数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(2):165–176
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0014

限制零点个数的亚纯函数的正规定则*

钱雪雪[1] 叶亚盛[1] 贾志晶[1]

提要 设 k,$n(\geqslant k+1)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$,b 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对于任意的 $f\in\mathcal{F}$, f 的零点重级大于等于 $k+1$, 并且在 D 内满足 $f+a[L(f)]^n-b$ 至多有 $n-k-1$ 个判别的零点, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规. 这里 $L(f)=f^{(k)}(z)+a_1f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_{k-1}f'(z)+a_kf(z)$, 其中 $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 是区域 D 上的全纯函数.

关键词 亚纯函数, 零点重级, 正规族
MR (2000) 主题分类 30D35
中图法分类 O174.52
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)02-0165-12

1 引言和结果

设 f 是复平面上的亚纯函数, 我们引用值分布理论[1]中的一些常用符号, 如

$$m(r,f),\ N(r,f),\ \overline{N}(r,f),\ T(r,f),\ S(r,f),\ \cdots.$$

设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, 若从函数族 $\mathcal{F}$ 中的任一函数序列 $\{f_n(z)\}$ 中均可选出一个子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$, 使得 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在区域 D 内按球距内闭一致收敛于一亚纯函数, 或一致趋于 ∞, 则称函数族 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规[2]. 记

$$L(f)=f^{(k)}(z)+a_1f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_{k-1}f'(z)+a_kf(z),$$

其中 $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 是区域 D 上的全纯函数, 则称 $L(f)$ 为 f 的微分多项式.

在 1959 年, Hayman 证明了如下著名的结果.

定理 A [3] 设 $n(\geqslant 5)$ 是一个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数, f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数. 如果 $f'-af^n\neq b$, 那么 f 是一个常数.

Drasin, Langley, Li 等人证明了定理 A 相应的正规定则.

定理 B [4–11] 设 $n(\geqslant 3)$ 是一个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对于任意的 $f\in\mathcal{F}$, 在 D 内满足 $f'-af^n\neq b$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

Pang, Schwick, Ye 等将定理 B 中的 f' 推广到 $f^{(k)}$, 证明了如下结果.

定理 C [11–16] 设 k, $n(\geqslant k+3)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对于任意的 $f\in\mathcal{F}$, 在 D 内满足 $f^{(k)}-af^n\neq b$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

本文 2017 年 3 月 22 日收到, 2018 年 6 月 19 日收到修改稿.
[1]上海理工大学理学院, 上海 200093.
E-mail: 1714774700@qq.com; yashengye@aliyun.com; jiazhijing08@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11371139) 的资助.

1994 年, 叶亚盛将定理 A 与定理 B 中的 f 与 f' 交换位置, 证明了以下定理.

定理 D [17] 设 $n(\geqslant 3)$ 是一个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级大于等于 2, 并且在 D 内满足 $f + a(f')^n \neq b$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2008 年, 方明亮和 Zalcman 证明了当 $n = 2$, 定理 D 也成立.

定理 E [18] 设 $n(\geqslant 2)$ 是一个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级大于等于 2, 并且在 D 内满足 $f + a(f')^n \neq b$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2009 年, 徐炎, 吴凤琴, 廖良文将定理 E 中的 f' 推广到 $f^{(k)}$, 得到如下定理.

定理 F [19] 设 k, $n(\geqslant k+1)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数. 如果 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个超越亚纯函数, 那么 $f + a(f^{(k)})^n$ 可以取 b 无穷多次.

定理 G [19] 设 k, $n(\geqslant k+1)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级大于等于 $k+1$, 并且在 D 内满足 $f + a(f^{(k)})^n \neq b$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2013 年, 雷春林, 方明亮, 曾翠萍将定理 G 中的 $n \geqslant k+1$ 推广到 $n \geqslant 2$, 结论依然成立.

定理 H [20] 设 k, $n(\geqslant 2)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级大于等于 $k+1$, 并且在 D 内满足 $f + a(f^{(k)})^n \neq b$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

本文我们首先将定理 G 改进为 $f + a(f^{(k)})^n - b$ 有零点, 得到了如下的结果.

定理 1.1 设 k, $n(\geqslant k+1)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级大于等于 $k+1$, 并且在 D 内满足 $f + a[L(f)]^n - b$ 至多有 $n-k-1$ 个判别的零点, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

推论 1.1 设 k, $n(\geqslant k+1)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级大于等于 $k+1$, 并且在 D 内满足 $f + a(f^{(k)})^n - b$ 至多有 $n-k-1$ 个判别的零点, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

其次, 我们考虑将定理 C 推广为 $L(f) - af^n - b$ 有零点但也要限制零点个数, 得到了如下的结果.

定理 1.2 设 $k(\geqslant 2)$, $n(\geqslant k+3)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级大于等于 k, 并且在 D 内满足 $L(f) - af^n - b$ 至多有 $n-k-2$ 个判别的零点, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

推论 1.2 设 $k(\geqslant 2)$, $n(\geqslant k+3)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$, b 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级大于等于 k, 并且在 D 内满足 $f^{(k)} - af^n - b$ 至多有 $n-k-2$ 个判别的零点, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

例 1.1 设 k, $n(\geqslant k+1)$ 是两个正整数, $D = \{z : |z| < 1\}$,
$$\mathcal{F} = \{f_j(z) = jz^k,\ j = 1, 2, 3, \cdots\},$$

那么

$$f_j(z)+[f_j^{(k)}(z)]^n=jz^k+(k!j)^n\neq 0,$$

但是 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处不正规. 这说明定理 1.1 中的条件 "f 的零点重级大于等于 $k+1$" 是必要的.

例 1.2 设 $k, n(=k+2)$ 是两个正整数, $D=\{z:|z|<1\}$,

$$\mathcal{F}=\{f_j(z)=jz^{k+1},\ j=1,2,3,\cdots\},$$

那么

$$f_j(z)+[f_j^{(k)}(z)]^{k+2}=\{j+[(k+1)!j]^{k+2}z\}z^{k+1}$$

有 $2(=n-k)$ 个判别的零点, 但是 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处不正规. 这说明定理 1.1 中的条件 "$f+a[L(f)]^n-b$ 至多有 $n-k-1$ 个判别的零点" 是最佳的.

例 1.3 设 $k(\geqslant 2), n(\geqslant k+3)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$ 是一个有穷复数, $D=\{z:|z|<1\}$,

$$\mathcal{F}=\{f_j(z)=jz^{k-1},\ j=1,2,3,\cdots\},$$

那么

$$f_j^{(k)}-a(f_j)^n=-a(jz^{k-1})^n=-aj^nz^{n(k-1)}$$

在 D 内有 1 个判别的零点, 但是 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处不正规. 这说明定理 1.2 中的条件 "f 的零点重级大于等于 k" 是最佳的.

例 1.4 设 $k(\geqslant 2), n(\geqslant k+3)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$ 是一个有穷复数, $D=\{z:|z|<1\}$,

$$\mathcal{F}=\left\{f_j(z)=\frac{1}{jz+\frac{1}{j}},\ j=1,2,3,\cdots\right\}$$

那么

$$f_j^{(k)}-a(f_j)^n=\frac{(-1)^kk!j^k[jz+\frac{1}{j}]^{n-k-1}-a}{[jz+\frac{1}{j}]^n},$$

在 D 内有 $n-k-1$ 个判别的零点, 但是 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处不正规. 这说明定理 1.2 中的条件 "$L(f)-af^n-b$ 至多有 $n-k-2$ 个判别的零点" 是最佳的.

2　主要引理

引理 2.1 [21] 设 p,q 是两个正整数, α 是一个实数且满足 $-q<\alpha<p$, $\mathcal{F}$ 为单位圆盘 Δ 内的一族亚纯函数, 且对于每一个 $f\in\mathcal{F}$, f 的零点重级大于等于 p, f 的极点重级大于等于 q. 如果 $\mathcal{F}$ 在 $z_0\in\Delta$ 不正规, 那么存在

(a) 点列 $z_n\in\Delta$, $z_n\longrightarrow z_0$;

(b) 函数列 $f_n\in\mathcal{F}$;

(c) 正数列 $\rho_n\longrightarrow 0^+$,

使得 $\frac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^\alpha}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 并且 g 的零点重级大于等于 p, g 的极点重级大于等于 q, $g^\#(\zeta)\leqslant g^\#(0)=1$.

引理 2.2 [2] 设 $f(z)$ 为整函数, 若 $f(z)$ 的球面导数 $f^\#(z)$ 有界, 则 $f(z)$ 的级至多为 1.

引理 2.3 设 $f(z)=\frac{P(z)}{z-a}$, $P(z)$ 为 n 次多项式, 且 $P(a)\neq 0$, 则当 $j<n$ 时, $f^{(j)}(z)=\frac{Q(z)}{(z-a)^{j+1}}$, 这里 $Q(z)$ 也是次数为 n 的多项式.

证 设 $f(z)=Az^{n-1}+a_1z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}+\frac{b}{z-a}$, 其中 $A(\neq 0)$, $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a$ 为常数, 则当 $j<n$ 时,

$$\begin{aligned}f^{(j)}(z)&=A(n-1)(n-2)\cdots(n-j)z^{n-j-1}+\cdots+\frac{(-1)^j j!b}{(z-a)^{j+1}}\\&=\frac{A(n-1)(n-2)\cdots(n-j)z^n+\cdots+(-1)^j j!b}{(z-a)^{j+1}}\\&=\frac{Q(z)}{(z-a)^{j+1}},\end{aligned}$$

这里 $Q(z)=A(n-1)(n-2)\cdots(n-j)z^n+\cdots+(-1)^j j!b$ 是一次数为 n 的多项式.

引理 2.4 设 k, $n(\geqslant k+2)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$ 是一个有穷复数, $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个非常数的亚纯函数, 且 f 的零点重级大于等于 $k+1$, 那么 $f+a(f^{(k)})^n$ 至少有 $n-k$ 个判别的零点.

证 如果 $f(z)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个超越亚纯函数, 那么根据定理 F, $f+a(f^{(k)})^n$ 有无穷个零点, 所以我们只要考虑 $f(z)$ 为非超越亚纯函数的情形. 假设 $f+a(f^{(k)})^n$ 至多有 $n-k-1$ 个判别的零点, 经计算可得,

$$\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f}\Big)\leqslant\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f+a(f^{(k)})^n}\Big)\leqslant(n-k-1)\log r+O(1).\tag{2.1}$$

根据 Nevanlinna 第一和第二基本定理, 我们有

$$\begin{aligned}nm\Big(r,\frac{1}{f^{(k)}}\Big)&=m\Big(r,\frac{1}{a(f^{(k)})^n}\Big)+O(1)\\&\leqslant m\Big(r,\frac{f}{a(f^{(k)})^n}\Big)+m\Big(r,\frac{1}{f}\Big)+O(1)\\&\leqslant m\Big(r,\frac{f}{a(f^{(k)})^n}+1\Big)+m\Big(r,\frac{f^{(k)}}{f}\Big)+m\Big(r,\frac{1}{f^{(k)}}\Big)+O(1)\\&\leqslant m\Big(r,\frac{f+a(f^{(k)})^n}{a(f^{(k)})^n}\Big)+m\Big(r,\frac{1}{f^{(k)}}\Big)+S(r,f^{(k)})\\&=T\Big(r,\frac{f+a(f^{(k)})^n}{a(f^{(k)})^n}\Big)-N\Big(r,\frac{f+a(f^{(k)})^n}{a(f^{(k)})^n}\Big)+m\Big(r,\frac{1}{f^{(k)}}\Big)+S(r,f^{(k)})\\&\leqslant\overline{N}\Big(r,\frac{f+a(f^{(k)})^n}{a(f^{(k)})^n}\Big)+\overline{N}\Big(r,\frac{a(f^{(k)})^n}{f+a(f^{(k)})^n}\Big)+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{\frac{f+a(f^{(k)})^n}{a(f^{(k)})^n}-1}\Big)\\&\quad-N\Big(r,\frac{f+a(f^{(k)})^n}{a(f^{(k)})^n}\Big)+m\Big(r,\frac{1}{f^{(k)}}\Big)+S(r,f^{(k)}).\end{aligned}\tag{2.2}$$

通过简单的计算, 有

$$\overline{N}\Big(r,\frac{f+a(f^{(k)})^n}{a(f^{(k)})^n}\Big)=\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f^{(k)}}\Big)=\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f}\Big)+\overline{N}_1(r),\tag{2.3}$$

$$\overline{N}\Big(r,\frac{a(f^{(k)})^n}{f+a(f^{(k)})^n}\Big)\leqslant\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f+a(f^{(k)})^n}\Big),\tag{2.4}$$

$$\overline{N}\Big(r, \frac{1}{\frac{f+a(f^{(k)})^n}{a(f^{(k)})^n}-1}\Big) = \overline{N}(r,f), \tag{2.5}$$

$$N\Big(r, \frac{f+a(f^{(k)})^n}{a(f^{(k)})^n}\Big) = (n-1)N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) - nk\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + nN_1(r), \tag{2.6}$$

$$N\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}}\Big) = N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) - k\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + N_1(r), \tag{2.7}$$

这里 $N_1(r)$ 表示 $f^{(k)}$ 的零点但不是 f 的零点的密指量. 根据 (2.1)–(2.7) 式, 我们有

$$\begin{aligned}(n-1)T\Big(r,\frac{1}{f^{(k)}}\Big) &\leqslant \overline{N}(r,f) + (k+1)\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + \overline{N}\Big(r,\frac{1}{f+a(f^{(k)})^n}\Big) \\ &\quad + \overline{N}_1(r) - N_1(r) + S(r,f^{(k)}) \\ &\leqslant \frac{1}{k+1}N(r,f^{(k)}) + (k+2)\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f+a(f^{(k)})^n}\Big) + S(r,f^{(k)}) \\ &\leqslant \frac{1}{k+1}T(r,f^{(k)}) + (k+2)\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f+a(f^{(k)})^n}\Big) + S(r,f^{(k)}),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}T(r,f^{(k)}) &\leqslant \frac{(k+2)(n-k-1)}{n-1-\frac{1}{k+1}}\log r + S(r,f^{(k)}) \\ &< (k+2)\log r + S(r,f^{(k)}),\end{aligned}$$

所以 $f^{(k)}$ 是一个有理函数且 $\deg f^{(k)} \leqslant k+1$.

情形 1　f 是一个多项式.

由于 $\deg f^{(k)} \leqslant k+1$, 则 $\deg f \leqslant 2k+1$. 因为 f 的零点重级大于等于 $k+1$, 所以我们断言: f 至多有一个判别的零点. 否则, 假设 f 有 $s(\geqslant 2)$ 个判别的零点, 则

$$s(k+1) \leqslant \deg f \leqslant 2k+1,$$

即 $(s-2)k \leqslant 1-s < 0$, 矛盾. 那么可设

$$f = A(z-\alpha)^m, \quad k+1 \leqslant m \leqslant 2k+1,\ m\in\mathbb{N},\ \alpha, A(\neq 0)\in\mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned}f+a(f^{(k)})^n &= A(z-\alpha)^m + a[Am(m-1)\cdots(m-k+1)(z-\alpha)^{m-k}]^n \\ &= A(z-\alpha)^m\{1+aA^{n-1}[m(m-1)\cdots(m-k+1)]^n(z-\alpha)^{n(m-k)-m}\}.\end{aligned}$$

即 $f+a(f^{(k)})^n$ 有 $n(m-k)-m+1(\geqslant n-k)$ 个判别的零点, 与假设矛盾, 故 f 不是一个多项式.

情形 2　f 是一个有理函数但不是一个多项式.

由于 $f^{(k)}$ 的极点重级大于等于 $k+1$, 且 $\deg f^{(k)} \leqslant k+1$, 所以 f 只有一个一阶的极点.

情形 2.1　f 没有零点, 那么 $f(z)=\frac{A}{z-\beta}$, $\beta, A(\neq 0)\in\mathbb{C}$, 则

$$f+a(f^{(k)})^n = \frac{A}{z-\beta} + a\Big[\frac{(-1)^k k!A}{(z-\beta)^{(k+1)}}\Big]^n = \frac{A(z-\beta)^{n(k+1)-1}+a[(-1)^k k!A]^n}{(z-\beta)^{n(k+1)}},$$

即 $f+a(f^{(k)})^n$ 有 $n(k+1)-1(\geqslant n-k)$ 个判别的零点, 这与假设矛盾.

情形 2.2 f 有零点, 且 f 的零点重级大于等于 $k+1$. 令

$$f(z)=\frac{A(z-\alpha_1)^{m_1}\cdots(z-\alpha_t)^{m_t}}{z-\beta},\quad m_j\geqslant k+1,\ m_j(1\leqslant j\leqslant t),\ t\in\mathbb{N},$$

$\alpha_1\cdots\alpha_t,\beta$ 是不同的复数, $A(\neq 0)\in\mathbb{C}$.

由引理 2.3 知,

$$f^{(k)}(z)=\frac{Q(z)}{(z-\beta)^{k+1}},$$

这里 $Q(z)$ 是一个 $m_1+m_2+\cdots+m_t$ 次多项式, 则

$$k+1\geqslant \deg f^{(k)}\geqslant m_1+\cdots+m_t\geqslant t(k+1),$$

所以 $t=1, m_1=k+1$, 即 $f(z)=\frac{A(z-\alpha)^{k+1}}{z-\beta}$. 又

$$\begin{aligned}(n-1)T\Big(r,\frac{1}{f^{(k)}}\Big)&\leqslant \overline{N}(r,f)+(k+1)\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f}\Big)+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f+a(f^{(k)})^n}\Big)\\&\quad+\overline{N}_1(r)-N_1(r)+S(r,f^{(k)})\\&\leqslant(1+k+1+n-k-1)\log r+S(r,f^{(k)})\\&\leqslant(n+1)\log r+S(r,f^{(k)}),\end{aligned}$$

因此, 我们有

$$T(r,f^{(k)})\leqslant\frac{n+1}{n-1}\log r+S(r,f^{(k)}).$$

所以 $f^{(k)}$ 是一个有理函数且 $\deg f^{(k)}\leqslant\frac{n+1}{n-1}$. 若 $n\geqslant 4$, 那么 $\deg f^{(k)}<2$, 这与当 f 有极点时, $\deg f^{(k)}\geqslant k+1$ 矛盾. 若 $n=3$, 那么 $k=1$, 则 $f(z)=\frac{A(z-\alpha)^2}{z-\beta}$, α,β 是两个不同的复数, $A(\neq 0)\in\mathbb{C}$. 从而

$$\begin{aligned}f+a(f')^3&=\frac{A(z-\alpha)^2}{z-\beta}+a\Big[\frac{A(z-\alpha)(z+\alpha-2\beta)}{(z-\beta)^2}\Big]^3\\&=\frac{A(z-\alpha)^2[(z-\beta)^5+aA^2(z-\alpha)(z+\alpha-2\beta)^3]}{(z-\beta)^6},\end{aligned}$$

即 $f+a(f')^3$ 至少有 $2(>n-k-1)$ 个判别的零点, 矛盾.

引理 2.5 设 $k(\geqslant 2)$, $n(\geqslant k+3)$ 是两个正整数, $a(\neq 0)$ 是一个有穷复数, $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个非常数的亚纯函数, 且 f 的零点重级大于等于 k, 那么 $f^{(k)}-af^n$ 至少有 $n-k-1$ 个判别的零点.

证 假设 $f^{(k)}-af^n$ 至多有 $n-k-2$ 个判别的零点, 则

$$\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f^{(k)}-af^n}\Big)\leqslant(n-k-2)\log r+O(1).\tag{2.8}$$

根据 Nevanlinna 第一和第二基本定理, 我们有

$$\begin{aligned}nm(r,f)&=m(r,f^n)\\&\leqslant m(r,af^n)+O(1)\\&\leqslant m\Big(r,\frac{af^n}{f^{(k)}}\Big)+m\Big(r,\frac{f^{(k)}}{f}\Big)+m(r,f)+O(1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant m\Big(r, \frac{af^n}{f^{(k)}}\Big) + m(r,f) + S(r,f^{(k)}) \\
&= T\Big(r, \frac{af^n}{f^{(k)}}\Big) - N\Big(r, \frac{af^n}{f^{(k)}}\Big) + m(r,f) + S(r,f^{(k)}) \\
&\leqslant \overline{N}\Big(r, \frac{af^n}{f^{(k)}}\Big) + \overline{N}\Big(r, \frac{f^{(k)}}{af^n}\Big) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{\frac{f^{(k)}}{af^n}-1}\Big) \\
&\quad - N\Big(r, \frac{af^n}{f^{(k)}}\Big) + m(r,f) + S(r,f^{(k)}). \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

通过简单的计算, 有

$$\overline{N}\Big(r, \frac{af^n}{f^{(k)}}\Big) = \overline{N}(r,f) + \overline{N}_1(r), \tag{2.10}$$

$$\overline{N}\Big(r, \frac{f^{(k)}}{af^n}\Big) = \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f}\Big), \tag{2.11}$$

$$\overline{N}\Big(r, \frac{1}{\frac{f^{(k)}}{af^n}-1}\Big) = \overline{N}\Big(r, \frac{af^n}{f^{(k)}-af^n}\Big) = \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}-af^n}\Big), \tag{2.12}$$

$$N\Big(r, \frac{af^n}{f^{(k)}}\Big) = (n-1)N(r,f) - k\overline{N}(r,f) + N_1(r). \tag{2.13}$$

这里 $N_1(r)$ 表示 $f^{(k)}$ 的零点但不是 f 的零点的密指量.

根据 (2.8)–(2.13) 式和 Nevanlinna 第一、第二基本定理, 我们有

$$
\begin{aligned}
(n-1)T(r,f) &\leqslant \overline{N}(r,f) + \overline{N}_1(r) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f}\Big) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}-af^n}\Big) \\
&\quad + k\overline{N}(r,f) - N_1(r) + S(r,f) \\
&\leqslant (k+1)\overline{N}(r,f) + \frac{1}{k}N\Big(r, \frac{1}{f}\Big) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}-af^n}\Big) + S(r,f) \\
&\leqslant \Big(k+1+\frac{1}{k}\Big)T(r,f) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}-af^n}\Big) + S(r,f). \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
T(r,f) &\leqslant \frac{n-k-2}{n-k-2-\frac{1}{k}}\log r + S(r,f) \\
&= \Big[1 + \frac{1}{k(n-k-2)-1}\Big]\log r + S(r,f).
\end{aligned}
$$

情形 1 当 $k=2, n=5$ 时, $f''-af^5$ 至多有一个判别的零点, $T(r,f)\leqslant 2\log r + S(r,f)$, f 的零点重级大于等于 2, 所以 f 为至多有一个判别零点和至多有两个判别极点的有理函数.

情形 1.1 f 没有零点.

由 (2.14) 式得

$$
\begin{aligned}
4T(r,f) &\leqslant 3\overline{N}(r,f) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f}\Big) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f''-af^5}\Big) + S(r,f) \\
&\leqslant 3T(r,f) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f''-af^5}\Big) + S(r,f),
\end{aligned}
$$

即

$$T(r,f)\leqslant \log r+S(r,f),$$

所以 $f(z)=\frac{A}{z-\alpha}$, $A(\neq 0)\in\mathbb{C}$, 则

$$f''-af^5=\frac{2A}{(z-\alpha)^3}-a\Big(\frac{A}{z-\alpha}\Big)^5=\frac{2A(z-\alpha)^2-aA^5}{(z-\alpha)^5}.$$

所以 $f''-af^5$ 有 2 个判别的零点, 这与假设矛盾.

情形 1.2 f 有一个 2 阶的零点, 且 f 至多有一个判别的极点.

由 (2.14) 式得

$$\begin{aligned}4T(r,f)&\leqslant 3\overline{N}(r,f)+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f}\Big)+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f''-af^5}\Big)+S(r,f)\\&\leqslant 5\log r+S(r,f),\end{aligned}$$

即

$$T(r,f)\leqslant \frac{5}{4}\log r+S(r,f),$$

这与 f 有一个 2 阶零点矛盾.

情形 1.3 f 有一个 2 阶零点, 且 f 有两个判别的 1 阶极点, 那么 $f(z)=\frac{A(z-\gamma)^2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$, $A\neq 0$, α, β, γ 是 3 个判别的有穷复数.

$$\begin{aligned}\frac{-aA^5(z-\lambda)^{10}}{(z-\alpha)^5(z-\beta)^5}&=f''-af^5\\&=\frac{AP(z)}{(z-\alpha)^3(z-\beta)^3}-a\Big[\frac{A(z-\gamma)^2}{(z-\alpha)(z-\beta)}\Big]^5\\&=\frac{A(z-\alpha)^2(z-\beta)^2P(z)-aA^5(z-\gamma)^{10}}{(z-\alpha)^5(z-\beta)^5},\end{aligned}$$

这里 $P(z)$ 是次数小于等于 3 的多项式, 即有

$$A(z-\alpha)^2(z-\beta)^2P(z)-aA^5(z-\gamma)^{10}=-aA^5(z-\lambda)^{10}.$$

从而 $A=0$, 这与条件矛盾.

情形 2 当 $n\geqslant 6$ 时, 由于 $1+\frac{1}{k(n-k-2)-1}<2$, 则 $T(r,f)\leqslant \log r+s(r,f)$. 又因为 f 的零点重级大于等于 $k(\geqslant 2)$, 那么可设 $f(z)=\frac{A}{z-\alpha}$, $A\neq 0$. 因为

$$\begin{aligned}f^{(k)}-af^n&=\frac{(-1)^k k!A}{(z-\alpha)^{k+1}}-a\Big(\frac{A}{z-\alpha}\Big)^n\\&=\frac{(-1)^kA[k!(z-\alpha)^{n-k-1}+(-1)^{k+1}aA^{n-1}]}{(z-\alpha)^n},\end{aligned}$$

即 $f^{(k)}-af^n$ 有 $n-k-1$ 个判别的零点, 与假设矛盾.

3 定理 1.1 的证明

当 $n=k+1$ 时, 定理 1.1 的证明可由定理 G 的证明得出; 以下我们只考虑 $n\geqslant k+2$ 的情况.

不失一般性, 假设 $D=\Delta$, $\mathcal{F}$ 在 Δ 内不正规, 那么至少存在一点 $z_0\in\Delta$, 使得 $\mathcal{F}$ 在 z_0 内不正规. 下面我们分两种情形考虑.

情形 1 $b=0$.

根据引理 2.1, 存在 $z_j\longrightarrow z_0, \rho_j\longrightarrow 0^+, f_j\in\mathcal{F}$, 使得

$$g_j(\zeta)=\frac{f_j(z_j+\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}}\longrightarrow g(\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 并且 $g(\zeta)$ 的零点重级大于等于 $k+1$, $g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=1$, 且 $g(\zeta)$ 的级至多为 2.

在 $\mathbb{C}$ 上去掉 $g(\zeta)$ 的极点的区域内有

$$\begin{aligned}&\frac{f_j(z_j+\rho_j\zeta)+a[f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta)+a_1(z_j+\rho_j\zeta)f_j^{(k-1)}(z_j+\rho_j\zeta)+\cdots+a_k(z_j+\rho_j\zeta)f_j(z_j+\rho_j\zeta)]^n}{\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}}\\&=g_j(\zeta)+\frac{a[\rho_j^{\frac{k}{n-1}}g_j^{(k)}(\zeta)+\rho_j^{\frac{k}{n-1}+1}a_1(z_j+\rho_j\zeta)g_j^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+\rho_j^{\frac{k}{n-1}+k}a_k(z_j+\rho_j\zeta)g_j(\zeta)]^n}{\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}}\\&\longrightarrow g(\zeta)+a[g^{(k)}(\zeta)]^n.\end{aligned}$$

我们断言 $g(\zeta)+a[g^{(k)}(\zeta)]^n\not\equiv 0$, 否则 $g(\zeta)\equiv -a[g^{(k)}(\zeta)]^n$, 那么 $g(\zeta)\neq 0,\infty$, $g(\zeta)$ 为整函数, 根据引理 2.2, $g(\zeta)$ 的级至多为 1, 那么 $g(\zeta)=\mathrm{e}^{c\zeta+d}$, 其中 $c(\neq 0)$, d 是两个有穷复数. 又

$$g(\zeta)+a[g^{(k)}(\zeta)]^n=\mathrm{e}^{c\zeta+d}[1+ac^{nk}\mathrm{e}^{(n-1)(c\zeta+d)}]\equiv 0.$$

因此, 我们可以得到 $\mathrm{e}^{(n-1)(c\zeta+d)}\equiv -\frac{1}{ac^{nk}}$, 矛盾.

根据引理 2.4, $g(\zeta)+a[g^{(k)}(\zeta)]^n$ 至少有 $n-k$ 个判别的零点. 假设 $\zeta_l(1\leqslant l\leqslant n-k)$ 是 $g(\zeta)+a[g^{(k)}(\zeta)]^n$ 的 $n-k$ 个判别的零点, 取 $\delta(>0)$ 足够小, 使得 $D(\zeta_l,\delta)(1\leqslant l\leqslant n-k)$ 两两不相交, 这里 $D(\zeta_l,\delta)=\{|\zeta-\zeta_l|<\delta\}$. 由 Hurwitz's 定理知, 存在

$$\zeta_l^j(\in D(\zeta_l,\delta))\longrightarrow\zeta_l,\quad 1\leqslant l\leqslant n-k,$$

使得对于充分大的 j, 有

$$f_j(z_j+\rho_j\zeta_l^j)+a[L(f_j)(z_j+\rho_j\zeta_l^j)]^n=0,\quad 1\leqslant l\leqslant n-k.$$

$f_j+a[L(f_j)]^n$ 有 $n-k$ 个判别的零点与定理条件矛盾. 故 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

情形 2 $b\neq 0$.

根据引理 2.1, 存在 $z_j\longrightarrow z_0, \rho_j\longrightarrow 0^+, f_j\in\mathcal{F}$, 使得

$$g_j(\zeta)=\frac{f_j(z_j+\rho_j\zeta)}{\rho_j^{k}}\longrightarrow g(\zeta),$$

在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 并且 $g(\zeta)$ 的零点重级大于等于 $k+1$, $g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=1$, 且 $g(\zeta)$ 的级至多为 2.

在 $\mathbb{C}$ 上去掉 $g(\zeta)$ 的极点的区域内, 有

$$\begin{aligned}&\rho_j^k g_j(\zeta)+a[g_j^{(k)}(\zeta)+\rho_j a_1(z_j+\rho_j\zeta)g_j^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+\rho_j^k a_k(z_j+\rho_j\zeta)g_j(\zeta)]^n-b\\&=f_j(z_j+\rho_j\zeta)+a[f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta)+a_1 f_j^{(k-1)}(z_j+\rho_j\zeta)+\cdots+a_k f_j(z_j+\rho_j\zeta)]^n-b\\&\longrightarrow a[g^{(k)}(\zeta)]^n-b.\end{aligned}$$

我们断言: $a[g^{(k)}(\zeta)]^n-b\not\equiv 0$, 否则 $g^{(k)}(\zeta)\equiv c$, c 是常数且满足 $c^n=\frac{b}{a}$, 那么 $g(\zeta)$ 是一个至多为 k 次的多项式, 与 $g(\zeta)$ 的零点重数大于等于 $k+1$ 矛盾.

断言: $a[g^{(k)}(\zeta)]^n-b$ 至多有 $n-k-1$ 个判别的零点.

假设 $a[g^{(k)}(\zeta)]^n-b$ 有 $n-k$ 个判别的零点 $\zeta_l(1\leqslant l\leqslant n-k)$, 取 $\delta(>0)$ 足够小, 使得 $D(\zeta_l,\delta)(1\leqslant l\leqslant n-k)$ 两两不相交, 这里 $D(\zeta_l,\delta)=\{|\zeta-\zeta_l|<\delta\}$. 由 Hurwitz's 定理知, 存在 $\zeta_l^j(\in D(\zeta_l,\delta))\longrightarrow\zeta_l(1\leqslant l\leqslant n-k)$, 使得对于充分大的 j, 有

$$f_j(z_j+\rho_j\zeta_l^j)+a[L(f_j)(z_j+\rho_j\zeta_l^j)]^n-b=0,\quad 1\leqslant l\leqslant n-k,$$

$f_j+a[L(f_j)]^n$ 有 $n-k$ 个判别的零点, 与定理条件矛盾.

由 Nevanlinna 第二基本定理, 得

$$\begin{aligned}(n-1)T(r,g^{(k)})&\leqslant\overline{N}(r,g^{(k)})+\sum_{t=1}^{n}\overline{N}\Big(r,\frac{1}{g^{(k)}-c_t}\Big)+S(r,g^{(k)})\\&\leqslant\frac{1}{k+1}N(r,g^{(k)})+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{a(g^{(k)})^n-b}\Big)+S(r,g^{(k)})\\&\leqslant\frac{1}{k+1}T(r,g^{(k)})+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{a(g^{(k)})^n-b}\Big)+S(r,g^{(k)}),\end{aligned}$$

这里, $c_t(t=1,2,\cdots,n)$ 为方程 $z^n=\frac{b}{a}$ 的 n 个不同的根, 则

$$\begin{aligned}\Big(n-1-\frac{1}{k+1}\Big)T(r,g^{(k)})&\leqslant\overline{N}\Big(r,\frac{1}{a(g^{(k)})^n-b}\Big)+S(r,g^{(k)})\\&\leqslant(n-k-1)\log r+S(r,g^{(k)}).\end{aligned}$$

因此, 我们得到

$$T(r,g^{(k)})\leqslant\frac{n-k-1}{n-k-\frac{1}{k+1}}\log r+S(r,g^{(k)}).$$

因为 $\frac{n-k-1}{n-k-\frac{1}{k+1}}<1$, 所以 $g^{(k)}(\zeta)$ 为常数, 即 $g(\zeta)$ 是一个至多为 k 次的多项式, 与 $g(\zeta)$ 的零点重级大于等于 $k+1$ 矛盾. 故 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

4 定理 1.2 的证明

不失一般性, 假设 $D=\Delta$, $\mathcal{F}$ 在 Δ 内不正规, 那么至少存在一点 $z_0\in\Delta$, 使得 $\mathcal{F}$ 在 z_0 内不正规. 根据引理 2.1, 存在 $z_j\longrightarrow z_0,\rho_j\longrightarrow 0^+,f_j\in\mathcal{F}$, 使得

$$g_j(\zeta)=\frac{f_j(z_j+\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{-k}{n-1}}}\longrightarrow g(\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 并且 $g(\zeta)$ 的零点重级大于等于 k, $g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=1$, 且 $g(\zeta)$ 的级至多为 2.

在 $\mathbb{C}$ 上去掉 $g(\zeta)$ 的极点的区域内, 有

$$\begin{aligned}&\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}[f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta)+a_1(z_j+\rho_j\zeta)f_j^{(k-1)}(z_j+\rho_j\zeta)+\cdots\\&\quad+a_k(z_j+\rho_j\zeta)f_j(z_j+\rho_j\zeta)-af_j^n(z_j+\rho_j\zeta)-b]\\&=g_j^{(k)}(\zeta)+\rho_ja_1(z_j+\rho_j\zeta)g_j^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+\rho_j^ka_k(z_j+\rho_j\zeta)g_j(\zeta)-ag_j^n(\zeta)-\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}b\\&\longrightarrow g^{(k)}(\zeta)-ag^n(\zeta).\end{aligned}$$

我们断言 $g^{(k)}(\zeta)-ag^n(\zeta)\not\equiv 0$, 否则 $g^{(k)}(\zeta)\equiv ag^n(\zeta)$, 那么 $g(\zeta)\neq 0,\infty$, $g(\zeta)$ 为整函数, 根据引理 2.2, $g(\zeta)$ 的级至多为 1, 那么 $g(\zeta)=\mathrm{e}^{c\zeta+d}$, 其中 $c(\neq 0)$, d 是两个有穷复数. 又

$$g^{(k)}(\zeta)-ag^n(\zeta)=\mathrm{e}^{c\zeta+d}[c^k-a\mathrm{e}^{(n-1)(c\zeta+d)}]\equiv 0.$$

因此, 我们可以得到 $\mathrm{e}^{(n-1)(c\zeta+d)}\equiv\frac{c^k}{a}$, 矛盾.

根据引理 2.5, $g^{(k)}(\zeta)-ag^n(\zeta)$ 至少有 $n-k-1$ 个判别的零点. 假设 $\zeta_l(1\leqslant l\leqslant n-k-1)$ 是 $g^{(k)}(\zeta)-ag^n(\zeta)$ 的 $n-k-1$ 个判别的零点, 取 $\delta(>0)$ 足够小, 使得 $D(\zeta_l,\delta)(1\leqslant l\leqslant n-k-1)$ 两两不相交, 这里 $D(\zeta_l,\delta)=\{|\zeta-\zeta_l|<\delta\}$. 由 Hurwitz's 定理知, 存在

$$\zeta_l^j(\in D(\zeta_l,\delta))\longrightarrow\zeta_l,\quad 1\leqslant l\leqslant n-k-1,$$

使得对于充分大的 j, 有

$$L(f_j)(z_j+\rho_j\zeta_l^j)-af_j^n(z_j+\rho_j\zeta_l^j)-b=0,\quad 1\leqslant l\leqslant n-k-1,$$

即 $L(f_j)-af_j^n-b$ 有 $n-k-1$ 个判别的零点, 而这与定理条件矛盾. 故 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

参　考　文　献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[3] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives [J]. *Ann Math*, 1959, 70:9–42.

[4] Hayman W K. Research problems in function theory [M]. London: Athlone Press, 1967.

[5] Drasin D. Normal families and the Nevanlinna theory [J]. *Acta Math*, 1969, 122(1):163–231.

[6] Langley J K. On normal families and a result of Drasin [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh*, 1984, 98(3–4):385–393.

[7] 李松鹰. 一类函数的正规定则 [J]. 福建师范大学学报: 自然科学版, 1984, 1:155–158.

[8] 李先进. 关于正规族的 Hayman 猜想的证明 [J]. 中国科学 A 辑, 1985, 28(1):24–31.

[9] 陈怀惠, 方明亮. 关于 f^nf' 的值分布 [J]. 中国科学 A 辑, 1995, 25(2): 121–127.

[10] Zalcman L. On some questions of Hayman [R]. Unpublished manuscript, 5pp, 1994.

[11] Ye Y S. A new normal criterion and its application [J]. *Chin Ann Math Ser A* (*Supplement*), 1991, 12:44–49.

[12] 庞学诚. 微分多项式的正规定则 [J]. 科学通报, 1988, 33(22):1690–1693.

[13] Schwick W. Normality criteria for families of meromorphic functions [J]. *J d'Analyse Math*, 1989, 52(1):241–289.

[14] Chen H H, Hua X H. Normal families of holomorphic functions [J]. *J Austral Math Soc Ser A*, 1995, 59(1):112–117.

[15] Ye Y S, Pang X C. On the zeros of a differential polynomial and normal families [J]. *J Math Anal Appl*, 1997, 205(1):32–42.

[16] Xu Y. Normal families of meromorphic functions [J]. *J Math,* 2001, 21(4):381–386.

[17] Ye Y S. A Picard type theorem and Bloch law [J]. *Chin Ann Math Ser B*, 1994, 15(1):75–80.

[18] Fang M L, Zalcman L. On value distribution of $f + a(f')^n$ [J]. *Sci China A*, 2008, 38(3):279–285.

[19] Xu Y, Wu F Q, Liao L W. Picard values and normal families of meromorphic functions [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh*, Sect, 2009, 139(5):1091–1099.

[20] Lei C L, Fang M L, Zeng C P. Some normality criteria of meromorphic functions [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2013, 33B(6):1667–1674.

[21] Zalcman L. Normal families: new perspectives [J]. *Bull Amer Math Soc*, 1998, 35:215–230.

Some Normal Criteria of Meromorphic Functions Limited the Numbers of Zeros

QIAN Xuexue[1] YE Yasheng[1] JIA Zhijing[1]

[1]College of Sciences, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China.

E-mail: 1714774700@qq.com; yashengye@aliyun.com; jiazhijing08@163.com

Abstract Let k,$n(\geqslant k+1)$ be two positive integers, $a(\neq 0)$, b be two finite complex numbers and $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in D. If for each function $f \in \mathcal{F}$, all zeros of f have multiplicity at least $k+1$, and $f + a(L(f))^n - b$ has at most $n-k-1$ distinct zeros in D, then $\mathcal{F}$ is normal in D, where $L(f) = f^{(k)}(z) + a_1 f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_{k-1}f'(z) + a_k f(z)$,$a_1(z), a_2(z), \cdots, a_k(z)$ are holomorphic functions in D.

Keywords Meromorphic function, Multiple zeros, Normal family

2000 MR Subject Classification 30D35

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 2, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA