数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(2):127–138
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0011

亚纯函数的差分多项式*

张然然[1] 黄志波[2]

提要 假设函数 $f(z)$ 是亚纯函数, $H(z,f)$ 是关于 $f(z)$ 的差分多项式, $s(z)$ 是关于 $f(z)$ 的小函数, 考察了差分多项式 $f(z)^nH(z,f)-s(z)$ 的零点分布问题. 首先得到了差分多项式 $f(z)^nH(z,f)-s(z)$ 的零点计数函数和函数 $f(z)$ 的特征函数以及极点计数函数之间的一些不等式估计, 再根据这些不等式, 建立了 Hayman 关于亚纯函数的一个经典结果的差分模拟.

关键词 差分多项式, 亚纯函数, 值分布
MR (2000) 主题分类 30D35, 39A10
中图法分类 O174.52
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)02-0127-12

1 引 言

本文使用 Nevanlinn 值分布理论的标准记号[1−2], 并用 $\sigma(f)$, $\sigma_2(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的级和超级, 用 $\delta(\infty,f)$ 表示 $f(z)$ 的 Nevanlinna 亏量.

许多学者已经获得亚纯函数微分多项式的值分布方面的许多结果. 特别地, Hayman 证明了下面的定理 A 和 B.

定理 A [3] 如果 $f(z)$ 是超越整函数, $n\geqslant 2$, 那么至多除去 0 外, $f'(z)f(z)^n$ 取任何有穷复数无穷多次.

定理 B [3] 如果 $f(z)$ 是超越亚纯函数, $n\geqslant 3$, 那么至多除去 0 外, $f'(z)f(z)^n$ 取任何有穷复数无穷多次.

随着亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论差分模拟的建立[4−8], 许多学者研究整函数差分多项式的值分布. 定理 C 可以看作定理 A 的差分模拟.

定理 C [9−11] 如果 $f(z)$ 是有穷级超越整函数, c 为一非零复数, 那么对所有的 $n\geqslant 2$, $f(z)^nf(z+c)$ 取任何非零复数无穷多次.

但是, 对于亚纯函数而言, 定理 B 的差分模拟不一定成立. 例如, 取 $f(z)=\tan z$, 则

$$f(z)^3f\Big(z+\frac{\pi}{2}\Big)=-\tan^2 z$$

不能取值 1.

一个自然的问题是: 如果用 $f(z+\eta)$ 代替定理 B 中的 $f'(z)$, 其中 η 为一非零复数, 能得到什么结果? 为此, 李效敏和刘凯等人证明了如下结果.

本文 2018 年 1 月 5 日收到, 2018 年 10 月 7 日收到修改稿.

[1]广东第二师范学院数学系, 广州 510303. E-mail: zhangranran@gdei.edu.cn

[2]通信作者. 华南师范大学数学科学学院, 广州 510631. E-mail: huangzhibo@scnu.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11801093, No. 11871260) 和广东省自然科学基金 (No. 2016A030313745, No. 2018A030313508) 的资助.

定理 D [12] 假设 $f(z)$ 是有穷级超越亚纯函数, η 为一非零复数, $n \geqslant 1$ 是一整数. 如果 $P(z) \not\equiv 0$ 是一多项式, 那么当 $r \notin E$ 且 $r \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}&\overline{N}\Big(r, \frac{1}{f(z)^n f(z+\eta) - P(z)}\Big)\\ &\geqslant nT(r, f(z)) + m(r, f(z)) - 2\overline{N}(r, f(z)) - 2\overline{N}\Big(r, \frac{1}{f(z)}\Big)\\ &\quad - N\Big(r, \frac{1}{f(z)}\Big) + o\Big(\frac{T(r, f(z))}{r^{1-\varepsilon}}\Big) + O(1),\end{aligned}$$

其中 E 是一个具有有穷对数测度的集合.

定理 E [12–13] 假设 $f(z)$ 是有穷级超越亚纯函数, η 为一非零复数, $n \geqslant 6$ 是一整数. 如果 $P(z) \not\equiv 0$ 是一多项式, 那么 $f(z)^n f(z+\eta) - P(z)$ 有无穷多个零点.

关于定理 D 和 E, 我们提出下面 3 个问题.

问题 1 是否可以用关于 $f(z)$ 的一般差分多项式代替 $f(z+\eta)$?

问题 2 定理 E 中条件 “$n \geqslant 6$” 是否可以减弱?

问题 3 运用定理 D, 推不出定理 C, 因此定理 D 不是定理 C 的直接推广. 是否可以将定理 C 直接推广到一般的亚纯函数?

2 主要结论

为了叙述方便, 我们介绍一些记号.

亚纯函数 $f(z)$ 的差分多项式 $H(z, f)$ 定义为

$$H(z, f) = \sum_{\lambda \in J} a_\lambda(z) \prod_{j=1}^{\tau_\lambda} f(z + \delta_{\lambda,j})^{\mu_{\lambda,j}}, \tag{2.1}$$

其中 J 是一指标集, $\delta_{\lambda,j}$ 是复常数, $\mu_{\lambda,j}$ 是非负整数, 系数 $a_\lambda(z)(\not\equiv 0)$ 是关于 $f(z)$ 的小函数.

单项式 $a_\lambda(z) \prod\limits_{j=1}^{\tau_\lambda} f(z+\delta_{\lambda,j})^{\mu_{\lambda,j}}$ 的次数定义为

$$d_\lambda = \sum_{j=1}^{\tau_\lambda} \mu_{\lambda,j}. \tag{2.2}$$

多项式 $H(z, f)$ 的次数定义为

$$d_H = \deg_f H(z, f) = \max_{\lambda \in J} d_\lambda. \tag{2.3}$$

多项式 $H(z, f)$ 中不同的 $\delta_{\lambda,j}$ 表示为 $\delta_1, \cdots, \delta_m$. 令

$$\chi = \begin{cases} 1, \ \text{如果对某个 } s \in \{1, \cdots, m\}, \ \text{有} \delta_s = 0, \\ 0, \ \text{如果对所有 } t = 1, \cdots, m, \ \text{都有} \delta_t \neq 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

针对引言中的 3 个问题, 本文作者利用与文 [12–13] 不同的方法, 得到一系列结论. 定理 2.1 和推论 2.1 解决了问题 1 和 3, 而推论 2.2、定理 2.2 和定理 2.3 及其推论, 部分回答了问题 2.

定理 2.1 假设 $f(z)$ 是超级 $\sigma_2(f)<1$ 的超越亚纯函数, $H(z,f)(\not\equiv 0)$ 是形如 (2.1) 的差分多项式且具有 $m\geqslant 1$ 个不同的 $\delta_{\lambda,j}$, d_H 和 χ 分别如 (2.3) 和 (2.4) 所定义, $n>md_H$ 是正整数. 如果 $s(z)\not\equiv 0$ 是关于 $f(z)$ 的小函数, 那么

$$\begin{aligned}&2\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f(z)^nH(z,f)-s(z)}\Big)\\&\geqslant(n-1)T(r,f(z))-(m-\chi)d_HN(r,f(z))-(2m+1-2\chi)\overline{N}(r,f(z))+S(r,f).\end{aligned}$$

令 $m\geqslant 1$, $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 为正整数, $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 是不同的非零复常数. 记差分单项式

$$F(z,f)=f(z+c_1)^{i_1}f(z+c_2)^{i_2}\cdots f(z+c_m)^{i_m}. \tag{2.5}$$

根据定理 2.1, 有下面的推论.

推论 2.1 假设 $f(z)$ 是超级 $\sigma_2(f)<1$ 的超越亚纯函数, $F(z,f)(\not\equiv 0)$ 是形如 (2.5) 的差分单项式, $\deg_f F(z,f)=d_F$ 和 $n>md_H$ 是正整数. 如果 $s(z)\not\equiv 0$ 是关于 $f(z)$ 的小函数, 那么

$$\begin{aligned}&2\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f(z)^nF(z,f)-s(z)}\Big)\\&\geqslant(n-1)T(r,f(z))-d_FN(r,f(z))-(2m+1)\overline{N}(r,f(z))+S(r,f).\end{aligned}$$

特别地, 如果 $F(z,f)=f(z+\eta)$ $(\eta\in\mathbb{C}/\{0\})$, 那么

$$2\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f(z)^nf(z+\eta)-s(z)}\Big)\geqslant(n-1)T(r,f(z))-N(r,f(z))-3\overline{N}(r,f(z))+S(r,f).$$

定理 2.1 和推论 2.1 将定理 D 推广到了差分多项式, 且是定理 C 的直接推广. 进一步, 运用推论 2.1 可以得到推论 2.2, 这是减弱定理 E 中条件 “$n\geqslant 6$” 的一种形式.

推论 2.2 假设 $f(z)$ 是超级 $\sigma_2(f)<1$ 的超越亚纯函数, $\delta(\infty,f(z))>\frac{1}{2}$, η 是非零复常数, $n\geqslant 3$ 是正整数. 如果 $s(z)\not\equiv 0$ 是关于 $f(z)$ 的小函数, 那么 $f(z)^nf(z+\eta)-s(z)$ 有无穷多个零点.

对于差分单项式 (2.5), 如果其极点、零点满足一些额外条件, 可以得到下面的定理.

定理 2.2 假设 $f(z)$ 是超级 $\sigma_2(f)<1$ 的超越亚纯函数, $F(z,f)$ 是形如 (2.5) 的差分单项式, $\deg_f F(z,f)=d_F$, $n>d_F$ 是正整数. 又假设除去 $f(z)$ 的有穷多个例外的极点和零点外, 其他的极点 z_i 和零点 z_j 都满足 $z_i-z_j\neq c_l$ $(l=1,\cdots,m)$. 如果 $s(z)\not\equiv 0$ 是关于 $f(z)$ 的小函数, 那么

$$2\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f(z)^nF(z,f)-s(z)}\Big)\geqslant(n-1)T(r,f(z))-(2m+1)\overline{N}(r,f(z))+S(r,f).$$

推论 2.3 假设 $f(z)$ 是超级 $\sigma_2(f)<1$ 的超越亚纯函数, η 是非零复数, $n\geqslant 5$ 是正整数. 又假设除去 $f(z)$ 的有穷多个例外的极点和零点外, 其他的极点 z_i 和零点 z_j 都满足 $z_i-z_j\neq c_l$ $(l=1,\cdots,m)$. 如果 $s(z)\not\equiv 0$ 是关于 $f(z)$ 的小函数, 那么 $f(z)^nf(z+\eta)-s(z)$ 有无穷多个零点.

最后, 在 $f(z)$ 具有两个 Borel 例外值的假设下, 给出 $f(z)^nH(z,f)-s(z)$ 的零点估计, 得到下面的定理.

定理 2.3 假设 $f(z)$ 是有穷级超越亚纯函数, $a,b\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 是 $f(z)$ 的两个 Borel 例外值, $H(z,f)(\not\equiv 0)$ 是形如 (2.1) 的差分多项式且具有 $m\geqslant 1$ 个不同的 $\delta_{\lambda,j}$, d_λ 和 d_H 如 (2.2) 和 (2.3) 所定义, n 是正整数, $s(z)\not\equiv 0$ 是关于 $f(z)$ 的小函数, 则有

(i) 如果 $a,b\in\mathbb{C}$, $a^n\sum\limits_{\lambda\in J}a_\lambda(z)a^{d_\lambda}-s(z)\not\equiv 0$, $b^n\sum\limits_{\lambda\in J}a_\lambda(z)b^{d_\lambda}-s(z)\not\equiv 0$ 且 $n>md_H$, 那么

$$N\Big(r,\frac{1}{f(z)^nH(z,f)-s(z)}\Big)\geqslant (n-md_H)T(r,f(z))+S(r,f).$$

(ii) 如果 $a\in\mathbb{C},b=\infty$ 且 $a^n\sum\limits_{\lambda\in J}a_\lambda(z)a^{d_\lambda}-s(z)\not\equiv 0$, 那么

$$N\Big(r,\frac{1}{f(z)^nH(z,f)-s(z)}\Big)\geqslant nT(r,f(z))+S(r,f).$$

由定理 2.3 可知, 如果亚纯函数有两个不同的 Borel 例外值, 那么可以将问题 2 中 “$n\geqslant 6$” 减弱为 “$n\geqslant 2$”, 见如下推论.

推论 2.4 假设 $f(z)$ 是有穷级超越亚纯函数, $a,b\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 是 $f(z)$ 的两个 Borel 例外值, η 是非零复数, $n\geqslant 2$ 是正整数, $s(z)\not\equiv 0$ 是关于 $f(z)$ 的小函数. 如果下面两个条件之一成立:

(i) $a,b\in\mathbb{C}$, $a^{n+1}-s(z)\not\equiv 0$ 且 $b^{n+1}-s(z)\not\equiv 0$;

(ii) $a\in\mathbb{C},b=\infty$ 且 $a^{n+1}-s(z)\not\equiv 0$,

那么 $f(z)^nf(z+\eta)-s(z)$ 有无穷多个零点.

3 定理 2.1 的证明

为了证明定理 2.1, 需要如下的引理.

引理 3.1 [7] 假设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数, $c\in\mathbb{C}$. 如果 $\sigma_2(f)<1$ 且 $\varepsilon>0$, 那么对所有 $r\notin E$, 有

$$m\Big(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\Big)=o\Big(\frac{T(r,f(z))}{r^{1-\sigma_2(f)-\varepsilon}}\Big),$$

其中 E 是一个具有有穷对数测度的集合.

根据文 [7, 引理8.3]、文 [14, 引理1]、文 [15, p.66], 可以推出引理 3.2.

引理 3.2 假设 $f(z)$ 是超级 $\sigma_2(f)<1$ 的非常数亚纯函数, c 是非零复数, 那么

$$T\big(r,f(z+c)\big)=T(r,f(z))+S(r,f),$$
$$N\big(r,f(z+c)\big)=N(r,f(z))+S(r,f),$$
$$\overline{N}\big(r,f(z+c)\big)=\overline{N}(r,f(z))+S(r,f).$$

利用对数导数引理, 并将引理 3.1 运用到文 [8] 的定理 2.3, 可以得到下面的引理.

引理 3.3 假设 $f(z)$ 是微分差分方程

$$U(z,f)P(z,f)=Q(z,f)$$

的超级 $\sigma_2(f)<1$ 的超越亚纯解, 其中 $U(z,f)$ 是关于 $f(z)$ 的差分多项式且其系数为小函数, $P(z,f)$ 和 $Q(z,f)$ 是关于 $f(z)$ 的微分差分多项式且其系数的均值函数为 $S(r,f)$. 又设 $\deg_f U(z,f)=n$, $\deg_f Q(z,f)\leqslant n$ 且 $U(z,f)$ 仅有一个次数最高的项, 那么

$$m\big(r,P(z,f)\big)=S(r,f).$$

利用文 [16, 定理1.1] 或者文 [17, 引理2] 类似的证明方法, 得到下面的定理.

引理 3.4 假设 $f(z)$ 是超级 $\sigma_2(f)<1$ 的超越亚纯函数, $H(z,f)(\not\equiv 0)$ 是形如 (2.1) 的差分多项式且具有 $m\geqslant 1$ 个不同的 $\delta_{\lambda,j}$, $F(z,f)$ 是形如 (2.5) 的差分单项式. 令 $\deg_f H(z,f)=d_H$ 和 $\deg_f F(z,f)=d_F$, 那么

$$T(r,H(z,f))\leqslant md_H T(r,f(z))+S(r,f), \tag{3.1}$$

$$T(r,F(z,f))\leqslant d_F T(r,f(z))+S(r,f). \tag{3.2}$$

根据文 [17, 引理2], 得到下面的定理.

引理 3.5 假设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是亚纯函数, 那么

$$N\Big(r,\sum_{\lambda\in I}f_1^{i_{\lambda,1}}f_2^{i_{\lambda,2}}\cdots f_n^{i_{\lambda,n}}\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sigma N(r,f_i),$$

其中 $I=\{(i_{\lambda,1},i_{\lambda,2},\cdots,i_{\lambda,n})\}$ 是一指标集, $\sigma=\max\limits_{\lambda\in I}\{i_{\lambda,1}+i_{\lambda,2}+\cdots+i_{\lambda,n}\}$.

定理 2.1 的证明 令

$$\psi(z)=f(z)^nH(z,f)-s(z). \tag{3.3}$$

我们断言 $\psi(z)\not\equiv 0$. 否则, 如果 $\psi(z)\equiv 0$, 那么

$$H(z,f)\equiv\frac{s(z)}{f(z)^n}. \tag{3.4}$$

由于 $n>md_H$, 利用 (3.1) 并比较 (3.4) 两边的特征函数, 可以推出矛盾.

微分 (3.3) 两边, 得到

$$\psi'(z)=nf(z)^{n-1}f'(z)H(z,f)+f(z)^nH'(z,f)-s'(z). \tag{3.5}$$

由于 $\psi(z)\not\equiv 0$, 方程 (3.3) 两边同乘以 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$, 有

$$\psi'(z)=\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}f(z)^nH(z,f)-\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}s(z). \tag{3.6}$$

由 (3.5) 和 (3.6) 计算得到

$$f(z)^{n-1}E(z)=s'(z)-\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}s(z), \tag{3.7}$$

其中

$$E(z)=nf'(z)H(z,f)-\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}f(z)H(z,f)+f(z)H'(z,f). \tag{3.8}$$

我们断言 $E(z)\not\equiv 0$. 否则, 根据 (3.7) 和 $s(z)\not\equiv 0$, 有

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}=\frac{s'(z)}{s(z)},$$

从而得到 $\psi(z)=C_1s(z)$, 其中 C_1 是非零常数. 将 $\psi(z)=C_1s(z)$ 代入到 (3.3), 计算得到

$$H(z,f)=\frac{(C_1+1)s(z)}{f(z)^n}. \tag{3.9}$$

类似于 (3.4), 再次由 (3.1) 和 (3.9) 导出矛盾. 因此 $E(z)\not\equiv 0$.

根据 (3.1), 有 $T(r,\psi(z))\leqslant(n+md_H)T(r,f(z))+S(r,f)$. 因此

$$m\Big(r,\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\Big)=S(r,\psi)=S(r,f). \tag{3.10}$$

再由引理 3.3 和 (3.7), 得到

$$m(r,E(z))=S(r,f). \tag{3.11}$$

下面估算 $N(r,E(z))$. 根据 (3.8), 我们注意到 $E(z)$ 的极点来源于 $f(z),H(z,f)$ 和 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 的极点. 记 $E(z)$ 和 $f(z)$ 在 $|z|<r$ 内共同极点的计数函数为 $N(r,|E(z)=f(z)=\infty)$, 重数按在 $E(z)$ 中的重数计算; $E(z)$ 和 $H(z,f)$ 在 $|z|<r$ 内的共同极点同时不是 $f(z)$ 的极点的计数函数为 $N(r,|E(z)=H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)$, 重数按在 $E(z)$ 中的重数计算; $E(z)$ 和 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 在 $|z|<r$ 内的共同极点同时既不是 $f(z)$ 的极点也不是 $H(z,f)$ 的极点的计数函数为 $N(r,|E(z)=\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}=\infty,f(z)\neq\infty,H(z,f)\neq\infty)$, 重数按在 $E(z)$ 中的重数计算. 从而有

$$\begin{aligned}N(r,E(z))=&N(r,|E(z)=f(z)=\infty)\\&+N(r,|E(z)=H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)\\&+N\Big(r,|E(z)=\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}=\infty,f(z)\neq\infty,H(z,f)\neq\infty\Big).\end{aligned} \tag{3.12}$$

设 z_0 是 $E(z)$ 的重数为 k 的极点.

如果 z_0 是 $f(z)$ 的重数为 p 的极点, 那么由 (3.7), $n\geqslant 2$ 和 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 至多有单极点, 我们得到 z_0 必为 $s(z)$ 的重数为 q 的极点, 且 $k+(n-1)p\leqslant q+1$. 由此推出 $k\leqslant q$. 因此

$$N(r,|E(z)=f(z)=\infty)\leqslant N(r,s(z))=S(r,f). \tag{3.13}$$

如果 z_0 不是 $f(z)$ 的极点, 而是 $H(z,f)$ 的重数为 l 的极点, 那么由 (3.8) 和 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 至多有单极点, 我们得到 $k\leqslant l+1$.

再记 $H(z,f)$ 在 $|z|<r$ 内的极点同时不是 $f(z)$ 的极点的计数函数为 $N(r,|H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)$, 重数按在 $H(z,f)$ 中的重数计算; $H(z,f)$ 在 $|z|<r$ 内的极点同时不是 $f(z)$ 的极点的不同极点计数函数为 $\overline{N}(r,|H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)$, 每个极点只计算一次, 那么

$$\begin{aligned}&N(r,|E(z)=H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)\\\leqslant\ &N(r,|H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)+\overline{N}(r,|H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty).\end{aligned} \tag{3.14}$$

我们将证明

$$N(r,|H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)\leqslant(m-\chi)d_HN(r,f(z))+S(r,f). \tag{3.15}$$

将 $H(z,f)$ 中不同的 $\delta_{\lambda,j}$ 记为 $\delta_1,\cdots,\delta_m$. 如果对所有 $t=1,\cdots,m$, 都有 $\delta_t\neq 0$, 那么 $H(z,f)$ 不包含 $f(z)$, 且由 (2.4) 知 $\chi=0$. 又由于 $H(z,f)$ 的次数为 d_H, 且其系数是关于 $f(z)$ 的小函数, 根据引理 3.5 可以推出

$$N(r,|H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)=N(r,H(z,f))\leqslant\sum_{j=1}^{m}d_HN(r,f(z+\delta_j))+S(r,f).$$

再由引理 3.2 和 $\chi=0$, 有

$$N(r,|H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)\leqslant(m-\chi)d_HN(r,f(z))+S(r,f).$$

如果对某个 $s\in\{1,\cdots,m\}$, 有 $\delta_s=0$, 那么 $f(z+\delta_s)=f(z)$ 且由 (2.4) 知 $\chi=1$. 又由于 $H(z,f)$ 的次数为 d_H, 且其系数是关于 $f(z)$ 的小函数, 根据引理 3.5 可以推出

$$N(r,|H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)$$

$$\begin{aligned}&\leqslant d_H N(r,f(z+\delta_1))+\cdots+d_H N(r,f(z+\delta_{s-1}))+d_H N(r,f(z+\delta_{s+1}))\\&\quad+\cdots+d_H N(r,f(z+\delta_m))+S(r,f)\\&=\sum_{j=1}^{m} d_H N(r,f(z+\delta_j))-d_H N(r,f(z+\delta_s))+S(r,f).\end{aligned}$$

再由引理 3.2, $\chi=1$ 和 $f(z+\delta_s)=f(z)$, 有

$$N(r,|H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)\leqslant(m-\chi)d_H N(r,f(z))+S(r,f).$$

因此, (3.15) 成立. 类似地, 可以证明

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,|H(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)&\leqslant\sum_{j=1}^{m}\overline{N}\big(r,f(z+\delta_j)\big)-\chi\overline{N}(r,f(z))+S(r,f)\\&=(m-\chi)\overline{N}(r,f(z))+S(r,f).\end{aligned}\tag{3.16}$$

如果 z_0 既不是 $f(z)$ 的极点, 又不是 $H(z,f)$ 的极点, 那么 z_0 必为 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 的极点. 由于 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 至多只有单极点, 从 (3.8) 推出 $k=1$. 又 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 的极点来源于 $\psi(z)$ 的极点和 $\psi(z)$ 的零点. 如果 z_0 是 $\psi(z)$ 的极点, 那么由 (3.3) 知, z_0 必为 $s(z)$ 的极点. 因此,

$$\begin{aligned}&N\Big(r,|E(z)=\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}=\infty,f(z)\neq\infty,H(z,f)\neq\infty\Big)\\&\leqslant\overline{N}(r,s(z))+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)\\&=\overline{N}\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)+S(r,f).\end{aligned}\tag{3.17}$$

从而, 由 (3.11)−(3.17) 推出

$$T(r,E(z))\leqslant(m-\chi)d_H N(r,f(z))+(m-\chi)\overline{N}(r,f(z))+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)+S(r,f).\tag{3.18}$$

由 (3.7) 和 (3.10) 得到

$$\begin{aligned}(n-1)T(r,f(z))&\leqslant T(r,E(z))+T\Big(r,\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\Big)+S(r,f)\\&=T(r,E(z))+N\Big(r,\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\Big)+S(r,f)\\&=T(r,E(z))+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)+\overline{N}(r,\psi(z))+S(r,f).\end{aligned}\tag{3.19}$$

由于 $H(z,f)$ 有 m 个不同的 $\delta_{\lambda,j}$, χ 如 (2.4) 所定义, 我们从 (3.3) 和引理 3.2 推出

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,\psi(z))&\leqslant\overline{N}(r,f(z))+\overline{N}(r,H(z,f))-\chi\overline{N}(r,f(z))+S(r,f)\\&\leqslant(1+m-\chi)\overline{N}(r,f(z))+S(r,f).\end{aligned}\tag{3.20}$$

从而由 (3.18)−(3.20) 推导出

$$\begin{aligned}&2\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f(z)^nH(z,f)-s(z)}\Big)\\&=2\overline{N}\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)\\&\geqslant(n-1)T(r,f(z))-(m-\chi)d_H N(r,f(z))-(2m+1-2\chi)\overline{N}(r,f(z))+S(r,f).\end{aligned}$$

定理 2.1 证毕.

4 定理 2.2 的证明

令

$$\psi(z)=f(z)^nF(z,f)-s(z).$$

由于 $n>d_F$, 我们由 (3.2) 推出 $\psi(z)\not\equiv 0$. 又由于 $F(z,f)$ 是 $H(z,f)$ 的特殊形式, 故 (3.5)–(3.12) 仍然成立, 其中 $H(z,f)$ 由 $F(z,f)$ 来代替. 下面针对 (3.12) 的各项进行讨论.

设 z_0 是 $E(z)$ 的重数为 k 的极点.

如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点, 类似于 (3.13), 有

$$N(r,|E(z)=f(z)=\infty)\leqslant N(r,s(z))=S(r,f). \tag{4.1}$$

如果 z_0 不是 $f(z)$ 的极点, 但 z_0 是 $F(z,f)$ 的极点, 那么对某个 $t\in\{1,\cdots,m\}$, z_0 必为 $f(z+c_t)$ 的极点, 从而 z_0+c_t 是 $f(z)$ 的极点. 由于除去 $f(z)$ 的有穷多个例外的极点和零点外, 其他的极点 z_i 和零点 z_j 都满足 $z_i-z_j\neq c_l$ $(l=1,\cdots,m)$, 假设 z_0 不是 $f(z)$ 的零点. 因此, 估计 $N(r,|E(z)=F(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)$ 时, 可能有误差项 $O(\log r)$. 又因为 $f(z_0)\neq 0,\infty$, 所以 z_0 是 $f(z)^{n-1}E(z)$ 的重数为 k 的极点. 根据 (3.7), z_0 是 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 的单极点且 $k=1$, 或者 z_0 是 $s(z)$ 的重数为 q 的极点且 $k\leqslant q+1$. 因而

$$N(r,|E(z)=F(z,f)=\infty,f(z)\neq\infty)\leqslant\overline{N}(r,F(z,f))+N(r,s(z))+\overline{N}(r,s(z))+O(\log r).$$

由引理 3.2 知,

$$\overline{N}(r,F(z,f))\leqslant\sum_{j=1}^{m}\overline{N}(r,f(z+c_j))=m\overline{N}(r,f(z))+S(r,f). \tag{4.2}$$

如果 z_0 不是 $f(z)$ 的极点, 也不是 $F(z,f)$ 的极点, 那么 z_0 必为 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 的极点. 由 (3.17) 类似的推导可知,

$$N\Big(r,|E(z)=\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}=\infty,f(z)\neq\infty,F(z,f)\neq\infty\Big)\leqslant\overline{N}\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)+S(r,f). \tag{4.3}$$

结合 (3.11), (3.12) 和 (4.1)–(4.3), 有

$$T(r,E(z))\leqslant m\overline{N}(r,f(z))+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)+S(r,f). \tag{4.4}$$

再由 (3.7) 和 (3.10), 有

$$(n-1)T(r,f(z))\leqslant T(r,E(z))+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)+\overline{N}(r,\psi(z))+S(r,f). \tag{4.5}$$

因为 $F(z,f)=f(z+c_1)^{i_1}\cdots f(z+c_m)^{i_m}$, $\psi(z)=f(z)^nF(z,f)-s(z)$ 且 $c_1,\cdots,c_m$ 为不同的非零复常数, 所以由引理 3.2 知,

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,\psi(z))&\leqslant\overline{N}(r,f(z))+\overline{N}(r,F(z,f))+S(r,f)\\&\leqslant(1+m)\overline{N}(r,f(z))+S(r,f).\end{aligned} \tag{4.6}$$

于是, 由 (4.4)–(4.6) 可以推出

$$2\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f(z)^nF(z,f)-s(z)}\Big)$$

$$=2\overline{N}\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)\geqslant(n-1)T(r,f(z))-(2m+1)\overline{N}(r,f(z))+S(r,f).$$

定理 2.2 证毕.

5 定理 2.3 的证明

为证明定理 2.3, 需要引理 5.1.

引理 5.1 [18] 假设 h 为非常数亚纯函数, 满足

$$\overline{N}(r,h)+\overline{N}(r,1/h)=S(r,h).$$

又设 $f=a_0h^p+a_1h^{p-1}+\cdots+a_p$ 和 $g=b_0h^q+b_1h^{q-1}+\cdots+b_q$, 其中系数 $a_0,a_1,\cdots,a_p,b_0,b_1,\cdots,b_q$ 是关于 h 的小函数且 $a_0b_0a_p\not\equiv 0$. 如果 $q\leqslant p$, 那么 $m(r,g/f)=S(r,h)$.

定理 2.3 的证明 令

$$\psi(z)=f(z)^nH(z,f)-s(z).\tag{5.1}$$

首先假设定理 2.3 的条件 (i) 成立, 则设

$$g(z)=\frac{f(z)-a}{f(z)-b},$$

那么 $0,\infty$ 是 $g(z)$ 的 Borel 例外值. 根据 Hadamard 分解定理, 存在亚纯函数 $w(z)$ 满足 $\sigma(w(z))<\sigma(g(z))$, 多项式 $h(z)$, 满足 $\sigma(g(z))=\deg h(z)\geqslant 1$, 使得

$$g(z)=w(z)\mathrm{e}^{h(z)}.$$

于是

$$f(z)=\frac{bw(z)\mathrm{e}^{h(z)}-a}{w(z)\mathrm{e}^{h(z)}-1},\quad f(z)^n=\frac{b^nw(z)^n\mathrm{e}^{nh(z)}+\cdots+(-a)^n}{w(z)^n\mathrm{e}^{nh(z)}+\cdots+(-1)^n}.\tag{5.2}$$

记

$$W_\lambda(z)=w(z+\delta_{\lambda,1})^{\mu_{\lambda,1}}\cdots w(z+\delta_{\lambda,\tau_\lambda})^{\mu_{\lambda,\tau_\lambda}},$$

并将 (5.2) 代入 $H(z,f)$, 有

$$\begin{aligned}H(z,f)&=\sum_{\lambda\in J}a_\lambda(z)\prod_{j=1}^{\tau_\lambda}\frac{b^{\mu_{\lambda,j}}w(z+\delta_{\lambda,j})^{\mu_{\lambda,j}}\mathrm{e}^{\mu_{\lambda,j}h(z+\delta_{\lambda,j})}+\cdots+(-a)^{\mu_{\lambda,j}}}{w(z+\delta_{\lambda,j})^{\mu_{\lambda,j}}\mathrm{e}^{\mu_{\lambda,j}h(z+\delta_{\lambda,j})}+\cdots+(-1)^{\mu_{\lambda,j}}}\\&=\sum_{\lambda\in J}a_\lambda(z)\frac{b^{\mu_{\lambda,1}+\cdots+\mu_{\lambda,\tau_\lambda}}W_\lambda(z)\mathrm{e}^{\mu_{\lambda,1}h(z+\delta_{\lambda,1})+\cdots+\mu_{\lambda,\tau_\lambda}h(z+\delta_{\lambda,\tau_\lambda})}+\cdots+(-a)^{\mu_{\lambda,1}+\cdots+\mu_{\lambda,\tau_\lambda}}}{W_\lambda(z)\mathrm{e}^{\mu_{\lambda,1}h(z+\delta_{\lambda,1})+\cdots+\mu_{\lambda,\tau_\lambda}h(z+\delta_{\lambda,\tau_\lambda})}+\cdots+(-1)^{\mu_{\lambda,1}+\cdots+\mu_{\lambda,\tau_\lambda}}}.\end{aligned}$$

令

$$s_\lambda(z)=W_\lambda(z)\mathrm{e}^{\mu_{\lambda,1}(h(z+\delta_{\lambda,1})-h(z))}\cdots\mathrm{e}^{\mu_{\lambda,\tau_\lambda}(h(z+\delta_{\lambda,\tau_\lambda})-h(z))},$$

则有

$$\begin{aligned}H(z,f)&=\sum_{\lambda\in J}a_\lambda(z)\frac{b^{d_\lambda}s_\lambda(z)\mathrm{e}^{d_\lambda h(z)}+\cdots+(-a)^{d_\lambda}}{s_\lambda(z)\mathrm{e}^{d_\lambda h(z)}+\cdots+(-1)^{d_\lambda}}\\&=\frac{\Big(\sum\limits_{\lambda\in J}a_\lambda(z)b^{d_\lambda}\Big)\prod\limits_{\lambda\in J}s_\lambda(z)\mathrm{e}^{\sum\limits_{\lambda\in J}d_\lambda h(z)}+\cdots+\Big(\sum\limits_{\lambda\in J}a_\lambda(z)a^{d_\lambda}\Big)(-1)^{\sum\limits_{\lambda\in J}d_\lambda}}{\prod\limits_{\lambda\in J}s_\lambda(z)\mathrm{e}^{\sum\limits_{\lambda\in J}d_\lambda h(z)}+\cdots+(-1)^{\sum\limits_{\lambda\in J}d_\lambda}}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

记 $S(z)=\prod\limits_{\lambda\in J}s_\lambda(z)$ 和 $D=\sum\limits_{\lambda\in J}d_\lambda$, 则由 (5.1)–(5.3) 推出

$$\begin{aligned}&\psi(z)\\=&\frac{b^nw(z)^n\Big(\sum\limits_{\lambda\in J}a_\lambda(z)b^{d_\lambda}\Big)S(z)\mathrm{e}^{(n+D)h(z)}+\cdots+\Big(\sum\limits_{\lambda\in J}a_\lambda(z)a^{d_\lambda}\Big)(-a)^n(-1)^D}{w(z)^nS(z)\mathrm{e}^{(n+D)h(z)}+\cdots+(-1)^{n+D}}-s(z)\\=&\frac{\Big(b^n\sum\limits_{\lambda\in J}a_\lambda(z)b^{d_\lambda}-s(z)\Big)w(z)^nS(z)\mathrm{e}^{(n+D)h(z)}+\cdots+(-1)^{n+D}\Big(a^n\sum\limits_{\lambda\in J}a_\lambda(z)a^{d_\lambda}-s(z)\Big)}{w(z)^nS(z)\mathrm{e}^{(n+D)h(z)}+\cdots+(-1)^{n+D}}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

(5.4) 中 $\psi(z)$ 是关于 $\mathrm{e}^{h(z)}$ 的有理函数, 且其系数为 $\mathrm{e}^{h(z)}$ 的小函数. 又 $a^n\sum\limits_{\lambda\in J}a_\lambda(z)a^{d_\lambda}-s(z)\not\equiv 0$ 且 $b^n\sum\limits_{\lambda\in J}a_\lambda(z)b^{d_\lambda}-s(z)\not\equiv 0$, 由引理 5.1 知

$$m\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)=S(r,\mathrm{e}^{h(z)})=S(r,f).$$

此外, 由 (5.1) 和引理 3.4 知,

$$nT(r,f(z))=T\Big(r,\frac{\psi(z)+s(z)}{H(z,f)}\Big)\leqslant T(r,\psi(z))+md_HT(r,f(z))+S(r,f).$$

因而有

$$N\Big(r,\frac{1}{f(z)^nH(z,f)-s(z)}\Big)=N\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)\geqslant(n-md_H)T(r,f(z))+S(r,f).$$

其次, 假设定理 2.3 的条件 (ii) 成立, 则存在亚纯函数 $w(z)$, 满足 $\sigma(w(z))<\sigma(f(z))$, 多项式 $h(z)$ 满足 $\sigma(f(z))=\deg h(z)\geqslant 1$, 使得

$$f(z)=w(z)\mathrm{e}^{h(z)}+a.\tag{5.5}$$

将 (5.5) 代入 $f(z)^n$, 有

$$f(z)^n=w(z)^n\mathrm{e}^{nh(z)}+\cdots+a^n.\tag{5.6}$$

采用前面的记号 $W_\lambda(z)$ 和 $s_\lambda(z)$, 并将 (5.5) 代入 $H(z,f)$, 有

$$\begin{aligned}H(z,f)&=\sum_{\lambda\in J}a_\lambda(z)\prod_{j=1}^{\tau_\lambda}(w(z+\delta_{\lambda,j})^{\mu_{\lambda,j}}\mathrm{e}^{\mu_{\lambda,j}h(z+\delta_{\lambda,j})}+\cdots+a^{\mu_{\lambda,j}})\\&=\sum_{\lambda\in J}a_\lambda(z)(W_\lambda(z)\mathrm{e}^{\mu_{\lambda,1}h(z+\delta_{\lambda,1})+\cdots+\mu_{\lambda,\tau_\lambda}h(z+\delta_{\lambda,\tau_\lambda})}+\cdots+a^{\mu_{\lambda,1}+\cdots+\mu_{\lambda,\tau_\lambda}})\\&=\sum_{\lambda\in J}a_\lambda(z)(s_\lambda(z)\mathrm{e}^{d_\lambda h(z)}+\cdots+a^{d_\lambda}).\end{aligned}$$

由于 $H(z,f)\not\equiv 0$ 且 $d_H=\max\limits_{\lambda\in J}d_\lambda$, 则

$$H(z,f)=\sum_{\lambda\in J}a_\lambda(z)a^{d_\lambda}\not\equiv 0,\tag{5.7}$$

或者

$$H(z,f)=l_q(z)\mathrm{e}^{qh(z)}+\cdots+l_1(z)\mathrm{e}^{h(z)}+\sum_{\lambda\in J}a_\lambda(z)a^{d_\lambda},\quad 1\leqslant q\leqslant d_H,\tag{5.8}$$

其中 $l_j(z)(j=1,\cdots,q)$ 是 $\mathrm{e}^{h(z)}$ 的小函数且 $l_q(z)\not\equiv 0$.

如果 (5.7) 成立, 那么由 (5.1), (5.6) 和引理 5.1, 有

$$N\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)=nT(r,f(z))+S(r,f).$$

如果 (5.8) 成立, 那么由 (5.1), (5.6) 和引理 5.1, 有

$$N\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)=(n+q)T(r,f(z))+S(r,f),\quad 1\leqslant q\leqslant d_H.$$

故有

$$N\Big(r,\frac{1}{f(z)^nH(z,f)-s(z)}\Big)=N\Big(r,\frac{1}{\psi(z)}\Big)\geqslant nT(r,f(z))+S(r,f).$$

定理 2.3 证毕.

致谢 衷心感谢审稿专家对本文提出的修改建议.

参　考　文　献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: W de Gruyter, 1993.

[3] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives [J]. *Ann of Math*, 1959, 70(2):9–42.

[4] Chiang Y M, Feng S J. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane [J]. *Ramanujan J*, 2008, 16(1):105–129.

[5] Halburd R G, Korhonen R J. Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, 314(2):477–487.

[6] Halburd R G, Korhonen R J. Nevanlinna theory for the difference operator [J]. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2006, 31(2):463–478.

[7] Halburd R G, Korhonen R J, Tohge K. Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2014, 366(8):4267–4298.

[8] Laine I, Yang C C. Clunie theorems for difference and q-difference polynomials [J]. *J Lond Math Soc*, 2007, 76(3):556–566.

[9] Laine I, Yang C C. Value distribution of difference polynomials [J]. *Proc Japan Acad*, 2007, 83(8):148–151.

[10] Liu K, Yang L Z. Value distribution of the difference operator [J]. *Arch Math*, 2009, 92(3): 270–278.

[11] Zheng X M, Chen Z X. On the value distribution of some difference polynomials [J]. *J Math Anal Appl*, 2013, 397(2):814–821.

[12] Li X M, Yi H X, Li W L. Value distribution of certain difference polynomials of meromorphic functions [J]. *Rocky Mountain J Math*, 2014, 44(2):599–632.

[13] Liu K, Liu X L, Cao T B. Value distributions and uniqueness of difference polynomials [J]. *Adv Difference Equ*, 2011, Article ID 234215, 12 pages.

[14] Ablowitz M J, Halburd R G, Herbst B. On the extension of the Painlevé property to difference equations [J]. *Nonlinearity*, 2000, 13(3):889–905.

[15] Gol'dberg A A, Ostrovskii I V. Distribution of values of meromorphic functions [M]. Moscow: Nauka, 1970.

[16] 张然然, 陈宗煊. 亚纯函数养分多项式的值分布 [J]. 中国科学: 数学, 2012, 42(11):1115–1130.

[17] Zheng X M, Chen Z X. Some properties of meromorphic solutions of q-difference equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2010, 361(2):472–480.

[18] Li P, Wang W J. Entire functions that share a small function with its derivative [J]. *J Math Anal Appl*, 2007, 328(1):743–751.

On Certain Type of Difference Polynomials of Meromorphic Functions

ZHANG Ranran[1] HUANG Zhibo[2]

[1]Department of Mathematics, Guangdong University of Education, Guangzhou 510303, China. E-mail: zhangranran@gdei.edu.cn

[2]Corresponding author. School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, China. E-mail: huangzhibo@scnu.edu.cn

Abstract In this paper, the authors investigate zeros of difference polynomials of the form $f(z)^n H(z,f) - s(z)$, where $f(z)$ is a meromorphic function, $H(z,f)$ is a difference polynomial of $f(z)$ and $s(z)$ is a small function. The authors first obtain some inequalities for the relationship of the zero counting function of $f(z)^n H(z,f) - s(z)$ and the characteristic function and pole counting function of $f(z)$. Based on the above inequalities, the authors then establish some difference analogues of a classical result of Hayman for meromorphic functions.

Keywords Difference polynomial, Meromorphic function, Value distribution

2000 MR Subject Classification 30D35, 39A10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 2, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA