^{r+t}}\ \mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant c.$$

这意味着结论 (1) 是成立的.

利用变量替换 $\xi=\varphi_w(\eta)$, 文 [3] 中的引理 1.3 和 (4.7) 式, 可得

$$\begin{aligned}I_{w,a}&=\int_{\partial B}\frac{(1-|w|^2)^n\ \mathrm{d}\sigma(\eta)}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{2n}|1-\langle w,\varphi_w(\eta)\rangle|^t|1-\langle a,\varphi_w(\eta)\rangle|^r}\\&=\frac{(1-|w|^2)^{n-t}}{|1-\langle w,a\rangle|^r}\int_{\partial B}\frac{\mathrm{d}\sigma(\eta)}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{2n-t-r}|1-\langle\varphi_w(a),\eta\rangle|^r}\ \mathrm{d}\sigma(\eta).\end{aligned}\tag{3.1}$$

(3.1) 式结合引理 2.1 表明结论 (5) 是成立的.

对于其余情形, 首先证明 “$\geqslant$” 部分.

情形 (6)–(7).

根据文 [3] 中的 (1.21)–(1.22) 式, 可得

$$\int_{\partial B}\frac{|1-\langle\varphi_w(a),\eta\rangle|^{-r}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{2n-t-r}}\ \mathrm{d}\sigma(\eta)\geqslant\int_{\partial B}\frac{2^{-r}\ \mathrm{d}\sigma(\eta)}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{2n-t-r}}\geqslant 2^{-r}.\tag{3.2}$$

这样从 (3.1)–(3.2) 式就可得到

$$I_{w,a}\geqslant\frac{2^{-r}}{(1-|w|^2)^{t-n}|1-\langle w,a\rangle|^r}.\tag{3.3}$$

这表明情形 (6) 的 “$\geqslant$” 部分是成立的.

若利用替换 $\xi=\varphi_a(\eta)$, 则有

$$I_{w,a}=\frac{(1-|a|^2)^{n-r}}{|1-\langle w,a\rangle|^t}\int_{\partial B}\frac{|1-\langle\varphi_a(w),\eta\rangle|^{-t}}{|1-\langle a,\eta\rangle|^{2n-t-r}}\ \mathrm{d}\sigma(\eta).\tag{3.4}$$

类似地就可得到

$$I_{w,a}\geqslant\frac{2^{-t}}{(1-|a|^2)^{r-n}|1-\langle w,a\rangle|^t}.\tag{3.5}$$

(3.3) 式和 (3.5) 式表明情形 (7) 的 “$\geqslant$” 部分是成立的.

情形 (2)–(3). 我们考虑下列函数

$$f(w,a)=\int_{\partial B}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{(1-\langle w,\xi\rangle)^t\ (1-\langle\xi,a\rangle)^r},\quad w,a\in B.$$

类似文 [2] 中引理 2.2 相应部分的证明, 可得情形 (2)–(3) 的 “$\geqslant$” 部分是成立的.

情形 (8). 此情形的证明是比较复杂的, 分 $n=1$, $n=2$ 和 $n>2$ 这 3 种情况考虑.

(i) 当 $n=1$ 时, 设 $a=|a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\varphi_a(w)=|\varphi_a(w)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 以及

$$\Omega=\{z\in\overline{D}:2|1-|a||\varphi_a(w)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\alpha)}z|\geqslant|1-|\varphi_a(w)|^2z|\},$$

$$S=\{\theta\in[-\pi,\pi]:2|1-|a||\varphi_a(w)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\geqslant|1-|\varphi_a(w)|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\}.$$

经过计算可得 $\Omega=\{z\in\overline{D}:|z-z_0|\geqslant R\}$, 其中

$$z_0=\frac{4|a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\varphi)}-|\varphi_a(w)|}{(4|a|^2-|\varphi_a(w)|^2)|\varphi_a(w)|},\quad R^2=|z_0|^2-\frac{3}{(4|a|^2-|\varphi_a(w)|^2)|\varphi_a(w)|^2}.$$

对任意 $0\leqslant x\leqslant 1$, 可得到

$$\begin{aligned}&4|1-|\varphi_a(w)||a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\alpha)}x|^2-(1-|\varphi_a(w)|^2x)^2\\&\geqslant(3-2|a||\varphi_a(w)|x-|\varphi_a(w)|^2x)\{(|a|-|\varphi_a(w)|)^2x+1-|a|^2x\}>0.\end{aligned}$$

这意味着实轴上的区间 $[0,1]\subset\Omega$. 因此, 集合 $\{z:z\in\overline{D}$ 且 $0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}\}$ 或者 $\{z:z\in\overline{D}$ 且 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant 0\}$ 至少有一个含在 Ω 中. 不妨设 Ω 含有 $\{z:z\in\overline{D}$ 且 $0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}\}$, 这样就有 $[0,\frac{\pi}{2}]\subset S$. 根据解析函数积分平均的递增性, 令 $y=\frac{2|\varphi_a(w)|^2x}{1+|\varphi_a(w)|^4}$, 则有

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-\overline{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{t-1}}{|1-\overline{\varphi_a(w)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^t}\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-|a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{t-1}}{|1-|\varphi_a(w)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^t}\,\mathrm{d}\theta\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-|a||\varphi_a(w)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{t-1}}{|1-|\varphi_a(w)|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^t}\,\mathrm{d}\theta\\&\geqslant 2^{1-t}\int_S\frac{\mathrm{d}\theta}{|1-|\varphi_a(w)|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^{1-t}\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-2|\varphi_a(w)|^2\cos\theta+|\varphi_a(w)|^4}}\\&=\int_0^1\frac{2^{1-t}(1-x^2)^{-\frac12}\,\mathrm{d}x}{(1-2|\varphi_a(w)|^2x+|\varphi_a(w)|^4)^{\frac12}}\\&\geqslant 2^{-t}\int_0^{\frac{2|\varphi_a(w)|^2}{1+|\varphi_a(w)|^4}}\frac{\mathrm{d}y}{1-y}\geqslant c\log\frac{\mathrm{e}}{1-|\varphi_a(w)|^2}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

(ii) 当 $n>1$ 时, 根据酉变换, 可设 $a=(\lambda_1,\lambda_2,0,\cdots,0)$ 和 $\varphi_a(w)=(|\varphi_a(w)|,0,0,\cdots,0)$, 满足 $\lambda_2\geqslant 0$. 当 $y>0$ 且 $x\in D$ 时, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{2y}\,\mathrm{d}\theta=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^2\cdots(y-k+1)^2}{(k!)^2}\,|x|^{2k}\geqslant 1.\tag{3.7}$$

当 $\eta_1\in D$ 时,

$$\begin{aligned}&|1-\overline{\lambda}_1\eta_1|^2-\lambda_2^2(1-|\eta_1|^2)\\&=1-\overline{\lambda}_1\eta_1-\lambda_1\overline{\eta_1}-|a|^2+|\lambda_1|^2+|a|^2|\eta_1|^2\\&\geqslant(|\lambda_1|-|\eta_1|)^2+(1-|a|^2)(1-|\eta_1|^2)\\&>0\ \Rightarrow\ \frac{\lambda_2\sqrt{1-|\eta_1|^2}}{|1-\overline{\lambda}_1\eta_1|}<1.\end{aligned}$$

如果 $n=2$, 对任意 $\eta_1\in D$, 通过 (3.7) 式, 可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-\overline{\lambda}_1\eta_1-\lambda_2\sqrt{1-|\eta_1|^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{t-2}\,\mathrm{d}\theta\geqslant|1-\overline{\lambda}_1\eta_1|^{t-2}.\tag{3.8}$$

根据 (3.8) 式和引理 2.2, 再利用类似情形 $n=1$ 时的论证方法, 可以证得

$$\begin{aligned}&\int_{\partial B}\frac{|1-\langle\eta,a\rangle|^{t-2}}{|1-\langle\eta,\varphi_a(w)\rangle|^t}\,\mathrm{d}\sigma(\eta)\\&=\int_{|\eta_1|^2+|\eta_2|^2=1}\frac{|1-\overline{\lambda}_1\eta_1-\lambda_2\eta_2|^{t-2}}{|1-|\varphi_a(w)|\eta_1|^t}\mathrm{d}\sigma(\eta_1,\eta_2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{|\eta_1|<1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-\overline{\lambda}_1\eta_1 - \lambda_2\sqrt{1-|\eta_1|^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{t-2}}{|1-|\varphi_a(w)|\eta_1|^t}\ \mathrm{d}\theta \right\} \mathrm{d}v(\eta_1) \\
&\geqslant \int_{|\eta_1|<1} \frac{|1-\overline{\lambda}_1\eta_1|^{t-2}}{|1-|\varphi_a(w)|\eta_1|^t} \mathrm{d}v(\eta_1) = \int_0^1 r\Big\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-\overline{\lambda}_1 r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{t-2}}{|1-|\varphi_a(w)|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^t} \mathrm{d}\theta \Big\} \mathrm{d}r \\
&\geqslant \int_0^1 r\Big\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-\overline{\lambda}_1 r|\varphi_a(w)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{t-2}}{\pi|1-|\varphi_a(w)|^2 r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^t}\ \mathrm{d}\theta \Big\} \mathrm{d}r \geqslant \int_0^1 r\Big\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{2-t}\ \mathrm{d}\theta}{\pi|1-|\varphi_a(w)|^2 r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2} \Big\} \mathrm{d}r \\
&\geqslant c_1 \int_0^1 \frac{r\ \mathrm{d}r}{1-|\varphi_a(w)|^4 r^2} \geqslant c_2 \log \frac{\mathrm{e}}{1-|\varphi_a(w)|^2}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

如果 $n>2$, 根据文 [3] 中的引理 1.9 和情形 $n=2$ 时的论证方法, 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial B} \frac{|1-\langle \eta, a\rangle|^{t-n}}{|1-\langle \eta, \varphi_a(w)\rangle|^t}\ \mathrm{d}\sigma(\eta) \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \int_{|u_1|^2+|u_2|^2<1} \frac{|1-r\overline{\lambda}_1 u_1 - \lambda_2 u_2|^{t-n}\ \mathrm{d}v(u_1,u_2)}{(1-|u_1|^2-|u_2|^2)^{3-n}|1-|\varphi_a(w)|u_1|^t} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \int_D \frac{\mathrm{d}v(u_1)}{|1-|\varphi_a(w)|u_1|^t} \\
&\quad \times \int_0^{\sqrt{1-|u_1|^2}} r(1-|u_1|^2-r^2)^{n-3} \Big\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |1-\overline{\lambda}_1 u_1 - \lambda_2 r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{t-n} \mathrm{d}\theta \Big\} \mathrm{d}r \\
&\geqslant \frac{n-1}{2} \int_D \frac{(1-|u_1|^2)^{n-2}|1-\overline{\lambda}_1 u_1|^{t-n}\ \mathrm{d}v(u_1)}{|1-|\varphi_a(w)|u_1|^t} \\
&\geqslant c \int_0^1 \frac{r(1-r^2)^{n-2}}{(1-|\varphi_a(w)|^2 r^2)^{n-1}}\ \mathrm{d}r \geqslant c_1 \log \frac{\mathrm{e}}{1-|\varphi_a(w)|^2}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

通过 (3.3)–(3.4) 式, (3.6) 式和 (3.9)–(3.10) 式可得, 情形 (8) 的 “$\geqslant$” 部分是成立的.

接下来证明 “$\leqslant$” 部分.

设 $\mathrm{d}(z,w) = |\langle z-w, z\rangle| + |\langle w-z, w\rangle|$ $(z,w \in \overline{B})$, 根据文 [4], 存在常数 $c_d>0$, 使得

$$
\mathrm{d}(z,w) \leqslant c_d\{\mathrm{d}(z,a)+\mathrm{d}(a,w)\}, \quad z,w,a \in \overline{B}.
$$

给定 $w,a \in B$, 考虑 ∂B 的如下剖分:

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \Big\{ \eta \in \partial B : \mathrm{d}(\eta,w) \leqslant \frac{\mathrm{d}(w,a)}{2c_d} \Big\}; \\
\Omega_2 &= \Big\{ \eta \in \partial B : \mathrm{d}(\eta,a) \leqslant \frac{\mathrm{d}(w,a)}{2c_d} \Big\}; \\
\Omega_3 &= \Big\{ \eta \in \partial B : \frac{\mathrm{d}(w,a)}{2c_d} < \mathrm{d}(\eta,w) \leqslant \mathrm{d}(\eta,a) \Big\}; \\
\Omega_4 &= \Big\{ \eta \in \partial B : \frac{\mathrm{d}(w,a)}{2c_d} < \mathrm{d}(\eta,a) \leqslant \mathrm{d}(\eta,w) \Big\}.
\end{aligned}
$$

根据文 [4] 中的引理 3.3, 如果 $\xi \in \Omega_1 \cup \Omega_3$, 则存在常数 $c>0$, 使得 $|1-\langle \xi, a\rangle| \geqslant c|1-\langle w,a\rangle|$. 若 $t>n$, 则由引理 2.1 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1\cup\Omega_3} \frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle \xi, w\rangle|^t\ |1-\langle \xi, a\rangle|^r} \\
&\leqslant \frac{c}{|1-\langle w,a\rangle|^r} \int_{\partial B} \frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle \xi, w\rangle|^t}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{c_1}{|1-\langle w,a\rangle|^r\ (1-|w|^2)^{t-n}}. \tag{3.11}$$

根据文 [4] 中的引理 3.3, 如果 $\xi\in\Omega_2\cup\Omega_4$, 则存在常数 $c>0$, 使得 $|1-\langle\xi,w\rangle|\geqslant c(b+|1-\langle\xi,a\rangle|)\geqslant c|b+1-\langle\xi,a\rangle|$. 由文 [3] 中的 (1.13) 式以及解析函数积分平均的递增性可知, 当 $n>1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2\cup\Omega_4}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle\xi,w\rangle|^t\ |1-\langle\xi,a\rangle|^r}\\
\leqslant\ & c\int_{\partial B}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|b+1-\langle\xi,a\rangle|^t\ |1-\langle\xi,a\rangle|^r}\\
=\ &(n-1)c\int_D\frac{(1-|\eta|^2)^{n-2}\ \mathrm{d}v(\eta)}{(b+|1-|a|\eta|)^t|1-|a|\eta|^r}\\
\leqslant\ & c_1\int_{|u-1|<1}\frac{(1-|u-1|)^{n-2}}{(b+|u|)^t|u|^r}\ \mathrm{d}v(u)\\
\leqslant\ & c_1\int_0^2\int_{-\arccos\frac{R}{2}}^{\arccos\frac{R}{2}}\frac{(1-\sqrt{R^2+1-2R\cos\theta})^{n-2}}{(b+R)^tR^{r-1}}\ \frac{\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta}{\pi}\\
\leqslant\ & c_1\int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^{n-r-1}}{(b+R)^t}\ \frac{\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta}{\pi}+c_1\int_1^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(b+R)^tR^{r-1}}\ \frac{\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta}{\pi}\\
\leqslant\ & \frac{c_1}{b^{t+r-n}}\int_0^{\frac{1}{b+1}}y^{n-r-1}(1-y)^{t+r-n-1}\ \mathrm{d}y+c_2.
\end{aligned}$$

如果 $t+r>n>r$, 可得到

$$\int_{\Omega_2\cup\Omega_4}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle\xi,w\rangle|^t\ |1-\langle\xi,a\rangle|^r}\leqslant\frac{c}{b^{r+t-n}}. \tag{3.12}$$

如果 $t+r=n$, 则得到

$$\int_{\Omega_2\cup\Omega_4}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle\xi,w\rangle|^t\ |1-\langle\xi,a\rangle|^r}\leqslant c\log\frac{\mathrm{e}}{b}. \tag{3.13}$$

当 $n=1$ 时, 设 $x=1+\cos\theta$ 和 $y=\sin\theta$, 那么 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=2\cos\frac{\theta}{2}\ \ (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)\Rightarrow 2\cos\theta=\rho^2-2\ \ (0\leqslant\rho\leqslant 2)$. 由积分的旋转不变性, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2\cup\Omega_4}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\xi\overline{w}|^t|1-\xi\overline{a}|^r}\\
\leqslant\ & c\int_{|\xi|=1}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{(b+|1-|a|\xi|)^t|1-|a|\xi|^r}\leqslant c\int_{|\xi|=1}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|b+1-|a|\xi|^t|1-|a|\xi|^r}\\
\leqslant\ & c\int_{|\xi|=1}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|b+1-\xi|^t|1-\xi|^r}=c\int_{|\eta-1|=1}\frac{\mathrm{d}\sigma(\eta)}{|b+\eta|^t|\eta|^r}=\frac{2c}{\pi}\int_0^2\frac{(4-\rho^2)^{-\frac12}\ \mathrm{d}\rho}{\{b^2+(b+1)\rho^2\}^{\frac{t}{2}}\rho^r}\\
\leqslant\ & \frac{2c}{\pi}\int_0^2\frac{(4-\rho^2)^{-\frac12}\ \mathrm{d}\rho}{(b^2+\rho^2)^{\frac{t}{2}}\rho^r}\leqslant\frac{2c(\sqrt{2})^t}{\pi}\int_0^2\frac{(4-\rho^2)^{-\frac12}\ \mathrm{d}\rho}{(b+\rho)^t\rho^r}\leqslant c_1+c_2\int_0^1\frac{\mathrm{d}\rho}{(b+\rho)^t\rho^r}\\
=\ & c_1+\frac{c_2}{b^{t+r-1}}\int_0^{\frac{1}{b+1}}y^{-r}(1-y)^{t+r-2}\ \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

如果 $t+r>1>r$, 可得到

$$\int_{\Omega_2\cup\Omega_4}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\xi\overline{w}|^t|1-\xi\overline{a}|^r}\leqslant\frac{c}{|1-w\overline{a}|^{t+r-1}}. \tag{3.14}$$

如果 $t+r=1$, 则有

$$\int_{\Omega_2\cup\Omega_4}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\xi\overline{w}|^t|1-\xi\overline{a}|^r}\leqslant c\log\frac{\mathrm{e}}{|1-w\overline{a}|}.\tag{3.15}$$

类似地, 如果 $t+r>n>t$, 则有

$$\int_{\Omega_1\cup\Omega_3}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle\xi,w\rangle|^t\ |1-\langle\xi,a\rangle|^r}\leqslant\frac{c}{b^{r+t-n}}.\tag{3.16}$$

如果 $t+r=n$, 则有

$$\int_{\Omega_1\cup\Omega_3}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle\xi,w\rangle|^t\ |1-\langle\xi,a\rangle|^r}\leqslant c\log\frac{\mathrm{e}}{b}.\tag{3.17}$$

通过 (3.13) 式, (3.15) 式和 (3.17) 式可得到结果 (2) 中的“$\leqslant$”部分是成立的; 通过 (3.12) 式, (3.14) 式和 (3.16) 式可得结论 (3) 中的“$\leqslant$”部分是成立的; (3.11)–(3.12) 式则表明结论 (6) 中的“$\leqslant$”部分是成立的.

由 (3.1) 式和结论 (2) 表明结论 (4) 是成立的.

根据文 [4] 中的引理 3.3, 如果 $\xi\in\Omega_1$, 则存在常数 $c>0$, 使得 $|1-\langle\xi,a\rangle|\geqslant c|1-\langle w,a\rangle|$; 如果 $\xi\in\partial B\backslash\Omega_1$, 则存在常数 $c>0$, 使得 $|1-\langle\xi,w\rangle|\geqslant c|1-\langle w,a\rangle|$. 如果 $t-n>0$ 且 $r-n>0$, 由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}I_{w,a}&\leqslant\int_{\Omega_1}\frac{c_1\ \mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle\xi,w\rangle|^tb^r}+\int_{\partial B\backslash\Omega_1}\frac{c_1\ \mathrm{d}\sigma(\xi)}{b^t|1-\langle\xi,a\rangle|^r}\\&\leqslant\frac{c_2}{(1-|w|^2)^{t-n}|1-\langle w,a\rangle|^r}+\frac{c_2}{(1-|a|^2)^{r-n}|1-\langle w,a\rangle|^t}.\end{aligned}$$

这表明结论 (8) 中的“$\leqslant$”部分是成立的.

如果 $t>n=r$, 取 $t_1=t-\alpha$, 其中 $t-n<\alpha<t$. 因而 $r=n>t_1$ 且 $t_1>0$. 根据引理 2.1 和结论 (4), 就有

$$\begin{aligned}I_{w,a}&\leqslant\int_{\Omega_1}\frac{c_1\ \mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle\xi,w\rangle|^t|1-\langle w,a\rangle|^n}+\int_{\partial B\backslash\Omega_1}\frac{c_1|1-\langle w,a\rangle|^{-\alpha}\ \mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle\xi,w\rangle|^{t_1}|1-\langle\xi,a\rangle|^n}\\&\leqslant\int_{\partial B}\frac{c_1\ \mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle\xi,w\rangle|^t|1-\langle w,a\rangle|^n}+\int_{\partial B}\frac{c_1\ \mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle w,a\rangle|^{\alpha}|1-\langle\xi,w\rangle|^{t_1}|1-\langle\xi,a\rangle|^n}\\&\leqslant\frac{c_2}{(1-|w|^2)^{t-n}|1-\langle w,a\rangle|^n}+\ \frac{c_2}{|1-\langle w,a\rangle|^t}\log\frac{\mathrm{e}}{|1-\langle a,\varphi_a(w)\rangle|}.\end{aligned}$$

这意味着结论 (7) 中的“$\leqslant$”部分是成立的.

本命题证完.

下面给出空间 $H^{p,q,s}(B)$ 几种等价模的刻画.

定理 3.1 设 $p>0,\ s\geqslant0,\ q+n>0,\ q+s>0,\ \gamma\geqslant0,\ \alpha>-1$, M 和 N 为正整数, $f\in H(B)$, 则下列几条是等价的:

(1) $\|f\|_{p,q,s}^p<\infty$.

(2) $I_1^p=\sup\limits_{0\leqslant r<1}\sup\limits_{a\in B}(1-r^2)^{q+p\gamma}\int_{\partial B}|R^{\alpha,\gamma}f(r\xi)|^p\ (1-|\varphi_a(r\xi)|^2)^s\ \mathrm{d}\sigma(\xi)<\infty$.

(3) $I_2^p=\sup\limits_{0\leqslant r<1}\sup\limits_{a\in B}(1-r^2)^{q+pM}\int_{\partial B}|R^{(M)}f(r\xi)|^p\ (1-|\varphi_a(r\xi)|^2)^s\ \mathrm{d}\sigma(\xi)<\infty$.

(4) $I_3^p=\sup\limits_{0\leqslant r<1}\sup\limits_{a\in B}(1-r^2)^{q+pN}\sum\limits_{|m|=N}\int_{\partial B}\left|\frac{\partial^Nf}{\partial z^m}(r\xi)\right|^p\ (1-|\varphi_a(r\xi)|^2)^s\ \mathrm{d}\sigma(\xi)<\infty$.

进一步有 $\|f\|_{p,q,s}\approx I_1\approx I_2+|f(0)|\approx I_3+\sum\limits_{|m|=0}^{N-1}\left|\frac{\partial^{|m|}f}{\partial z^m}(0)\right|$, 且控制常数与 f 无关.

证 首先证明: 若 $\|f\|_{p,q,s}<\infty$, 则 $I_1\leqslant c\|f\|_{p,q,s}$.

由引理 2.3 知, 当 $t>\frac{q+n}{p}-1$ 时 $f\in A_t^1$. 再由引理 2.4, 有

$$f(z)=\int_B\frac{f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t}}\,\mathrm{d}v_t(w),\quad z\in B.$$

取正整数 N_0 满足 $t=\alpha+N_0>\frac{q+n}{p}-1$, 由上式及引理 2.5 知, 有多项式 h, 使

$$R^{\alpha,\gamma}f(z)=\int_B\frac{h(\langle z,w\rangle)f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t+\gamma}}\,\mathrm{d}v_t(w),\quad z\in B.$$

这样就有

$$|R^{\alpha,\gamma}f(z)|\leqslant c\int_B\frac{|f(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+\gamma+1}}\,\mathrm{d}v_t(w)\ .\tag{3.18}$$

对任意 $a\in B$ 和 $0\leqslant r<1$, 设

$$F(r,a)=(1-r^2)^{q+p\gamma}\int_{\partial B}|R^{\alpha,\gamma}f(r\xi)|^p(1-|\varphi_a(r\xi)|^2)^s\mathrm{d}\sigma(\xi).$$

因而 $I_1^p=\sup\limits_{0\leqslant r<1}\sup\limits_{a\in B}F(r,a)$.

(i) 情形 $p>1$.

选取

$$0<\sigma<\min\Big\{\frac{q+s+\gamma}{p},\ \frac{q+n+\gamma}{p}\Big\}.\tag{3.19}$$

对任意 $w,z\in B$, 设 $H(z,w)=\frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+\gamma+1}}$ 和 $h(w)=\frac{1}{(1-|w|^2)^\sigma}$.

当 $t>p'\sigma-1=\frac{p\sigma}{p-1}-1$ 时, 根据 (3.18) 式和 Hölder 不等式以及引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned}|R^{\alpha,\gamma}f(z)|^p&\leqslant c\int_B H(z,w)|f(w)|^ph(w)^{-p}\mathrm{d}v_t(w)\Big\{\int_B H(z,w)h(w)^{p'}\mathrm{d}v_t(w)\Big\}^{\frac{p}{p'}}\\&\leqslant\frac{c_1}{(1-|z|^2)^{(p-1)\gamma+p\sigma}}\int_B\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{t+p\sigma}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+\gamma+1}}\,\mathrm{d}v(w).\end{aligned}$$

根据上式和 Fubini 定理, 可得

$$\begin{aligned}&F(r,a)\\&\leqslant c\int_{\partial B}\frac{(1-|\varphi_a(r\xi)|^2)^s}{(1-r^2)^{p\sigma-q-\gamma}}\Big\{\int_B\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{t+p\sigma}}{|1-\langle r\xi,w\rangle|^{n+t+\gamma+1}}\,\mathrm{d}v(w)\Big\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\\&=c\int_B(1-|w|^2)^{t+p\sigma}|f(w)|^p\Big\{\int_{\partial B}\frac{(1-r^2)^{q+s+\gamma-p\sigma}(1-|a|^2)^s\ \mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle r\xi,a\rangle|^{2s}|1-\langle r\xi,w\rangle|^{n+t+\gamma+1}}\Big\}\mathrm{d}v(w).\end{aligned}\tag{3.20}$$

当 $2s<n$ 时, 根据 (3.19)–(3.20) 式, 命题 3.1(6), 文 [3] 中的引理 1.8, 文 [6] 中的引理 6 可得, 只要 $t>\max\big\{\frac{p\sigma}{p-1}-1,s+q-p\sigma-1,\frac{q+n}{p}-1\big\}$, 就有

$$\begin{aligned}F(r,a)&\leqslant\frac{c(1-|a|^2)^s}{(1-r^2)^{p\sigma-q-s-\gamma}}\int_B\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{t+p\sigma}}{(1-|rw|^2)^{t+\gamma+1}|1-\langle rw,ra\rangle|^{2s}}\mathrm{d}v(w)\\&\leqslant\frac{c_1(1-|a|^2)^s}{(1-r^2)^{p\sigma-q-\gamma-s}}\int_0^1\frac{(1-\rho^2)^{t+p\sigma}}{(1-r^2\rho^2)^{t+\gamma+1}}\Big\{\int_{\partial B}\frac{|f(\rho\xi)|^p\ \mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle\rho\xi,r^2a\rangle|^{2s}}\Big\}\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{c_1}{(1-r^2)^{p\sigma-q-\gamma-s}}\int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^{t+p\sigma-s}}{(1-r^2\rho^2)^{t+\gamma+1}}\int_{\partial B}|f(\rho\xi)|^p(1-|\varphi_{r^2a}(\rho\xi)|^2)^s\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}\rho$$
$$\leqslant c_2(1-r^2)^{q+s+\gamma-p\sigma}\|f\|_{p,q,s}^p\int_0^1\frac{(1-\rho)^{t+p\sigma-s-q}}{(1-r\rho)^{t+\gamma+1}}\,\mathrm{d}\rho\leqslant c_3\|f\|_{p,q,s}^p.$$

当 $2s>n$ 时, 由 (3.19)–(3.20) 式, 命题 3.1(7), 文 [3] 中的引理 1.8, 文 [6] 中的引理 6, 引理 2.3 以及引理 2.1 可得, 只要 $t>\max\left\{\frac{p\sigma}{p-1}-1, s+q-p\sigma-1, q+n-p\sigma-1, \frac{q+n}{p}-1\right\}$, 就有如下估计:

$$\begin{aligned}F(r,a)&\leqslant \frac{c(1-|a|^2)^s}{(1-r^2)^{p\sigma-q-s-\gamma}}\int_B\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{t+p\sigma}}{(1-|rw|^2)^{t+\gamma+1}|1-\langle rw,ra\rangle|^{2s}}\mathrm{d}v(w)\\&\quad+\frac{c(1-|a|^2)^s}{(1-r^2)^{p\sigma-q-s-\gamma}}\int_B\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{t+p\sigma}}{(1-|ra|^2)^{2s-n}|1-\langle rw,ra\rangle|^{n+t+\gamma+1}}\mathrm{d}v(w)\\&\leqslant c_1\|f\|_{p,q,s}^p+\frac{c_2(1-|a|^2)^s}{(1-r^2)^{p\sigma-q-s-\gamma}}\int_B\frac{\|f\|_{p,q,s}^p(1-|w|^2)^{t+p\sigma-q-n}}{(1-|ra|^2)^{2s-n}|1-\langle rw,ra\rangle|^{n+t+\gamma+1}}\mathrm{d}v(w)\\&\leqslant c_1\|f\|_{p,q,s}^p+\frac{c_3\|f\|_{p,q,s}^p(1-|a|^2)^s(1-r^2)^{q+s+\gamma-p\sigma}}{(1-r^2|a|^2)^{2s-n}(1-r^4|a|^2)^{q+n+\gamma-p\sigma}}\leqslant c_4\|f\|_{p,q,s}^p.\end{aligned}$$

我们知道, 当 $\delta>0$ 时,

$$\sup_{0<x\leqslant 1}x^\delta\log\frac{\mathrm{e}}{x}=\frac{\mathrm{e}^{\delta-1}}{\delta}. \tag{3.21}$$

当 $2s=n$ 时, 由 (3.19)–(3.21) 式, 命题 3.1(8), 文 [3] 中的引理 1.8, 文 [6] 中的引理 6, 引理 2.3 及引理 2.1 可知, 只要 $t>\max\left\{\frac{p\sigma}{p-1}-1, s+q-p\sigma-1, q+n-p\sigma-1, \frac{q+n}{p}-1\right\}$, 可选 $0<\alpha_0<\min\{t+p\sigma-q-n+1, q+n+\gamma-p\sigma, s\}$, 使得

$$\begin{aligned}F(r,a)&\leqslant c\|f\|_{p,q,s}^p+\frac{c(1-|a|^2)^s}{(1-r^2)^{p\sigma-q-\gamma-s}}\\&\quad\times\int_B\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{t+p\sigma}}{|1-\langle rw,ra\rangle|^{n+t+\gamma+1}}\log\frac{\mathrm{e}}{1-|\varphi_{ra}(rw)|^2}\,\mathrm{d}v(w)\\&\leqslant c\|f\|_{p,q,s}^p+\frac{c_1\|f\|_{p,q,s}^p(1-|a|^2)^s}{(1-r^2)^{p\sigma-q-\gamma-s}}\\&\quad\times\int_B\frac{(1-|w|^2)^{t+p\sigma-q-n}}{|1-\langle rw,ra\rangle|^{n+t+\gamma+1}}\log\frac{\mathrm{e}}{1-|\varphi_{ra}(rw)|^2}\,\mathrm{d}v(w)\\&\leqslant c\|f\|_{p,q,s}^p+\frac{c_2\|f\|_{p,q,s}^p(1-|a|^2)^s}{(1-r^2)^{p\sigma-q-\gamma-s}(1-r^2|a|^2)^{\alpha_0}}\int_B\frac{(1-|w|^2)^{t+p\sigma-q-n-\alpha_0}\mathrm{d}v(w)}{|1-\langle rw,ra\rangle|^{n+t+\gamma+1-2\alpha_0}}\\&\leqslant c\|f\|_{p,q,s}^p+\frac{c_3\|f\|_{p,q,s}^p(1-|a|^2)^{s-\alpha_0}(1-r^2)^{q+s+\gamma-p\sigma}}{(1-r^4|a|^2)^{q+n+\gamma-p\sigma-\alpha_0}}\leqslant c_4\|f\|_{p,q,s}^p.\end{aligned}$$

综上所述, 当 $p>1$ 时, 总有 $I_1\leqslant c\|f\|_{p,q,s}$.

(ii) 情形 $0<p\leqslant 1$.

选取 $t=\frac{n+1+t'}{p}-n-1$, 使得 $t'>\max\{q+s-1, q+n-1\}$ 以及 $t-\alpha$ 为正整数.

对 $z\in B$, 取

$$G(w)=\frac{f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+t+\gamma+1}},\quad w\in B.$$

应用文 [3] 中的引理 2.15 到 G, 可得

$$\int_B |G(w)|\mathrm{d}v_t(w) \leqslant c\Big\{\int_B \frac{|f(w)|^p}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t'+p\gamma+1}}\ \mathrm{d}v_{t'}(w)\Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

通过上式, (3.18) 式和 Fubini 定理可得

$$F(r,a) \leqslant c\int_B |f(w)|^p(1-|w|^2)^{t'}\int_{\partial B}\frac{(1-r^2)^{q+p\gamma+s}(1-|a|^2)^s\ \mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}v(w)}{|1-\langle r\xi,w\rangle|^{n+t'+p\gamma+1}|1-\langle r\xi,a\rangle|^{2s}}.$$

注意到, 在 (3.20) 式中取 $\sigma=0$, 再分别用 t' 和 $p\gamma$ 代替 t 和 γ 就得到上述不等式. 余下的证明类似 $p>1$ 时的论证, 同样可得到 $I_1 \leqslant c\|f\|_{p,q,s}$.

其次证明: 当 $I_1<\infty$ 时, $\|f\|_{F(p,q,s)} \leqslant cI_1$.

根据引理 2.3 结合引理 2.4 可得, 当 $t>\frac{q+p\gamma+n}{p}-1$ 时,

$$R^{\alpha,\gamma}f(z)=\int_B \frac{R^{\alpha,\gamma}f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t}}\ \mathrm{d}v_t(w),\quad z\in B.$$

取正整数 N_0, 使得 $t-\gamma=\alpha+N_0>\frac{q+n}{p}-1$, 根据 $R^{\alpha,\gamma}$ 与 $R_{\alpha,\gamma}$ 的互逆性以及引理 2.5 知, 存在关于 z 和 $\overline{w}$ 全纯的多项式 $P(z,w)$, 使得

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_B R^{\alpha,\gamma}f(w)R_{\alpha,\gamma}\Big\{\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t}}\Big\}\ \mathrm{d}v_t(w) \\ &= \int_B R^{\alpha,\gamma}f(w)\frac{P(z,w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t-\gamma}}\ \mathrm{d}v_t(w). \end{aligned}$$

因此, 可以得到

$$|f(z)| \leqslant c\int_B \frac{|R^{\alpha,\gamma}f(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+t-\gamma}}\ \mathrm{d}v_t(w). \tag{3.22}$$

下面利用 (3.22) 式仿照前面的方法.

具体来讲, 当 $p>1$ 时, 取 $0<\sigma<\min\big\{\frac{q+s}{p},\frac{q+n}{p}\big\}$,

$$g(z)=(1-|z|^2)^\gamma|R^{\alpha,\gamma}f(z)|,\quad H(z,w)=\frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+t-\gamma}},\quad h(z)=(1-|z|^2)^{-\sigma},$$

算子选为 $Tg(z)=\int_B H(z,w)g(w)\ \mathrm{d}v_{t-\gamma}(w)$; 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 选取

$$F(w)=\frac{R^{\alpha,\gamma}f(w)}{(1-\langle w,z\rangle)^{n+1+t-\gamma}}.$$

类推可得 $\|f\|_{p,q,s} \leqslant cI_1$. 这样就得到 $\|f\|_{p,q,s} \approx I_1$, 并且控制常数和 f 无关.

至于其他情形, 只需考虑 $M=1$ 和 $N=1$ 即可.

当 $\|f\|_{p,q,s}<\infty$ 时, 只要 $t>\frac{q+n}{p}-1$, 利用

$$|Rf(z)| \leqslant c\int_B \frac{|f(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{t+n+2}}\ \mathrm{d}v_t(w),$$

以及

$$|f(0)|=\Big|\int_B f(w)\ \mathrm{d}v_t(w)\Big| \leqslant c\|f\|_{p,q,s},$$

结合证明 $I_1 \leqslant c\|f\|_{p,q,s}$ 时的处理办法, 可证得 $I_2+|f(0)| \leqslant c\|f\|_{p,q,s}$.

同样, 对任意 $j \in \{1, \cdots, n\}$, 利用

$$\Big|\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}\Big| \leqslant c\int_B \frac{|f(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{t+n+2}}\,\mathrm{d}v_t(w), \quad |f(0)| \leqslant c\|f\|_{p,q,s},$$

结合证明 $I_1 \leqslant c\|f\|_{p,q,s}$ 时的处理办法, 可证得 $I_3 + |f(0)| \leqslant c\|f\|_{p,q,s}$.

当 $I_2 < \infty$ 时, 只要 $t > \frac{q+n}{p}$, 利用

$$Rf(z) = \int_B \frac{Rf(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t}}\,\mathrm{d}v_t(w), \quad f(z)-f(0) = \int_0^1 \frac{Rf(tz)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

可得

$$|f(z)-f(0)| \leqslant c\int_B \frac{|Rf(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{t+n}}\,\mathrm{d}v_t(w).$$

结合证明 $\|f\|_{p,q,s} \leqslant cI_1$ 时的处理办法, 可证得 $\|f\|_{p,q,s} \leqslant c\{I_2 + |f(0)|\}$.

当 $I_3 < \infty$ 时, 只要 $t > \frac{q+n}{p}$, 对任意 $j \in \{1, \cdots, n\}$, 利用

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_j} = \int_B \frac{\partial f(w)}{\partial w_j}\frac{\mathrm{d}v_t(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t}}, \quad f(z)-f(0) = \sum_{j=1}^n z_j\int_0^1 \frac{\partial f(tz)}{\partial z_j}\,\mathrm{d}t$$

得

$$|f(z)-f(0)| \leqslant c\int_B \Big|\frac{\partial f(w)}{\partial w_j}\Big|\frac{\mathrm{d}v_t(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{t+n}}.$$

结合证明 $\|f\|_{p,q,s} \leqslant cI_1$ 时的处理办法, 可证得 $\|f\|_{p,q,s} \leqslant c\{I_3 + |f(0)|\}$.

至于 $M > 1$ 或 $N > 1$ 时, 反复利用上述办法即可.

本定理证完.

参　考　文　献

[1] Rudin W. Function theory in the unit ball of C^n [M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

[2] Li Shenlian, Zhang Xuejun, Xu Si. The Bergman type operators on the $F(p,q,s)$ type spaces in $\mathbf{C^n}$ [J]. *Chin J of Conte Math*, 2017, 38(4):303–316.

[3] Zhu Kehe. Spaces of holomorphic functions in the unit ball [M]. New York: Springer-Verlag, 2005.

[4] Ortega J, Fabrega J. Corona type decomposition in some Besov spaces [J]. *Math Scand*, 1996, 78:93–111.

[5] Zhang Xuejun, Xiao Jianbin, Hu Zhangjian. The multipliers between the mixed norm space in $\mathbf{C^n}$ [J]. *J Math Anal Appl*, 2005, 311:664–674.

[6] Shields A, Williams D. Bounded projections, duality and multipliers in space of analytic functions [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1971, 167:253–268.

[7] Ye Shanli. Weighted composition operators from $F(p,q,s)$ into logarithmic Bloch space [J]. *J Korean Math Soc*, 2008, 45:977–991.

[8] Liang Yuxia, Zhou Zehua, Chen Renyu. Product of extended Cesáro operator and composition operator from the logarithmic Bloch-type space to $F(p,q,s)$ space on the unit ball [J]. *J Comput Anal Appl*, 2013, 15:432–440.

[9] 肖建斌, 张学军, 尚清丽, 郭雨婷. 单位球上 $F(p,q,s)$ 空间的刻画和分解 [J]. 数学学报, 2018, 61(6):1037–1048.

[10] Liang Yuxia. On an integral-type operator from a weighted-type space to $F(p,q,s)$ on the unit ball [J]. *Complex Var Ellip Equ*, 2015, 60:282–291.

[11] Ren Guangbin, Shi Jihuai. Bergman type operator on mixed norm space and applications [J]. *Chin Ann Math Ser B*, 1997, 18(2):265–276.

[12] Liu Yongmin. Boundedness of the Bergman type operators on mixed norm spaces [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2002, 130:2363–2367.

[13] 胡璋剑. 凸域上混合模空间上的 Gleason 问题 [J]. 中国科学: 数学, 2003, 33:436–445.

[14] Ouyang Caiheng, Yang Weisheng, Zhao Ruhan. Characterizations of Bergman spaces and Bloch space in the unit ball of $\mathbf{C^n}$ [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1995, 347:4301–4319.

[15] Wulan Hasi. Compactness of the composition operators from the Bloch space B to Q_k spaces [J]. *Acta Math Sin (English Series)*, 2005, 21(6):1415–1424.

[16] Zhang Xuejun, Li Shenlian, Shang Qingli, et al. An integral estimate and the equivalent norms on $F(p,q,s,k)$ spaces in the unit ball [J]. *Acta Math Sci*, 2018, 38B(6):1861–1880.

Several Equivalent Characterizations of General Hardy Type Spaces on the Unit Ball in $\mathbf{C^n}$

ZHANG Xuejun[1] LV Ruixin[2] TANG Pengcheng[2]

[1]Corresponding author. School of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha 410006, China. E-mail: xuejunttt@263.net

[2]School of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha 410006, China. E-mail: 1019238929@qq.com; 1228928716@qq.com

Abstract Let $p > 0$, $s \geqslant 0$, $q+n \geqslant 0$, $q+s \geqslant 0$. In this paper, the authors discuss several equivalent characterizations of general Hardy type spaces $H^{p,q,s}(B)$ on the unit ball B of $\mathbf{C^n}$. At the same time, the authors also give a spherical integral's bidirectional estimates with two variable points in B for all cases.

Keywords General Hardy type spaces, Integral's bidirectional estimaes, Equivalent characterization, Fractional derivatives, Unit ball

2010 MR Subject Classification 32A37

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 2, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA