数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(2):157–164
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0013

有关 Clifford 矩阵群的几个离散性判别准则*

戴滨林[1]

提要 研究了 Clifford 矩阵变换群的离散性质, 给出了几个判别离散群的不等式和定理.

关键词 非初等群, 离散群, Clifford 矩阵群, 条件 A
MR (2000) 主题分类 30F40, 20H10, 30C62
中图法分类 O174.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)02-0157-08

1 引言和主要结论

文中采用的一些基本概念和术语与文 [1–4] 相同, 例如: Möbius 群 $M(\overline{R}^n)$, $SL(2,\mathbf{C})$, Clifford 矩阵群 $SL(2,\Gamma_n)$, 等距群 $\mathrm{Isom}(H^{n+1})$, 离散群, 条件 A, 等等.

由 Poincaré扩张[1]我们知道, $M(\overline{R}^n)$ 中元 g 可以看成 $n+1$ 维双曲空间 H^{n+1} 中的等距元, 因此, $M(\overline{R}^n)$ 是等距群 $\mathrm{Isom}(H^{n+1})$ 的子群. 我们对 $M(\overline{R}^n)$ 中元采用如下分类[4−5].

定义 1.1 [4−5] 设 $g\in M(\overline{R}^n)$, $g\neq I$, 那么
(i) 如果 g 在 $\partial H^{n+1}=\overline{R}^n$ 中有唯一一个不动点, 则 g 称为抛物元;
(ii) 如果 g 在 $\partial H^{n+1}=\overline{R}^n$ 中有且仅有两个不动点, 则 g 称为斜驶元;
(iii) 如果 g 在 H^{n+1} 中有不动点, 则 g 称为椭圆元.

下面是极限集的定义[1,4].

定义 1.2 [1,4] 设 G 是 $M(\overline{R}^n)$ 的子群, 点 $x\in\partial H^{n+1}$, 如果存在点 $p\in H^{n+1}$ 和 G 中不同元素组成的序列 $\{g_j\}$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} g_j(p)\to x$, 那么点 $x\in\partial H^{n+1}$ 称为极限点. 所有极限点的集合称为极限集, 用 $L(G)$ 表示. 显然 $L(G)$ 是 ∂H^{n+1} 中闭集且在 G 变换下保持不变, $L(G)$ 与点 $p\in H^{n+1}$ 的选取无关.

Beardon[1]和方爱农[2]给出了如下初等群的定义.

定义 1.3 [1−2] 设 G 是 $M(\overline{R}^n)$ 的子群, 如果 G 在 $\overline{H}^{n+1}$ 中有有限轨道, 那么, G 称为初等群. 否则, G 为非初等群.

本文将研究 Möbius 群 $M(\overline{R}^n)$ 的离散性质, 给出几个离散判别准则. 我们知道, Möbius 群的离散性问题是一个极其重要的基本问题, 一直被许多数学工作者研究[2−3,5−18]. 在 1976 年, Jørgensen[6] 对于平面 Möbius 群得到了如下著名的离散判别准则和不等式.

定理 A [6] (i) 设 G 是 $SL(2,\mathbf{C})$ 的非初等子群, 那么, G 是离散群的充要条件是 G 的任意两个元生成的子群是离散的.

本文 2017 年 4 月 17 日收到, 2017 年 12 月 10 日收到修改稿.
[1]上海财经大学数学学院, 上海 200433. E-mail: bldai@mail.shufe.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11771266).

(ii) 设 $f,g\in SL(2,\mathbf{C})$ 生成一个离散非初等群, 那么

$$|\mathrm{tr}^2(f)-4|+|\mathrm{tr}[f,g]-2|\geqslant 1.$$

定理 A 中 $[f,g]$ 表示 $fgf^{-1}g^{-1}$. 文 [7, 19–21] 研究了形如 $fgfg^{-1}$ 的离散群不等式, 在一定条件下得到下面的定理.

定理 B [7,19−20] 设 $f,g\in SL(2,\mathbf{C})$ 生成一个离散非初等群, 那么
(i) $|\mathrm{tr}^2(f)-4|+|\mathrm{tr}(fgfg^{-1})-2|\geqslant 1$;
(ii) $|\mathrm{tr}^2(f)-2|+|\mathrm{tr}(fgfg^{-1})-1|\geqslant 1$.

文 [22] 进一步得到如下条件更弱的离散群判别方法.

定理 C [22] 设 G 是 $SL(2,\mathbf{C})$ 的非初等子群, $f\in G$ 是一个固定元素, 那么 G 是离散群的充要条件是对任意 $g\in G$, 二元生成的子群 $\langle f,gfg^{-1}\rangle$ 是离散的.

对于高维 Möbius 群, Abikoff 和 Hass[8]举例说明了定理 A 是不成立的; 在 1989 年和 1993 年, Martin[9−10]引入一致有界挠的条件并且对高维 Möbius 群和更一般的负曲率等距群在一致有界挠的条件下建立了定理 A. 在 2000 年, 方爱农和乃兵[2−3]引入了比一致有界挠的条件更弱的条件 A, 并且对高维 Möbius 群在条件 A 下建立了定理 A.

定理 D [2−3] 设 G 是 $SL(2,\Gamma_n)$ 的非初等子群, G 满足条件 A, 那么 G 是离散群的充分必要条件是对任意 $f,g\in G$, 二元生成的子群 $\langle f,g\rangle$ 是离散的.

这里条件 A 的定义如下.

条件 A [2] 设 G 是 $\mathrm{Isom}(H^{n+1})$ 的子集, 我们称 G 满足条件 A, 如果不存在互不相同的有限阶序列 $\{g_j\}$, 使得在 ∂H^{n+1} 内 $\mathrm{Card}(\mathrm{fix}(g_j))\geqslant 3$ 并且 $g_j\to I$, 其中 $g_j\in G$.

本文研究高维 Möbius 群的离散判别方法, 推广和改进了上述定理, 得到下面的定理.

定理 1.1 设 G 是 $SL(2,\Gamma_n)$ 的非初等子群, G 满足条件 A, 那么, G 是离散群的充要条件是对任意 $f,g\in G$, 群 $\langle f,gfg^{-1}\rangle$ 是离散的.

本文还进一步得到下面的定理.

定理 1.2 设 G 是 $SL(2,\Gamma_n)$ 的非初等子群, 固定取斜驶元 $f\in SL(2,\Gamma_n)$, 如果 G 满足条件 A, 且对任意 $g\in G$, 群 $\langle f,g\rangle$ 是离散的, 那么, G 是离散的.

定理 1.3 设 G 是 $SL(2,\Gamma_n)$ 的非初等子群, 固定取抛物元 $f\in SL(2,\Gamma_n)$, 如果 G 满足条件 A, 且对任意 $g\in G$, 群 $\langle f,g\rangle$ 是离散的, 那么, G 是离散的.

本文的另一个目的是应用高维 Möbius 群 $M(\overline{R}^n)$ 的 Clifford 代数表示, 研究高维离散群不等式, 将定理 B(ii) 推广到 Clifford 矩阵群 $SL(2,\Gamma_n)$, 得到下面的定理.

定理 1.4 设 $f,g\in SL(2,\Gamma_n)$, 群 $\langle f,g\rangle$ 是离散的, 如果 f 是严格抛物元, f 共轭于 $\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}$, 其中 $t\in\mathbf{R^n}\setminus\{0\}$, 那么

$$|\mathrm{tr}^2(f)-2|+|\mathrm{tr}(fgfg^{-1})-1|\geqslant 1.$$

定理 1.5 设 $f,g\in SL(2,\Gamma_n)$, 群 $\langle f,g\rangle$ 是离散的, 如果 f 是双曲元, f 共轭于

$\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$, 其中 $\gamma \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1, 0\}$, 那么

$$|\mathrm{tr}^2(f) - 2| + |\mathrm{tr}(fgfg^{-1}) - 1| \geqslant 1.$$

定理 1.6 设 $f, g \in SL(2, \Gamma_n)$, 群 $\langle f, g \rangle$ 是离散非初等群, 如果 f 是椭圆元, f 共轭于 $f_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$, 其中 $|\lambda| = 1, \lambda \neq \pm 1$, $\lambda \in \zeta_n$, ζ_n 是中心, 存在 $h \in SL(2, \Gamma_n)$, 使得 $f = hf_0h^{-1}$, 记 $g_0 = h^{-1}gh = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g_{n+1} = f_0 g_n f_0^{-1} g_n^{-1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}$, 其中 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, $z_n = 1 + a_n d_n^* (\lambda - \lambda')^2 \neq 0$, 那么

(i) 当 $n \neq 4l$(l 为正整数) 时, 有 $|\mathrm{tr}^2(f) - 2| + |\mathrm{tr}(fgfg^{-1}) - 1| \geqslant 1$;

(ii) 当 $n = 4l$(l 为正整数) 时, 如果 $\lambda \in R, bc^* \in R$, 我们有 $|\mathrm{tr}^2(f) - 2| + |\mathrm{tr}(fgfg^{-1}) - 1| \geqslant 1$.

定理 1.7 设 $f, g \in SL(2, \Gamma_n)$, 群 $\langle f, g \rangle$ 是离散非初等群, 如果 f 是斜驶元, f 共轭于 $f_0 = \begin{pmatrix} \gamma\lambda & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}\lambda' \end{pmatrix}$, 其中 $\gamma \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1, 0\}$, $|\lambda| = 1, \lambda \neq \pm 1$, $\lambda \in \zeta_n$, ζ_n 是中心, 存在 $h \in SL(2, \Gamma_n)$, 使得 $f = hf_0h^{-1}$, 记

$$g_0 = h^{-1}gh = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad g_{n+1} = f_0 g_n f_0^{-1} g_n^{-1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix},$$

其中 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, $z_n = 1 + a_n d_n^* (\gamma\lambda - \gamma^{-1}\lambda')^2 \neq 0$, 那么

(i) 当 $n \neq 4l$(l 为正整数) 时, 有 $|\mathrm{tr}^2(f) - 2| + |\mathrm{tr}(fgfg^{-1}) - 1| \geqslant 1$;

(ii) 当 $n = 4l$(l 为正整数) 时, 如果 $\lambda \in R, bc^* \in R$, 有 $|\mathrm{tr}^2(f) - 2| + |\mathrm{tr}(fgfg^{-1}) - 1| \geqslant 1$.

2 主要结论的证明

首先给出几个重要引理.

引理 2.1 [2, 引理A.1] 如果 G 是 $M(\overline{R}^n)$ 中非初等群, 那么, G 含有无穷多个两两没有公共不动点的斜驶元.

引理 2.2 [11, 定理5.7, 定理5.10, 定理5.11] 设 G 是 $M(\overline{R}^n)$ 中离散初等群, 那么, G 可以分为下面 3 种类型:

(i) $L(G) = \emptyset$ 当且仅当 G 为有限纯椭圆群;

(ii) $L(G) = \{x_0\}$ 当且仅当 G 为一个由椭圆元和抛物元组成的无限群, 且 $\{x_0\}$ 为 G 的不动点;

(iii) $L(G) = \{x_0, y_0\}$ 当且仅当 G 为一个由斜驶元和椭圆元组成的无限群, 其中斜驶元的不动点是 x_0 和 y_0, 椭圆元保持集合 $\{x_0, y_0\}$ 点集不变.

引理 2.3 [2, 引理2.4] 如果 $f, g \in SL(2, \Gamma_n)$ 生成一个离散非初等群, 那么

$$\max\{d(g^{-i}fg^{i}, I) : i = 0, 1, \cdots, n\} \geqslant \frac{2-\sqrt{3}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$
$$\max\{d(f, I), d(fg^{i}f^{-1}g^{-i}, I) : i = 0, 1, \cdots, n\} \geqslant \frac{2-\sqrt{3}}{2^{\frac{n-1}{2}}}.$$

引理 2.4 [11, 定理5.18] 设 G 是 $M(\overline{R}^n)$ 中离散群, 则 G 中任意一个椭圆元都是有限阶的.

引理 2.5 [11, 定理6.1, 定理6.2] 设 G 是 $M(\overline{R}^n)$ 中离散群, $g \in G$.

(i) g 是斜驶等距, 且以 x_0 和 y_0 分别为其吸收型不动点和排斥型不动点, 那么存在一子序列 $\{m_j\}$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} g^{m_j}(x) = x_0, \quad \lim_{j\to\infty} g^{-m_j}(x) = y_0$$

分别在 $\overline{H}^{n+1} \setminus \{y_0\}$ 和 $\overline{H}^{n+1} \setminus \{x_0\}$ 局部一致收敛;

(ii) g 是抛物等距, 且以 x_0 为其唯一的不动点, 那么存在一子序列 $\{m_j\}$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} g^{m_j}(x) = x_0, \quad \lim_{j\to\infty} g^{-m_j}(x) = x_0$$

在 $\overline{H}^{n+1} \setminus \{x_0\}$ 是局部一致收敛的.

引理 2.6 [2,引理2.5] 设 $g_m \in M(\overline{R}^n)$ 是互不相同的元, 且 $\lim\limits_{i\to\infty} g_i = I$, 那么, 对任意两个不同的元 $x_0, y_0 \in \partial H^{n+1}$, 最多存在有限个元 g_m, 使得 $g_m(x_0) = y_0, g_m(y_0) = x_0$.

定理 1.1 的证明 定理的必要性是显然的, 下面证明充分性. 假设 G 不离散, 那么, G 包含子列 $\{g_i\}$, 当 $i \to \infty$ 时, $g_i \to I$. 下面证明这将导致矛盾.

由于对任意 $f, g \in G$, 群 $\langle f, gfg^{-1}\rangle$ 是离散的, 由引理 2.4 知道, 当 g_i 是椭圆元时, 一定是有限阶的, 不妨假设 g_i 全是椭圆元, 全是斜驶元, 或者全是抛物元, 下面分 3 种情况证明.

(1) g_i 全是椭圆元.

因为 G 是非初等群, 由引理 2.1, G 含有无穷多个斜驶元, 且任意两个这样的斜驶元都没有公共的不动点. 取 3 个这样没有公共不动点的斜驶元 $h_1, h_2, h_3 \in G$, 因为 g_i 全是有限阶椭圆元, 由条件 A, 对充分大的 i, g_i 和 3 个这样的斜驶元 h_1, h_2, h_3 中的一个没有公共不动点, 不妨假设 (可以取子列) 对所有 i, $\{g_i\}$ 和 h_1 没有公共不动点. 令 $\mathrm{fix}(h_1) = \{x_0, y_0\}$, 其中 x_0 和 y_0 分别为其吸收型不动点和排斥型不动点, 设 U 是 x_0 的一个邻域, 且 $y_0 \notin U, U \cap \mathrm{fix}(h_2) = \varnothing$, $U \cap \mathrm{fix}(h_3) = \varnothing$. 由引理 2.5, 对每一个 i, 可以证明存在一个正整数 k, 使得 $\mathrm{fix}(h_1^k g_i h_1^{-k}) \subset U$.

由于 h_1 和 h_2 的吸收型不动点也不相同, 同样由引理 2.5, 对每一个 i, 可以证明存在一个正整数 m, 使得 $\mathrm{fix}(h_2^m h_1^k g_i h_1^{-k} h_2^{-m}) \cap U = \emptyset$. 为了简便, 仍用 $\{g_i\}$ 表示 $h_2^m h_1^k g_i h_1^{-k} h_2^{-m}$. 所以, 得到 G 的一列子列 $\{g_i\}$, 当 $i \to \infty$ 时, $g_i \to I$, 满足条件 $\mathrm{fix}(g_i) \cap U = \varnothing$.

因为 h_3 与 h_1 无公共不动点, 由引理 2.5, 存在一个正整数 r, 使得 $\mathrm{fix}(h_1^r h_3 h_1^{-r}) \subset U$, 所以 g_i 和 $h_1^r h_3 h_1^{-r}$ 无公共不动点.

由定理条件知道, 对于任意 $g \in G, \langle h_3, gh_3g^{-1}\rangle$ 是离散的, 于是

$$\langle h_3, h_1^{-r} g_i h_1^r h_3 h_1^{-r} g_i^{-1} h_1^r h_3^{-1}\rangle$$

是离散群.

为了方便, 下面把 $h_1^{-r}g_ih_1^rh_3h_1^{-r}g_i^{-1}h_1^rh_3^{-1}$ 记为 f_i, 于是, $\langle f_i,h_3\rangle$ 是离散群. 因为 $\lim\limits_{i\to\infty} f_i=I$, 可以得到, 对任意整数 j, $\lim\limits_{i\to\infty} h_3^jf_ih_3^{-j}=I$. 那么

$$\max\{d(f_i,I),d(h_3^jf_ih_3^{-j},I),d(f_ih_3^jf_i^{-1}h_3^{-j},I):j=1,2,\cdots,n\}\to 0\ (i\to\infty).$$

由引理 2.3 知, 对充分大的 i, $\langle f_i,h_3\rangle >$ 是离散初等群.

因此, $\langle h_1^rh_3h_1^{-r},g_ih_1^rh_3h_1^{-r}g_i^{-1}\rangle$ 是离散初等群, 因为 h_3 是斜驶元, 所以 $h_1^rh_3h_1^{-r}$, $g_ih_1^rh_3h_1^{-r}g_i^{-1}$ 也都是斜驶元, 由引理 2.2 知道, $h_1^rh_3h_1^{-r},g_ih_1^rh_3h_1^{-r}g_i^{-1}$ 有相同的不动点, 再由引理 2.6 知道, g_i 和 $h_1^rh_3h_1^{-r}$ 有公共不动点, 矛盾.

(2) g_i 全是斜驶元.

这时, g_i 在 $\partial H^{n+1}=\overline{R}^n$ 中有且仅有两个不动点, 于是, 类似 (1) 可以证明.

(3) g_i 全是抛物元.

这时 g_i 在 $\partial H^{n+1}=\overline{R}^n$ 中有唯一一个不动点, 类似 (1) 可以证明.

综上所述, 定理成立.

定理 1.2 和定理 1.3 的证明　类似定理 1.1 可以证明.

定理 1.4 的证明　因为 $\mathrm{tr}^2(f)=4$, 所以不等式成立.

定理 1.5 的证明　因为 $|\mathrm{tr}^2(f)-2|=|\gamma^2+\gamma^{-2}|\geqslant 2$, 所以不等式成立.

为了证明定理 1.6, 我们先证明一个引理.

引理 2.7　设 $f_0,g_0\in SL(2,\Gamma_n)$, 群 $\langle f_0,g_0\rangle$ 是离散初等群, 如果 f_0 是椭圆元, $f_0=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda'\end{pmatrix}$, 其中 $|\lambda|=1,\lambda\neq\pm1$, $\lambda\in\zeta_n$, ζ_n 是中心, $g_0=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, 设 $g_{n+1}=f_0g_nf_0^{-1}g_n^{-1}=\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\\ c_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix}$, 其中 $n=0,1,2,3,\cdots$, $z_n=1+a_nd_n^*(\lambda-\lambda')^2\neq 0$, 那么

(i) 当 $n\neq 4l$(l 为正整数) 时, 有 $|\mathrm{tr}^2(f_0)-2|+|\mathrm{tr}(f_0g_0f_0g_0^{-1})-1|\geqslant 1$;

(ii) 当 $n=4l$(l 为正整数) 时, 若 $\lambda\in R, bc^*\in R$, 则 $|\mathrm{tr}^2(f_0)-2|+|\mathrm{tr}(f_0g_0f_0g_0^{-1})-1|\geqslant 1$.

证　经计算可以得到

$$f_0g_0f_0g_0^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda^2ad^*-bc^* & ba^*-\lambda^2ab^*\\ cd^*-\lambda'^2dc^* & -cb^*+\lambda'^2da^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2ad^*-bc^* & ab^*-\lambda^2ab^*\\ cd^*-\lambda'^2cd^* & -bc^*+\lambda'^2ad^*\end{pmatrix},$$

假设不等式不成立, 那么

$$\alpha=|\mathrm{tr}^2(f_0)-2|+|\mathrm{tr}(f_0g_0f_0g_0^{-1})-1|=|\lambda^2+\lambda'^2|+|1+ad^*(\lambda-\lambda')^2|<1.$$

由 $g_{n+1}=f_0g_nf_0^{-1}g_n^{-1}=\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\\ c_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix}$, 计算得到

$$a_{n+1}=a_nd_n^*(1-\lambda^2)+\lambda^2,$$

$$b_{n+1}=a_nb_n^*(\lambda^2-1),$$

$$c_{n+1}=c_nd_n^*(\lambda'^2-1),$$

$$d_{n+1}=d_na_n^*(1-\lambda'^2)+\lambda'^2.$$

令 $t=\lambda^2+\lambda'^2$, 于是 $z_{n+1}=1+a_{n+1}d_{n+1}^*(\lambda-\lambda')^2=z_n(t-z_n)$, 归纳证明得到 (见文 [21] 证明)

$$|z_{n+1}|\leqslant|z_n|\alpha\leqslant|z_1|\alpha^n.$$

因此, 当 n 趋于无穷大时, z_n 可以看成由不同元组成的趋于 0 的序列. 进而得到

$$a_{n+1}\to\lambda^3(\lambda-\lambda')^{-1},\quad d_{n+1}\to\lambda'^3(\lambda-\lambda')^{-1},\quad n\to\infty,$$

因为 f_0 是椭圆元, $|\lambda|=1$, 于是, 存在正数 K, 满足不等式

$$|b_{n+2}|=|\lambda^2-z_n||b_{n+1}|\leqslant(1+K\alpha^n)|b_{n+1}|,\quad |c_{n+2}|=|1-\lambda^2z_n||c_{n+1}|\leqslant(1+K\alpha^n)|c_{n+1}|,$$

因此, 可以知道 $\{b_n\},\{c_n\}$ 都是有界的, 于是 $\{g_{n+1}\}$ 存在无穷个不同元组成的收敛子列, 这与 $\langle f_0,g_0\rangle$ 离散矛盾, 所以假设不成立, 于是 $|\mathrm{tr}^2(f_0)-2|+|\mathrm{tr}(f_0g_0f_0g_0^{-1})-1|\geqslant1$.

定理 1.6 的证明 由定理条件, 可以得到

$$|\mathrm{tr}^2(f)-2|+|\mathrm{tr}(fgfg^{-1})-1|=|\mathrm{tr}^2(f_0)-2|+|\mathrm{tr}(f_0g_0f_0g_0^{-1})-1|,$$

于是由引理 2.7 可以得到 $|\mathrm{tr}^2(f)-2|+|\mathrm{tr}(fgfg^{-1})-1|\geqslant1$.

为了证明定理 1.7, 先证明一个引理.

引理 2.8 $f_0,g_0\in SL(2,\Gamma_n)$, 群 $\langle f_0,g_0\rangle$ 是离散非初等群, 如果 f_0 是斜驶元, $f_0=\begin{pmatrix}\gamma\lambda & 0\\ 0 & \gamma^{-1}\lambda'\end{pmatrix}$, 其中 $\gamma\in\mathbf{R}/\{\pm1,0\}$, $|\lambda|=1,\lambda\neq\pm1,\ \lambda\in\zeta_n,\ \zeta_n$ 是中心, $g_0=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, 设 $g_{n+1}=f_0g_nf_0^{-1}g_n^{-1}=\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\\ c_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix}$, 其中 $n=0,1,2,3,\cdots$, $z_n=1+a_nd_n^*(\gamma\lambda-\gamma^{-1}\lambda')^2\neq0$, 那么

(i) 当 $n\neq4l$(l 为正整数) 时, 有 $|\mathrm{tr}^2(f_0)-2|+|\mathrm{tr}(f_0g_0f_0g_0^{-1})-1|\geqslant1$;

(ii) 当 $n=4l$(l 为正整数) 时, 若 $\lambda\in R, bc^*\in R$, 则 $|\mathrm{tr}^2(f_0)-2|+|\mathrm{tr}(f_0g_0f_0g_0^{-1})-1|\geqslant1$.

证 计算可以得到

$$f_0g_0f_0g_0^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma^2\lambda^2ad^*-bc^* & ab^*-\gamma^2\lambda^2ab^*\\ cd^*-\gamma^{-2}\lambda'^2cd^* & -bc^*+\gamma^{-2}\lambda'^2ad^*\end{pmatrix},$$

假设不等式不成立, 那么

$$\alpha=|\mathrm{tr}^2(f_0)-2|+|\mathrm{tr}(f_0g_0f_0g_0^{-1})-1|=|\gamma^2\lambda^2+\gamma^{-2}\lambda'^2|+|1+ad^*(\gamma\lambda-\gamma^{-1}\lambda')^2|<1.$$

由 $g_{n+1}=f_0g_nf_0^{-1}g_n^{-1}=\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\\ c_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix}$, 计算得到

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=a_nd_n^*(1-\gamma^2\lambda^2)+\gamma^2\lambda^2,\\ b_{n+1}&=a_nb_n^*(\gamma^2\lambda^2-1),\\ c_{n+1}&=c_nd_n^*(\gamma^{-2}\lambda'^2-1),\\ d_{n+1}&=d_na_n^*(1-\gamma^{-2}\lambda'^2)+\gamma^{-2}\lambda'^2.\end{aligned}$$

令 $t=\gamma^2\lambda^2+\gamma^{-2}\lambda'^2$, 于是 $z_{n+1}=1+a_{n+1}d_{n+1}^*(\gamma\lambda-\gamma^{-1}\lambda')^2=z_n(t-z_n)$, 归纳证明得到 (见文 [21] 证明)

$$|z_{n+1}|\leqslant|z_n|\alpha\leqslant|z_1|\alpha^n.$$

因此, 当 n 趋于无穷大时, z_n 可以看成由不同元组成的趋于 0 的序列. 进而得到

$$a_{n+1} \to \gamma^3\lambda^3(\gamma\lambda - \gamma^{-1}\lambda')^{-1}, \quad d_{n+1} \to \gamma^{-3}\lambda'^3(\gamma\lambda - \gamma^{-1}\lambda')^{-1}, \quad n \to \infty.$$

因为 f_0 是斜驶元, $|\gamma\lambda| \neq 1$, 于是, 对任意 n, 存在与 n 有关的整数 k, 使得 $\{(\gamma\lambda)^{2k}b_n\}$ 和 $\{(\gamma^{-1}\lambda')^{2k}c_n\}$ 都有界. 令 $f_0^k g_n f_0^{-k} = \begin{pmatrix} a_n & (\gamma\lambda)^{2k}b_n \\ (\gamma^{-1}\lambda')^{2k}c_n & d_n \end{pmatrix}$, 于是 $\{f_0^k g_n f_0^{-k}\}$ 是有界序列, 因此 $\{f_0^k g_n f_0^{-k}\}$ 存在无穷个不同元组成的收敛子列, 这与 $\langle f_0, g_0\rangle$ 离散矛盾, 所以假设不成立, 于是

$$|\mathrm{tr}^2(f_0) - 2| + |\mathrm{tr}(f_0 g_0 f_0 g_0^{-1}) - 1| \geqslant 1.$$

定理 1.7 的证明　由定理条件, 可以得到

$$|\mathrm{tr}^2(f) - 2| + |\mathrm{tr}(fgfg^{-1}) - 1| = |\mathrm{tr}^2(f_0) - 2| + |\mathrm{tr}(f_0 g_0 f_0 g_0^{-1}) - 1|,$$

于是由引理 2.8 可以得到

$$|\mathrm{tr}^2(f) - 2| + |\mathrm{tr}(fgfg^{-1}) - 1| \geqslant 1.$$

致谢 本文作者非常感谢审稿人耐心而细致的帮助.

参　考　文　献

[1] Beardon A F. The geometry of discrete groups [M]. Berlin, New York:Springer-Verlag, 1983.

[2] Fang A N, Nai B. On the discreteness and convergence in n-dimensional Möbius groups [J]. *J London Math Soc*, 2000, 61:761–773.

[3] Fang A N, Nai B. On algebraic convergence of Clifford matrix groups [J]. *Chin Ann Math Ser A*, 2000, 21(1):369–376.

[4] Maskit B. Kleinian groups [M]. Berlin, New York:Springer-Verlag, 1987.

[5] Waterman P L. Möbius transformations in several dimensions [J]. *Adv in Math*, 1993, 101:87–113.

[6] Jørgensen T. On discrete groups of Möbius transformations [J]. *Amer J Math*, 1976, 98:739–749.

[7] Jørgensen T. Comments on a discreteness condition for subgroups of $SL(2, C)$ [J]. *Canad J Math*, 1979, 31:87–92.

[8] Abikoff W, Hass A. Non-discrete groups of hyperbolis motions [J]. *Bull London Math Soc*, 1990, 22:233–238.

[9] Martin G J. On the discrete Möbius groups in all dimensions [J]. *Acta Math*, 1989, 163:253–289.

[10] Martin G J. On discrete isometry groups of negative curvature [J]. *Pacific J Math*, 1993, 160:109–127.

[11] Gehring F W, Martin G J. Discrete guasiconformal groups [J]. *Proc London Math Soc*, 1987, 55:331–358.

[12] Wang X T, Yang W Q. Discreteness criteria of Möbius groups of high dimensions and convergence theorem of kleinian groups [J]. *Adv in Math*, 2001, 159:68–82.

[13] Wang X T. Dense subgroups of n-dimensional Möbius groups [J]. *Math Zeit*, 1999, 38:29–34.

[14] Jiang Y P. On the discreteness of Möbius groups in all dimensions [J]. *Math Proc Camb Phi Soc*, 2004, 138:547–555.

[15] Jiang Y P, Kamiya S, Parker J R. Jørgensen's inequalitiy for complex hyperbolic space [J]. *Geom Dedicata*, 2003, 97:55–80.

[16] Chen M. Discreteness and convergence of Möbius groups [J]. *Geom Dedicata*, 2004, 104:61–69.

[17] Li L, Fu X. Discreteness by use a test map [J]. *Bull Korean Math Soc*, 2012, 49(1):57–61.

[18] Dai B L. Discreteness criteria for subgroups of isometry groups of pinched Hadamard manifolds by use of a test map [J]. *Acta Mathematica Sinica*, 2013, 56A(6): 935–940.

[19] Tan D. On two-generator discrete groups of Möbius transformations [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1989, 106(3):63–770.

[20] Wang J, Dai B L. Inequalities and common fixed points for Möbius groups in $\overline{\mathbf{R}}^{\mathbf{n}}$ [J]. *Scientiae Mathematicae*, 1999, 3(2):385–392.

[21] Zhu R R. Inequalities about discretiness of transformation groups [D]. Shanghai, Shanghai University of Finance and Economics, 2016.

[22] Yang S, Zhao T. Conjugacy class and discreteness in $SL(2, C)$ [J]. *Osaka J Math*, 2016, 53:1047–1053.

On the Discreteness in Clifford Matrix Groups

DAI Binlin[1]

[1]School of Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China. E-mail: bldai@mail.shufe.edu.cn

Abstract In this paper, the discreteness of Clifford matrix groups is studied and several discreteness criteria and inequalities are obtained.

Keywords Nonelementary group, Discrete group, Clifford matrix group, Condition A

2000 MR Subject Classification 30F40, 20H10, 30C62