数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(2):177–198
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0015

单调性条件下 G-Brown 运动驱动的倒向随机微分方程*

宋 阳[1]

提要 研究了由 G-Brown 运动驱动的倒向随机微分方程

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

解的存在唯一性问题. 其生成元 f 关于 z 是 Lipschitz 连续的, 关于 y 是线性增长且满足单调性条件.

关键词 G-Brown 运动, 倒向随机微分方程, 单调性条件
MR (2000) 主题分类 60H10, 60H30
中图法分类 O211.6
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)02-0177-22

1 引 言

自从 Peng[1] 引入 G-期望以来, 这个新的概念被人们广泛地研究. 在 G-期望的框架下, 与经典随机分析中 Brown 运动对应的模型被称作 G-Brown 运动, 它保留了经典概率论中 Brown 运动的诸多良好的性质, 同时有着自身的特色 — 不确定性. 正是这种特性, 使得 G-Brown 运动在含有奈特不确定性的金融研究中发挥了巨大的作用. 关于 G-Brown 运动的随机分析理论正在被人们建立起来, 包括 Itô公式, G-Brown 运动驱动的随机微分方程, G-鞅的表示定理以及 Girsanov 变换等理论. 其中, G-Brown 运动驱动的倒向随机微分方程 (G-BSDE) 理论备受关注. 在生成元是 Lipschitz 条件下时, G-BSDE 解的存在唯一性由 Hu 等人[2]解决.

本文将研究非 Lipschitz 条件下, G-BSDE

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t),\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{1.1}$$

解的存在唯一性问题. 本文考虑的生成元 f 关于 z 是 Lipschitz 连续的, 关于 y 是线性增长且满足单调性条件的. 在经典的 BSDE 理论中, Lepeltier 和 San Martin[3] 在生成元是连续且线性增长的情况下证明了 L^2 解的存在性. 此后, 在相同条件下, Chen[4] 证明了 $L^p(1<p\leqslant 2)$ 解的存在性, Fan 和 Jiang[5] 证明了 $L^p(p>2)$ 解的存在性. 他们工作的关键是构造了一列逼近序列. 正是由于 Hu 等[6]证明了 G-BSDE 的比较定理, 我们可以尝试构造类似逼近序列. 但是, 在 G-框架下, 我们缺少收敛定理. 本质上, 这是因为非对称鞅 K 的存在, 使得 $\|Z\|_{H_G^\alpha}$ 只能被 $\|Y\|_{S_G^\alpha}$ 而不是 $\|Y\|_{M_G^\alpha}$ 控制. 因此, 我们不能直接使用文 [3] 中使用的方法. 注意到二阶倒向随机微分方程 (2BSDE, 见文 [7]) 和 G-BSDE 之间的关系,

本文 2016 年 10 月 19 日收到, 2018 年 7 月 14 日收到修改稿.
[1]复旦大学数学科学学院, 上海 200433. E-mail: yangsong13@fudan.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11631004) 和上海市领军人才培养计划 (No. 14XD1400400) 的资助.

并且注意到 Possamai[8] 在 2BSDE 中的工作. 在 Possamai 的工作中, 他研究了 2BSDE 在单调性条件下的 L^2 解. 他的主要技术手段是使用容度理论中的单调收敛定理, 这个方法将帮助我们研究类似条件下 G-BSDE 的 $L^p(1<p<\infty)$ 解的理论.

本文安排如下: 第 2 节回顾 G-期望及容度理论; 第 3 节回顾在 Lipschitz 条件下, G-BSDE 解的理论, 并给出一些先验估计; 第 4 节给出在单调性条件下 G-BSDE 解的理论.

2 预备知识

2.1 容度理论

这一小节回顾容度理论中的一些知识, 更详细的内容读者可以参见文 [9].

设 Ω 是装备了距离 d 的完备分离空间, $\mathcal{B}(\Omega)$ 是 Ω 上的 Borel 集的 σ-代数, $\mathcal{M}$ 是 $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega))$ 上所有概率测度的集合, $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}$ 给定的子集.

(1) $L^0(\Omega)$: 所有 $\mathcal{B}(\Omega)$- 可测实函数的全体;

(2) $B_b(\Omega)$: $L^0(\Omega)$ 中所有的有界函数;

(3) $C_b(\Omega)$: $B_b(\Omega)$ 中所有的连续函数.

将 $\mathcal{B}(\Omega)$ 中的所有期望的上确界定义为容度:

$$c(A):=\sup_{P\in\mathcal{P}}P(A),\qquad A\in\mathcal{B}(\Omega).$$

定义 2.1 [9] 集合 A 是 Polar 的, 当且仅当 $c(A)=0$, 一个性质拟处处成立 (quasi-surely, 简记 q.s.) 当且仅当它在一个 Polar 集之外成立.

$\mathcal{P}$ 上的上期望 (见 [10]) 定义如下: 对 (Ω) 中使得 $E_P[X]$ 对每个 $P\in\mathcal{P}$ 都存在的 $X\in L^0(\Omega)$,

$$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}^{\mathcal{P}}[X]:=\sup_{P\in\mathcal{P}}E_p[X].$$

定理 2.1 [9] $\mathcal{P}$ 的上期望 $\mathbb{E}[\cdot]$ 在 $B_b(\Omega)$ 和 $C_b(\Omega)$ 上是次线性期望.

对于 $p>0$, 记

$\mathcal{L}^p:=\{X\in L^0(\Omega)\,:\,\mathbb{E}[|X|^p]=\sup\limits_{P\in\mathcal{P}}E_P[|X|^p]<\infty\}$;

$\mathcal{N}^p:=\{X\in L^0(\Omega)\,:\,\mathbb{E}[|X|^p]=0\}$;

$\mathcal{N}:=\{X\in L^0(\Omega)\,:\,X=0,\ c\text{-q.s.}\}$;

$\mathbb{L}^p:=\mathcal{L}^p/\mathcal{N}$.

$\mathcal{L}^p$ 和 $\mathcal{N}^p$ 是线性空间, 且对任意的 $p>0$, $\mathcal{N}^p=\mathcal{N}$. 对任意的 $p\geqslant 1$, $\mathbb{L}^p$ 是装备了范数 $\|X\|_p:=(\mathbb{E}[|X|]^p)^{\frac{1}{p}}$ 的 Banach 空间.

对装备了上述范数的空间 $\mathbb{L}^p$, $p\geqslant 1$, 记

$\mathbb{L}_b^p$ 是 $B_b(\Omega)$ 的完备化空间.

$\mathbb{L}_c^p$ 是 $C_b(\Omega)$ 的完备化空间.

定义 2.2 [9] 空间 Ω 到一个拓扑集合上的映射 X 被称作是拟连续的 (quasi-continuous, 简记 q.c.): 如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在一个开集 O 满足 $c(O)<\varepsilon$, 使得 $X|_{O^c}$ 是连续的.

定义 2.3 [9] 称泛函 $X\,:\,\Omega\to\mathbb{R}$ 有一个拟连续的版本, 如果存在一个拟连续的泛函 $Y\,:\,\Omega\to\mathbb{R}$, 使得 $X=Y$ q.s..

下列定理给出了 $\mathbb{L}_c^p$ 的详细刻画.

定理 2.2[9]　对任意的 $p>0$,

$$\mathbb{L}_c^p=\Big\{X\in\mathbb{L}^p : X\text{有一个拟连续版本},\ \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[|X|^p1_{\{|X|>n\}}]=0\Big\}.$$

下面给出容度理论中的单调收敛定理.

定理 2.3[9]　设 $\mathcal{P}$ 是弱紧的, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{L}_c^1$ 满足 $X_n\downarrow X$, q.s., 那么 $\mathbb{E}[X_n]\downarrow\mathbb{E}[X]$.

定义 2.4　称一族随机变量 $(X^P)_{P\in\mathcal{P}}$ 是 $\mathcal{P}$- 一致可积的, 如果

$$\lim_{C\to\infty}\sup_{P\in\mathcal{P}}E^P[|X^P|1_{\{|X^P|>C\}}]=0.$$

定理 2.3 的充分条件可以等价地被描述.

定理 2.4　设 $\mathcal{P}$ 是一族弱紧集, X_n 是一列 $\mathcal{P}$- 拟连续, $\mathcal{P}$- 一致可积的随机变量, 满足

$$X_n(\omega)\downarrow 0,\quad \forall\omega\in\Omega\backslash\mathcal{N},$$

那么

$$\sup_{P\in\mathcal{P}}E^P[X_n]\downarrow 0.$$

这个定理将会在接下来的证明中起到关键的作用.

2.2 G-Brown 运动

这一小节将会回顾 G-期望的基本理论, 更多细节读者可参见文 [1–2, 6, 11–13].

记 $\Omega=C_0^d(\mathbb{R}^+)$ 为 $[0,\infty)$ 上满足 $\omega_0=0$ 的实函数空间, 并配有最大模范数 p. 记 $B_t(\omega)=\omega_t$ 为点则过程. 对于每个固定的 $T\in[0,\infty)$, 记 $\Omega_T=\{\omega_{\cdot\wedge T}:\omega\in\Omega\}$. 易见 (Ω,p) 和 (Ω_T,p) 是分离的完备度量空间. 令

$$\mathcal{H}_T^0:=\{\varphi(B_{t_1},\cdots,B_{t_n}) : n\geqslant 1,\, t_1,\cdots,t_n\in[0,T],\quad \varphi\in C_{l.\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^{d\times n})\},$$

其中 $C_{l.\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实函数空间,

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant C(1+|x|^k+|y|^k)|x-y|,\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^n,$$

其中 k 和 C 仅依赖于 φ.

设 $(\Omega_T,\mathcal{H}_T^0,\widehat{\mathbb{E}})$ 为 G-期望空间. 这里字母 G 表示函数

$$G(A):=\frac{1}{2}\widehat{\mathbb{E}}[\langle AB_1,B_1\rangle] : \mathbb{S}_d\to\mathbb{R},$$

其中 $\mathbb{S}_d$ 表示 $d\times d$ 对称矩阵, 并且

$$\underline{\sigma}^2:=-\widehat{\mathbb{E}}[-B_1^2]\leqslant\widehat{\mathbb{E}}[B_1^2]=:\overline{\sigma}^2.$$

本文只考虑非退化的 G-正态分布, 即存在 $\underline{\sigma}^2>0$, 使得对于任意 $A\geqslant B$, $G(A)-G(B)\geqslant\underline{\sigma}^2\mathrm{tr}[A-B]$.

对 $\xi\in\mathcal{H}_T^0$ 和 $p\geqslant 1$, 定义 $\|\xi\|_{p,G}=(\widehat{\mathbb{E}}[|\xi|^p])^{\frac{1}{p}}$. 那么对于所有 $t\in[0,T]$, $\widehat{\mathbb{E}}_t[\cdot]$ 是 $\mathcal{H}_T^0$ 关于范数 $\|\cdot\|_{1,G}$ 的连续映射. 因此它可以被连续延拓到 $\mathcal{H}_T^0$ 在范数 $\|\cdot\|_{1,G}$ 下的完备化空间 $L_G^1(\Omega_T)$.

设 $L_{\mathrm{ip}}(\Omega_T):=\{\varphi(B_{t_1},\cdots,B_{t_n}) : n\geqslant 1,\, t_1,\cdots,t_n\in C_{b.\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^{d\times n})\}$, 其中 $C_{b.\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^{d\times n})$ 表示 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 上的有界 Lipschitz 函数全体. Denis 等[9]证明了在范数 $\|\cdot\|_{p,G}$ 下, $C_b(\Omega_T)$ 的完备化空间, $\mathcal{H}_T^0$ 的完备化空间和 $L_{\mathrm{ip}}(\Omega_T)$ 的完备化空间是相同的, 记做 $L_G^p(\Omega_T)$.

定义 2.5[11] 设 $M_G^0(0,T)$ 是下列条件过程的全体: 对于 $[0,T]$ 上的任一划分 $\pi_T=\{t_0,\cdots,t_N\}$,

$$\eta_t(\omega)=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(\omega)I_{[t_j,t_{j+1}]}(t),$$

其中 $\xi_i\in L_{\rm ip}(\Omega_{t_i}),\ i=0,1,2,\cdots,N-1$.

对 $p\geqslant 1$ 和 $\eta\in M_G^0(0,T)$, 令

$$\|\eta\|_{H_G^p}=\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|\eta_s|^2{\rm d}s\Big)^{\frac{2}{p}}\Big]\Big\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\eta\|_{M_G^p}=\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|\eta_s|^p{\rm d}s\Big]\Big\}^{\frac{1}{p}},$$

分别将 $H_G^p(0,T)$ 和 $M_G^p(0,T)$ 记做在范数 $\|\cdot\|_{H_G^p}$ 和 $\|\cdot\|_{M_G^p}$ 下 $M_G^0(0,T)$ 的完备化空间. 设 $S_G^0(0,T)=\{h(t,B_{t_1\wedge t},\cdots,B_{t_n\wedge t})\ :\ t_1,\cdots,t_n\in[0,T],\ h\in C_{b.{\rm Lip}}(\mathbb{R}^{n+1})\}$. 对 $p\geqslant 1$ 和 $\eta\in S_G^0(0,T)$, 令 $\|\eta\|_{S_G^p}=\big\{\widehat{\mathbb{E}}\big[\sup\limits_{t\in[0,T]}|\eta_t|^p\big]\big\}^{\frac{1}{p}}$. 记 $S_G^p(0,T)$ 为 $S_G^0(0,T)$ 在范数 $\|\cdot\|_{S_G^p}$ 下的完备化空间.

2.3 G-期望的概率表示和容度理论

Denis 等[9]给出了具体的 $\mathcal{P}_M$ 来表示 $\widehat{\mathbb{E}}$, 也就是对任意的 $X\in L_G^1(\Omega_T)$, 有

$$\widehat{\mathbb{E}}[X]=\sup_{P\in\overline{\mathcal{P}}_M}E_p[X].$$

注意到 $\mathcal{P}_M$ 是胎紧的, 因而 $\overline{\mathcal{P}}_M$ 是弱紧的.

简单起见, 我们只描述一维的情形, 即 $\Omega_T=C_0([0,T];\mathbb{R})$. 设 $(\Omega,\mathcal{F}^0,P^0)$ 为概率空间, $\{W_t\}$ 为 P^0 下的一维 Brown 运动, $F^0=\{\mathcal{F}_t^0\}$ 为由 $\{W_t\}$ 生成的强化流, $L_{F^0}^2([0,T];[\underline{\sigma},\overline{\sigma}])$ 为所有满足 $\underline{\sigma}\leqslant|h_s|\leqslant\overline{\sigma}$ 适应可测过程的全体.

Denis 等人[9]证明了

$$\mathcal{P}_M:=\Big\{P_h\ :\ P_h=P^0\circ X^{-1},\ X_t=\int_0^t h_s{\rm d}W_s,\ h\in L_{F^0}^2([0,T];[\underline{\sigma},\overline{\sigma}])\Big\}$$

表示了 $\widehat{\mathbb{E}}$.

Denis 等人[9]还证明了

$$L_G^p(\Omega_T)=\Big\{X\in\mathbb{L}^0(\Omega_T)\ :\ X\ \text{有一个 q.c. 版本},\ \lim_{n\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}[|X|^p1_{\{|X|>n\}}]=0\Big\}.$$

可以拓展定义 $\mathbb{L}^p(\Omega_t)$ 上的 G-期望 $\widehat{\mathbb{E}}$:

$$\widehat{\mathbb{E}}[X]=\sup_{P\in\overline{\mathcal{P}}_M}E_p[X],\quad\forall\,X\in\mathbb{L}^p(\Omega_t).$$

类似地, 可以拓展条件 G-期望. 设

$$\mathbb{L}_G^{0,p,t}(\Omega_T):=\Big\{\xi=\sum_{i=1}^n\eta_iI_{A_i}\ :\ A_i\in\mathcal{B}(\Omega_t),\ \eta_i\in L_G^p(\Omega),\ n\in\mathbb{N}\Big\},$$

通过定义

$$\widehat{\mathbb{E}}_s\Big[\sum_{i=1}^n\eta_iI_{A_i}\Big]:=\sum_{i=1}^n\widehat{\mathbb{E}}_s[\eta_i]I_{A_i},\qquad s\geqslant t.$$

可以给出相应的条件 G-期望, 仍然记做 $\widehat{\mathbb{E}}_s[\cdot]$.

命题 2.1 [2] 对任一 $\xi,\eta\in\mathbb{L}_G^{0,1,t}(\Omega_T)$, 有

(1) 单调性: 如果 $\xi\leqslant\eta$, 那么对于任意的 $s\geqslant t$, 有 $\widehat{\mathbb{E}}_s[\xi]\leqslant\widehat{\mathbb{E}}_s[\eta]$;

(2) 常数保持性: 如果 $\xi\in\mathbb{L}_G^{0,1,t}(\Omega_t)$, 那么 $\widehat{\mathbb{E}}_t[\xi]=\xi$;

(3) 次可加性: 对于任意的 $s\geqslant t$, 有 $\widehat{\mathbb{E}}_s[\xi+\eta]\leqslant\widehat{\mathbb{E}}_s[\xi]+\widehat{\mathbb{E}}_s[\eta]$;

(4) 正齐次性: 如果 $\xi\in\mathbb{L}_G^{0,1,t}(\Omega_t)$ 且 $\xi\geqslant 0$, 那么 $\widehat{\mathbb{E}}_t[\xi\eta]=\xi\widehat{\mathbb{E}}_t[\eta]$;

(5) 相容性: 对于任意的 $t\leqslant s\leqslant r$, 有 $\widehat{\mathbb{E}}_s[\widehat{\mathbb{E}}_r[\xi]]=\widehat{\mathbb{E}}_s[\xi]$;

(6) $\widehat{\mathbb{E}}[\widehat{\mathbb{E}}_t[\xi]]=\widehat{\mathbb{E}}[\xi]$.

记 $\mathbb{L}_G^{p,t}(\Omega_T)$ 为 $\mathbb{L}_G^{0,p,t}(\Omega_T)$ 在范数 $(\widehat{\mathbb{E}}[|\cdot|^p])^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间. 条件 G-期望可以被连续拓展到 $\mathbb{L}_G^{p,t}(\Omega_T)$ 上. 设

$$\mathbb{M}^{p,0}(0,T):=\Big\{\eta_t=\sum_{i=0}^{N-1}\xi_{t_i}I_{[t_i,t_{i+1})}(t)\,:\,0=t_0<\cdots<t_N=T,\,\xi_{t_i}\in\mathbb{L}^p(\Omega_{t_i})\Big\}.$$

对 $p\geqslant 1$, 记

(1) $\mathbb{M}^p(0,T)$ 为 $\mathbb{M}^{p,0}(0,T)$ 在范数 $\|\eta\|_{\mathbb{M}^p}=\big\{\widehat{\mathbb{E}}\big[\int_0^T|\eta_s|^p\mathrm{d}s\big]\big\}^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间;

(2) $\mathbb{H}^p(0,T)$ 为 $\mathbb{M}^{p,0}(0,T)$ 在范数 $\|\eta\|_{\mathbb{H}^p}=\big\{\widehat{\mathbb{E}}\big[(\int_0^T|\eta_s|^2\mathrm{d}s)^{\frac{2}{p}}\big]\big\}^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间;

(3) $\mathbb{S}^p(0,T)$ 为 $\mathbb{M}^{p,0}(0,T)$ 在范数 $\|\eta\|_{\mathbb{S}^p}=\big\{\widehat{\mathbb{E}}\big[\sup\limits_{t\in[0,T]}|\eta_t|^p\big]\big\}^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间.

另外, 注意到

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big|\int_0^T\eta_t(\omega)\mathrm{d}t\Big|\Big]\leqslant\int_0^T\widehat{\mathbb{E}}[|\eta_t|]\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

根据文 [12], 当 $p\geqslant 1$ 时, 对任意的 $\eta\in\mathbb{H}^p(0,T)$, 我们可以定义 Itô积分 $\int_0^T\eta_s\mathrm{d}B_s$. 更进一步, Burkholder-Davis-Gundy 型的不等式成立.

命题 2.2 [12] 当 $\alpha\geqslant 1$ 且 $p>0$ 时, 对任意的 $\eta,\,\theta\in\mathbb{H}^\alpha(0,T)$ 和 $\xi\in\mathbb{L}^\infty(\Omega_t)$, 有

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T\eta_s\mathrm{d}B_s\Big]&=0,\\ \underline{\sigma}^pc_p\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|\eta_s|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{2}{p}}\Big]&\leqslant\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t\eta_s\mathrm{d}B_s|^p\Big]\\ &\leqslant\overline{\sigma}^pc_p\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|\eta_s|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{2}{p}}\Big],\\ \int_t^T(\xi\eta_s+\theta_s)\mathrm{d}B_s&=\xi\int_t^T\eta_s\mathrm{d}B_s+\int_t^T\theta_s\mathrm{d}B_s,\end{aligned}$$

其中 $0<c_p<C_p<\infty$ 为常数.

定义 2.6 [11] 取值在 $L_G^1(\Omega_T)$ 的过程 $\{M_t\}$ 称作 G-鞅, 如果对于任意的 $s\leqslant t,\widehat{\mathbb{E}}_s[M_t]=M_s$.

对于 $\xi\in L_{\mathrm{ip}}(\Omega_T)$, 记 $\mathcal{E}[\xi]=\widehat{\mathbb{E}}\big[\sup\limits_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t[\xi]\big]$. 对于 $p\geqslant 1$ 和 $\xi\in L_{\mathrm{ip}}(\Omega_T)$, 定义 $\|\xi\|_{p,\mathcal{E}}=\{\mathcal{E}[|\xi|^p]\}^{\frac{1}{p}}$, 并记 $L_{\mathcal{E}}^\alpha(\Omega_T)$ 为 $L_{\mathrm{ip}}(\Omega_T)$ 在范数 $\|\xi\|_{p,\mathcal{E}}$ 下的完备化空间.

下面的估计给出了 $L_G^\alpha(\Omega_T)$ 和 $L_{\mathcal{E}}^\alpha(\Omega_T)$ 之间的关系.

定理 2.5[14] 对任意的 $\alpha\geqslant 1$ 和 $\delta>0$, 有 $L_G^{\alpha+\delta}(\Omega_T)\subset L_{\mathcal{E}}^{\alpha}(\Omega_T)$. 更明确地, 对任意 $1<\gamma<\beta:=(\alpha+\delta)/\alpha$, $\gamma\leqslant 2$ 和对所有的 $\xi\in L_{\mathrm{ip}}(\Omega_T)$, 有

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t[|\xi|^{\alpha}]\Big]\leqslant C\{(\widehat{\mathbb{E}}[|\xi|^{\alpha+\delta}])^{\frac{\alpha}{\alpha+\delta}}+(\widehat{\mathbb{E}}[|\xi|^{\alpha+\delta}])^{\frac{1}{\gamma}}\},\tag{2.2}$$

其中 $C=\frac{\gamma}{\gamma-1}\big(1+14\sum\limits_{i=1}^{\infty}i^{-\frac{\beta}{\gamma}}\big)$.

3 G-Brown 运动驱动的倒向随机微分方程

研究如下形式的 G-BSDE

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t).\tag{3.1}$$

为方便阅读, 建立下列记号, 记 $\mathfrak{G}_G^{\alpha}(0,T)$ 为满足 $Y\in S_G^{\alpha}(0,T)$, $Z\in H_G^{\alpha}(0,T)$, K 是非增 G-鞅, 且满足 $K_0=0$ 和 $K_T\in L_G^{\alpha}(\Omega_T)$ 的过程 (Y,Z,K) 的全体.

定义 3.1[2] 设 $\xi\in L_G^{\beta}(\Omega_T)$, $\beta>1$, 如果对某个 $\alpha\in(1,\beta)$, 下列性质成立:

(a) $(Y,Z,K)\in\mathfrak{G}_G^{\alpha}(0,T)$;

(b) $Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t)$,

那么三元组 (Y,Z,K) 称作是方程 (3.1) 的解.

3.1 Lipschitz 条件下的 G-BSDE

Hu 等人[2, 6]考虑了生成元

$$f\,:\,[0,T]\times\Omega_T\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},$$

满足下列性质的情况:

(H1) 对任意的 y,z, $f(\cdot,\cdot,y,z)\in M_G^{\beta}(0,T)$;

(H2) 存在常数 $L>1$, 使得 $|f(t,\omega,y,z)-f(t,\omega,y',z')|\leqslant L(|y-y'|+|z-z'|)$.

当假设 (H1) 和 (H2) 满足时, 他们证明了 G-BSDE (3.1) 的解的存在唯一性.

定理 3.1[2] 对某个 $\beta>1$, 假设 $\xi\in L_G^{\beta}(\Omega_T)$ 和 f 满足 (H1) 和 (H2), 那么方程 (3.1) 有唯一解 (Y,Z,K). 更进一步地, 对任意 $\alpha\in(1,\beta)$, 有 $Y\in S_G^{\alpha}(0,T)$, $Z\in H_G^{\alpha}(0,T)$ 且 $K_T\in L_G^{\alpha}(\Omega_T)$.

他们还证明了 G-BSDE 的比较定理, 见文 [6].

定理 3.2[6] 设 $(Y_t^i,Z_t^i,K_t^i)_{t\leqslant T}$, $i=1,2$, 当 $\beta>1$ 时, 是下列 G-BSDEs

$$Y_t^i=\xi^i+\int_t^T f_i(s,Y_s^i,Z_s^i)\mathrm{d}s+\int_t^T g_i(s,Y_s^i,Z_s^i)\mathrm{d}\langle B\rangle_s-\int_t^T Z_s^i\mathrm{d}B_s-(K_T^i-K_t^i)$$

的解, 其中 $\xi^i\in L_G^{\beta}(\Omega_T)$, f_i, g_i 满足 (H1) 和 (H2). 如果 $\xi^1\geqslant\xi^2$, $f_1\geqslant f_2$ 且 $g_1\geqslant g_2$, 那么 $Y_t^1\geqslant Y_t^2$.

注 3.1 从定理 3.2 的证明过程 (见 [6]) 可以看出, 条件 $f_1\geqslant f_2$ 和 $g_1\geqslant g_2$ 可以放松为 $f_1(Y_t^2,Z_t^2)\geqslant f_2(Y_t^2,Z_t^2)$ 和 $g_1(Y_t^2,Z_t^2)\geqslant g_2(Y_t^2,Z_t^2)$.

3.2 先验估计

在这一节中, 整理并证明了一些引理和先验估计, 它们将在后面的证明中用到.

下面的部分结果来自于文 [2, 6].

引理 3.1 [2] 给定 $\alpha>1$ 和 $\alpha^*=\frac{\alpha}{\alpha-1}$, 令 $X\in S_G^\alpha(0,T)$. 如果 K^j 是非增 G-鞅且满足 $K_0^j=0$ 和 $K_T^j\in L_G^{\alpha^*}(\Omega_T)$, $j=1,2$, 那么下面过程

$$\int_0^t X_s^+\mathrm{d}K_s^1+\int_0^t X_s^-\mathrm{d}K_s^2$$

也是非增 G-鞅.

引理 3.2 [2] 给定 $\beta>1$, 设 f 满足 (H1) 和 (H2). 若

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t),$$

其中对于某个 $\alpha\in(1,\beta]$, 有 $Y\in\mathbb{S}^\alpha(0,T)$, $Z\in\mathbb{H}^\alpha(0,T)$, K 为满足 $K_0=0$ 的非增过程且 $K_T\in\mathbb{L}^\alpha(\Omega_T)$, 那么存在一个常数 $C_\alpha:=C(\alpha,T,\underline{\sigma},L^w)>0$, 使得

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|Z_s|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\Big]\leqslant C_\alpha\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^\alpha\Big]+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^\alpha\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}\times\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T f_s^0\mathrm{d}s\Big)^\alpha\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\},$$

$$\widehat{\mathbb{E}}[|K_T|^\alpha]\leqslant C_\alpha\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^\alpha\Big]+\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T f_s^0\mathrm{d}s\Big)^\alpha\Big]\Big\},$$

其中 $f_s^0=|f(s,0,0)|+L^w\varepsilon$.

引理 3.3 [2] 给定 $\beta>1$, 设 $\{f_i\}_{i=1,2}$ 满足 (H1) 和 (H2). 若

$$Y_t^i=\xi^i+\int_t^T f_i(s,Y_s^i,Z_s^i)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s^i\mathrm{d}B_s-(K_T^i-K_t^i),$$

其中, 对于某个 $\alpha\in(1,\beta]$, 有 $Y^i\in\mathbb{S}^\alpha(0,T)$, $Z^i\in\mathbb{H}^\alpha(0,T)$, K 为满足 $K_0=0$ 的非增过程且 $K_T\in\mathbb{L}^\alpha(\Omega_T)$. 令 $\widehat{Y}_t=Y_t^1-Y_t^2$, $\widehat{Z}_t=Z_t^1-Z_t^2$ 以及 $\widehat{K}_t=K_t^1-K_t^2$, 那么存在常数 $C_\alpha:=C(\alpha,T,\underline{\sigma},L^w)>0$, 使得

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\Big]\leqslant C_\alpha\Big\{\|\widehat{Y}\|_{\mathbb{S}^\alpha}^\alpha+\|\widehat{Y}\|_{\mathbb{S}^\alpha}^{\frac{\alpha}{2}}\sum_{i=1}^2\Big[\|Y^i\|_{\mathbb{S}^\alpha}^{\frac{\alpha}{2}}+\|\int_0^T f_s^{i,0}\mathrm{d}s\|_{\alpha,G}^{\frac{\alpha}{2}}\Big]\Big\},$$

其中 $f_s^{i,0}=|f_i(s,0,0)|+L^w\varepsilon,\ i=1,2$.

引理 3.4 [2] 给定 $\beta>1$, 设 $\xi\in L_G^\beta(\Omega_T)$, 设 f 满足 (H1) 和 (H2). 对某个 $\alpha\in(1,\beta)$, 设 $(Y,Z,K)\in\mathfrak{G}_G^\alpha(0,T)$ 是方程 (3.1) 的解. 那么对于给定的 $\alpha'\in(\alpha,\beta)$, 存在一个仅依赖于 α,α',T,L^w 和 $\underline{\sigma}$ 的常数 C, 使得

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^\alpha\Big]\leqslant C\Big\{&\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t[|\xi|^\alpha]\Big]\\&+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\Big(\int_0^T f_s^0\mathrm{d}s\Big)^{\alpha'}\Big]\Big]\Big)^{\frac{\alpha}{\alpha'}}\\&+\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\Big(\int_0^T f_s^0\mathrm{d}s\Big)^{\alpha'}\Big]\Big]\Big\},\end{aligned}$$

其中 $f_s^0=|f(s,0,0)|+L^w\varepsilon$.

引理 3.5 给定 $\beta>1$, 设 $\xi\in L_G^{\beta}(\Omega_T)$. 若对于某个 $\alpha\in(1,\beta)$, $(Y,Z,K)\in\mathfrak{G}_G^{\alpha}(0,T)$ 是方程 (3.1) 的解, 那么对任意给定的 $\alpha'\in(\alpha,\beta)$, 存在仅依赖于 α, α', T, 和 γ 的常数 C, 使得

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^{\alpha}\Big]\leqslant C\Big\{(\widehat{\mathbb{E}}[|\xi|^{\alpha'}])^{\frac{\alpha}{\alpha'}}+(\widehat{\mathbb{E}}[|\xi|^{\alpha'}])^{\frac{1}{\gamma}}+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|Y_s|^{\alpha-1}|f(s)|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big]\Big)^{\frac{\alpha}{\alpha'}}+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|Y_s|^{\alpha-1}|f(s)|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big]\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\Big\},$$

其中 $1<\gamma<\frac{\alpha'}{\alpha}$ 且 $\gamma\leqslant 2$.

证 任取 $\varepsilon>0$, 令 $\widetilde{Y}_t=|Y_t|^2+\varepsilon_\alpha$, 其中 $\varepsilon_\alpha=\varepsilon\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)^{+}$, 对 $\widetilde{Y}_t^{\frac{\alpha}{2}}$ 在 $[t,T]$ 上使用 Itô公式, 有

$$\begin{aligned}&\widetilde{Y}_t^{\frac{\alpha}{2}}+\frac{\alpha}{2}\int_t^T\widetilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{2}-1}Z_s^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\&=(|\xi|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}+\alpha\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)\int_t^T\widetilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{2}-2}Y_s^2Z_s^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\&\quad+\int_t^T\alpha\widetilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{2}-1}Y_sf(s)\mathrm{d}s-\int_t^T\alpha\widetilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{2}-1}(Y_sZ_s\mathrm{d}B_s+Y_s\mathrm{d}K_s)\\&\leqslant(|\xi|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}+\alpha\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)\int_t^T\widetilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{2}-1}Z_s^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\&\quad+\int_t^T\alpha\widetilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}|f(s)|\mathrm{d}s-(M_T-M_t),\end{aligned}$$

其中 $f(s)=f(s,Y_s,Z_s)$,

$$M_t=\int_0^t\alpha\widetilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{2}-1}Y_sZ_s\mathrm{d}B_s+\int_0^t\alpha\widetilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{2}-1}Y_s^{+}\mathrm{d}K_s.$$

因为 $\alpha>1$, 故

$$\frac{\alpha}{2}>\alpha\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big),$$

从而

$$\widetilde{Y}_t^{\frac{\alpha}{2}}+(M_T-M_t)\leqslant(|\xi|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}+\int_t^T\alpha\widetilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}|f(s)|\mathrm{d}s,$$

由引理 3.1, M 是 G-鞅, 因此取 G-条件期望, 有

$$\widetilde{Y}_t^{\frac{\alpha}{2}}\leqslant\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[(|\xi|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}+\alpha\int_t^T\widetilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}|f(s)|\mathrm{d}s\Big].$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$, 得到

$$|Y_t|^{\alpha}\leqslant\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[(|\xi|^{\alpha}+\alpha\int_t^T|Y_s|^{\alpha-1}|f(s)|\mathrm{d}s\Big].$$

由此, 得

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^{\alpha}\Big]&\leqslant\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[(|\xi|^{\alpha}+\alpha\int_t^T|Y_s|^{\alpha-1}|f(s)|\mathrm{d}s\Big]\Big)\\&\leqslant\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[(|\xi|^{\alpha}+\alpha\int_0^T|Y_s|^{\alpha-1}|f(s)|\mathrm{d}s\Big]\Big).\end{aligned}$$

根据定理 2.5, 获得了

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^\alpha\Big]\leqslant C\Big\{(\widehat{\mathbb{E}}[|\xi|^{\alpha'}])^{\frac{\alpha}{\alpha'}}+(\widehat{\mathbb{E}}[|\xi|^{\alpha'}])^{\frac{1}{\gamma}}+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|Y_s|^{\alpha-1}|f(s)|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big]\Big)^{\frac{\alpha}{\alpha'}}+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|Y_s|^{\alpha-1}|f(s)|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big]\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\Big\},$$

其中 $1<\gamma<\frac{\alpha'}{\alpha}$ 且 $\gamma\leqslant 2$.

引理 3.6　给定 $\beta>1$, 设 $\xi^i\in L_G^\beta(\Omega_T)$. 若对于某个 $\alpha\in(1,\beta)$, $(Y^i,Z^i,K^i)\in\mathfrak{S}_G^\alpha(0,T)$ 是方程 (3.1) 关于 ξ^i 和 f^i, $i=1,2$ 的解, 令 $\widehat{\xi}=\xi_1-\xi_2$, $\widehat{Y}_t=Y_t^1-Y_t^2$, $\widehat{Z}_t=Z_t^1-Z_t^2$ 和 $\widehat{K}_t=K_t^1-K_t^2$, 那么对任意给定的 $\alpha'\in(\alpha,\beta)$, 存在仅依赖于 α, α', T, 和 γ 的常数 C, 使得

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|\widehat{Y}_t|^\alpha\Big]\leqslant C\Big\{(\widehat{\mathbb{E}}[|\widehat{\xi}|^{\alpha'}])^{\frac{\alpha}{\alpha'}}+(\widehat{\mathbb{E}}[|\widehat{\xi}|^{\alpha'}])^{\frac{1}{\gamma}}+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|\widehat{Y}_s|^{\alpha-1}|\widehat{f}(s)|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big]\Big)^{\frac{\alpha}{\alpha'}}+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|\widehat{Y}_s|^{\alpha-1}|\widehat{f}(s)|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big]\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\Big\},$$

其中 $\widehat{f}(s)=f_1(s,Y_s^1,Z_s^1)-f_2(s,Y_s^2,Z_s^2)$.

证　任给 $\varepsilon>0$, 对 $(|\widehat{Y}|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}$ 在 $[t,T]$ 上使用 Itô公式, 其中 $\varepsilon_\alpha=\varepsilon\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)^+$, 有

$$\begin{aligned}&(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}+\frac{\alpha}{2}\int_t^T(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Z}_s^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\
=&(|\widehat{\xi}|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}+\alpha\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)\int_t^T(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-2}\widehat{Y}_s^2\widehat{Z}_s^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\
&+\int_t^T\alpha(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s\widehat{f}(s)\mathrm{d}s-\int_t^T\alpha(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\mathrm{d}B_s\\
&-(\int_t^T\alpha(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s\mathrm{d}(K_s^1-K_s^2)\\
\leqslant&(|\widehat{\xi}|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}+\alpha\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)\int_t^T(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Z}_s^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\
&+\int_t^T\alpha(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s\widehat{f}(s)\mathrm{d}s-\int_t^T\alpha(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\mathrm{d}B_s\\
&-(J_T-J_t),\end{aligned}$$

其中

$$J_t=\int_0^t\alpha(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}(\widehat{Y}_s^+\mathrm{d}K_s^1+\widehat{Y}_s^-\mathrm{d}K_s^2).$$

由引理 3.1 知, J_t 是 G- 鞅. 因为 $\alpha>1$, 故

$$\frac{\alpha}{2}>\alpha\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big),$$

从而可以移项消去关于二次变差的积分项,

$$(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}+(J_T-J_t)+\int_t^T \alpha(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\mathrm{d}B_s$$
$$\leqslant(|\widehat{\xi}|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}+\int_t^T \alpha(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s\widehat{f}(s)\mathrm{d}s.$$

再取条件 G-期望并令 $\varepsilon\downarrow 0$, 有

$$|\widehat{Y}_t|^\alpha\leqslant\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[(|\widehat{\xi}|^\alpha+\alpha\int_t^T|\widehat{Y}_s|^{\alpha-1}|\widehat{f}(s)|\mathrm{d}s\Big].$$

根据与引理 3.5 相同的推导过程, 得到

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|\widehat{Y}_t|^\alpha\Big]\leqslant C\Big\{(\widehat{\mathbb{E}}[|\widehat{\xi}|^{\alpha'}])^{\frac{\alpha}{\alpha'}}+(\widehat{\mathbb{E}}[|\widehat{\xi}|^{\alpha'}])^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$+\Big(\widehat{\mathbb{E}}[(\int_0^T|\widehat{Y}_s|^{\alpha-1}|\widehat{f}(s)|\mathrm{d}s)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}]\Big)^{\frac{\alpha}{\alpha'}}+\Big(\widehat{\mathbb{E}}[(\int_0^T|\widehat{Y}_s|^{\alpha-1}|\widehat{f}(s)|\mathrm{d}s)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}]\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\Big\}.$$

定理 3.3 [6] (Gronwall 不等式) 设 $(Y_t)_{t\leqslant T}\in S_G^1(0,T)$ 满足

$$Y_t\leqslant\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\xi+\int_t^T f(s,Y_s)\mathrm{d}s+\int_t^T g(s,Y_s)\mathrm{d}\langle B\rangle_s\Big],$$

其中 $\xi\in L_G^1(\Omega)$, $\{f(s,y)\}_{s\in[0,T]}\in M_G^1(0,T)$ 且 $\{g(s,y)\}_{s\in[0,T]}\in M_G^1(0,T)$. 对任给的 $y\in\mathbb{R}$, f 和 g 满足关于 y 的 Lipschitz 条件, 对任意的 $y_1\leqslant y_2$, $f(\cdot,y_1)\leqslant f(\cdot,y_2)$ 且 $g(\cdot,y_1)\leqslant g(\cdot,y_2)$, 那么 $Y_t\leqslant\widetilde{Y}_t$, 其中 $(\widetilde{Y}_t)_{t\leqslant T}$ 是下列 G-BSDE 的解:

$$\widetilde{Y}_t\leqslant\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\xi+\int_t^T f(s,\widetilde{Y}_s)\mathrm{d}s+\int_t^T g(s,\widetilde{Y}_s)\mathrm{d}\langle B\rangle_s\Big].$$

特别地, 如果对 $a_s\geqslant 0$, $c_s\geqslant 0$, 有 $f(s,y)=a_sy+m_s$, $g(s,y)=c_sy+n_s$, 那么

$$Y_t\leqslant(X_t)^{-1}\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[X_T\xi+\int_t^T m_sX_s\mathrm{d}s+\int_t^T n_sX_s\mathrm{d}\langle B\rangle_s\Big],$$

这里 $X_t=\exp\big(\int_0^t a_s\mathrm{d}s+\int_0^t c_s\mathrm{d}\langle B\rangle_s\big)$.

4 单调性条件下的 *G*-BSDE

我们将继续研究如下形式的 G-BSDE

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{4.1}$$

在本文中, 对生成元 f 作如下假设.

假设 4.1

(i) 对任意的 y,z, $f(\cdot,\cdot,y,z)\in M_G^\beta(0,T)$, $\beta>1$;

(ii) f 在最大模范数下关于 ω 一致连续;

(iii) f 关于 z 是 Lipschitz 连续的, 存在常数 $C>0$, 对 $\forall(t,\omega,y,z,z')$, 有

$$|f(t,\omega,y,z)-f(t,\omega,y,z')|\leqslant C|z-z'|;$$

(vi) f 关于 y 一致连续, 并且满足线性增长条件, 存在常数 $C>0$, 对 $\forall(t,\omega,y,z)$, 有

$$|f(t,\omega,y,z)|\leqslant|f(t,\omega,0,z)|+C(1+|y|);$$

(v) 存在 $\mu \geqslant 0$, 使得对 $\forall (t,\omega,y,y',z)$, 有

$$(y-y')(f(t,\omega,y,z)-f(t,\omega,y',z)) \leqslant \mu |y-y'|^2.$$

下面的引理刻画了线性增长函数的 Lipschitz 逼近, 即任意的线性增长函数都可以用一族 Lipschitz 连续函数逼近. 在经典框架下, 这个逼近是研究线性增长生成元的关键, 参见文 [3].

定义

$$f_n(t,y,z) := \inf_{u\in\mathbb{Q}} \{f(t,u,z)+n|y-z|\},$$

由于连续性假设, 下确界在有理数集上取和在实数集上取是一样的, 同时也保证了函数的可测性.

引理 4.1　设假设 4.1 满足, 那么 f_n 是良好定义的, 且满足

(1) f_n 关于 y 是线性增长的, 对 $\forall (t,\omega,y,z)$, 有

$$|f_n(t,\omega,y,z)| \leqslant |f(t,\omega,0,z)| + C(1+|y|);$$

(2) f_n 关于 z 是一致 Lipschitz 连续的, 对 $\forall (t,\omega,y,z,z')$, 有

$$|f(t,\omega,y,z)-f(t,\omega,y,z')| \leqslant C|z-z'|;$$

(3) f_n 关于 y 是 Lipschitz 连续的, 对 $\forall (t,\omega,y,y',z)$, 有

$$|f(t,\omega,y,z)-f(t,\omega,y',z)| \leqslant n|y-y'|;$$

(4) $\forall (t,\omega,y,z)$, 序列 $(f_n(t,\omega,y,z))_n$ 关于 n 是单调递增的;

(5) 如果 f 关于 y 非增, 那么 f_n 关于 y 也非增.

证　(1)–(4) 参见文 [3] 的引理 1, 这是文 [15] 中结论的拓展. 我们仅证明 (5).

对任意的 $y' > y$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 y_ε, 使得

$$\begin{aligned} f_n(t,\omega,y,z)+\varepsilon &= f(t,\omega,y_\varepsilon,z)+n|y-y_\varepsilon| \\ &\geqslant f(t,\omega,y_\varepsilon+y'-y,z)+n|y'-(y_\varepsilon+y'-y)| \\ &\geqslant f_n(t,\omega,y',z). \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$, 有性质 5.

注 4.1　如果 f 关于 y 单调递减, 那么 f_n 也可以表示成

$$f_n(t,y,z) := \inf_{u\in\mathbb{Q},u\geqslant y} \{f(t,u,z)+n|y-z|\}.$$

定义如下的量:

$$\widetilde{f}_t^n := \sup_{(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \{f(t,y,z)-f_n(t,y,z)\}. \tag{4.2}$$

我们有如下的结果. 这是文 [8] 中的引理 3.3 的特殊情况.

引理 4.2　设假设 4.1 满足, 那么对所有 $0 \leqslant t \leqslant T$, 序列 $\widetilde{f}_t^n$ 关于 (y,z) 全局一致收敛, 并且对于任意 $p>2$, 有

$$\mathbb{E}[|\widetilde{f}_t^n|^p] \leqslant C, \tag{4.3}$$

其中 C 不依赖于 n.

证 注意到 G-期望的容度表示, 可以沿用文 [8] 中的引理 3.3 的证明. 一致收敛的结果来自于文 [16] 中第四页的定理和第五页的注 (iv). 由于 f 关于 y 一致连续, 故存在关于 y 线性增长的连续模 ρ, 使得

$$\begin{aligned}&f(t,y,z)-f_n(t,y,z)\\=&\sup_{u\in\mathbb{Q},u\geqslant y}\{f(t,y,z)-f(t,u,z)-n|y-u|\}\\\leqslant&\sup_{u\in\mathbb{Q},u\geqslant y}\{C\rho(|y-u|)-n|y-u|\}\\=&\sup_{u\geqslant 0}\{C\rho(u)-nu\}.\end{aligned}$$

由于 ρ 关于 y 线性增长, 上式的最后一项一定是递减的, 因而被一个常数控制住.

引理 4.3 设 $\lambda>0$, 那么 (Y_t,Z_t,K_t) 是 G-BSDE(4.1) 的解, 当且仅当

$$\Big(\mathrm{e}^{\lambda t}Y_t,\mathrm{e}^{\lambda t}Z_t,\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}K_t\Big)$$

是下列 G-BSDE

$$\begin{aligned}Y_t=\mathrm{e}^{\lambda T}\xi+&\int_t^T\{\mathrm{e}^{\lambda s}f(s,\mathrm{e}^{-\lambda s}Y_s,\mathrm{e}^{-\lambda s}Z_s)-\lambda Y_s\}\mathrm{d}s\\&-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t),\quad 0\leqslant t\leqslant T\end{aligned}\tag{4.4}$$

的解.

证 由 Itô公式, 两个方程的等价性易见. 只需证明 $\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}K_t$ 是递降的 G-鞅. 非降由被积函数大于 0 可知, 鞅性由文 [2] 的引理 3.4 可知. 引理 4.3 证毕.

若取 $\lambda=\mu$, 那么生成元 $f^\mu:=\mathrm{e}^{\lambda t}f(s,\mathrm{e}^{-\lambda t}y,\mathrm{e}^{-\lambda t}z)-\lambda y$ 满足对 $\forall(t,\omega,y,y',z)$, 有

$$(y-y')(f^\mu(t,\omega,y,z)-f^\mu(t,\omega,y',z))\leqslant 0.$$

作为引理 4.3 的推论, 不失一般性, 可以设生成元关于变量 y 是单调递减的. 从现在起这个假设将取代假设 4.1 中的 (v).

对于给定的 n, 考虑如下的 G-BSDE

$$Y_t^n=\xi+\int_t^T f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s^n\mathrm{d}B_s-(K_T^n-K_t^n),\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

当 $\xi\in L_G^\beta(\Omega_T)$, 由文 [2] 中的结果, 对 $1<\alpha<\beta$, 上述方程存在唯一解 $\mathfrak{S}_{\mathrm{G}}^\alpha(0,T)$.

定义线性方程

$$U_t=\xi+\int_t^T(|f(s,0,0)|+C(1+|U_t|+|V_t|))\mathrm{d}s-\int_t^T V_s\mathrm{d}B_s-(W_T-W_t),\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

其中 C 是假设 4.1 中的常数. 同样也存在唯一解. 根据比较定理, 对 $\forall n\geqslant m\geqslant C$, 有

$$Y^m\leqslant Y^n\leqslant U.\tag{4.5}$$

引理 4.4 对任意的 $1<\alpha<\beta$, 存在一个仅依赖于 C, T 和 $\widehat{\mathbb{E}}[\xi^\alpha]$ 的常数 A, 使得对 $\forall n\geqslant C$, 不等式

$$\|Y^n\|_{S_G^\alpha}\leqslant A,\quad \|Z^n\|_{H_G^\alpha}\leqslant A,\quad \|U\|_{S_G^\alpha}\leqslant A,\quad \|V\|_{H_G^\alpha}\leqslant A\tag{4.6}$$

成立.

证 由引理 3.2 和引理 3.4, 以及 (4.5) 可知, 存在一个仅依赖于 C, T 和 $\widehat{\mathbb{E}}[\xi^\alpha]$ 的常数 B, 使得

$$\sup_{n\geqslant C}\|Y^n\|_{S_G^\alpha}\leqslant B,\quad \|U\|_{S_G^\alpha}\leqslant B,\quad \|V\|_{H_G^\alpha}\leqslant B.$$

由引理 3.2, $\forall n\geqslant C$, 存在常数 $C_\alpha:=C(\alpha,T,\underline{\sigma})>0$, 使得

$$\|Z^n\|_{H_G^\alpha}^\alpha\leqslant C_\alpha\{\|Y^n\|_{S_G^\alpha}^\alpha+\|Y^n\|_{S_G^\alpha}^{\frac{\alpha}{2}}\times(CT)^{\frac{\alpha}{2}}\}.$$

令 $A=\max(B,\sqrt[\alpha]{C_\alpha([B+(CTB)^{\frac{\alpha}{2}}])})$, 我们证明了 (4.6).

引理 4.5 对任意的 $\alpha\in(1,\beta)$, 有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\widehat{\mathbb{E}}[|Y_t^n-Y_t^m|^\alpha]\to 0,\quad \text{当}\, n,\, m\to\infty.$$

证 首先证明 $\alpha\geqslant 2$ 的情况. 注意到 G-期望的概率表示, 用文 [8] 中引理 3.5 的方法来推导. 对 $|Y^n-Y^m|^\alpha$ 在 $[t,T]$ 上使用 Itô公式, 有

$$\begin{aligned}
&|Y_t^m-Y_t^n|^\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\int_t^T|Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha-2}|Z_s^m-Z_s^n|^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\
=&\,\alpha\int_t^T(Y_s^m-Y_s^n)|Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha-2}(f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_n(s,Y_s^n,Z_s^n))\mathrm{d}s\\
&-\alpha\int_t^T(Y_s^m-Y_s^n)|Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha-2}(Z_s^m-Z_s^n)\mathrm{d}B_s\\
&-\alpha\int_t^T(Y_s^m-Y_s^n)|Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha-2}\mathrm{d}(K_s^m-K_s^n)\\
\leqslant&\,\alpha\int_t^T(Y_s^m-Y_s^n)|Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha-2}(f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_n(s,Y_s^n,Z_s^n))\mathrm{d}s\\
&-(M_T-M_t),
\end{aligned}$$

由引理 3.1 知

$$\begin{aligned}
M_t=&\,\alpha\int_0^t(Y_s^m-Y_s^n)|Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha-2}(Z_s^m-Z_s^n)\mathrm{d}B_s\\
&+\alpha\int_0^t((Y_s^m-Y_s^n)|Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha-2})^+\mathrm{d}K_s^m\\
&+\alpha\int_0^t((Y_s^m-Y_s^n)|Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha-2})^-\mathrm{d}K_s^n
\end{aligned}$$

是 G-鞅.

回忆关于 f 的假设, 我们注意到 f 关于变元 y 递减, 有

$$\begin{aligned}
&\langle Y_s^m-Y_s^n,\, f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\rangle\\
\leqslant&\,|Y_s^m-Y_s^n|\times(|f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_n(s,Y_s^m,Z_s^m)|+C|Z_s^m-Z_s^n|).
\end{aligned}$$

由带 ε 的 Young 不等式, 可以得到

$$|Y_t^m-Y_t^n|^\alpha+\underline{\sigma}^2\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\int_t^T|Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha-2}|Z_s^m-Z_s^n|^2\mathrm{d}s+(M_T-M_t)$$

$$\leqslant \alpha\int_t^T |Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha-1}\times(|f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_n(s,Y_s^m,Z_s^m)|+C|Z_s^m-Z_s^n|)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant C_{\alpha,\underline{\sigma}^2}\int_t^T |Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha}\mathrm{d}s+C_{\alpha,\underline{\sigma}^2}\int_t^T |f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_n(s,Y_s^m,Z_s^m)|^{\alpha}\mathrm{d}s$$
$$+\underline{\sigma}^2\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\int_t^T |Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha-2}|Z_s^m-Z_s^n|^2\mathrm{d}s.$$

从而有

$$\begin{aligned}&|Y_t^m-Y_t^n|^{\alpha}+(M_T-M_t)\\ \leqslant{}& C_{\alpha,\underline{\sigma}^2}\int_t^T |Y_s^m-Y_s^n|^{\alpha}\mathrm{d}s+C_{\alpha,\underline{\sigma}^2}\int_t^T |f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_n(s,Y_s^m,Z_s^m)|^{\alpha}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

两边取条件 G-期望, 并且由 Gronwall 不等式, 有

$$\begin{aligned}|Y_t^m-Y_t^n|^{\alpha}&\leqslant C\widehat{\mathbb{E}}_t\int_t^T |f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_n(s,Y_s^m,Z_s^m)|^{\alpha}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\widehat{\mathbb{E}}_t\int_t^T |f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)-f(s,Y_s^m,Z_s^m)\\
&\quad+f(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_n(s,Y_s^m,Z_s^m)|^{\alpha}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\widehat{\mathbb{E}}_t\int_t^T |f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)\\
&\quad-f(s,Y_s^m,Z_s^m)|^{\alpha}+|f(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_n(s,Y_s^m,Z_s^m)|^{\alpha}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\widehat{\mathbb{E}}_t\Big\{\int_t^T |\widetilde{f}_s^m|^{\alpha}+|\widetilde{f}_s^n|^{\alpha}\Big\}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\int_t^T \widehat{\mathbb{E}}_t\Big\{|\widetilde{f}_s^m|^{\alpha}+|\widetilde{f}_s^n|^{\alpha}\Big\}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{f}_s^n=\sup_{(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\{f(s,y,z)-f_n(s,y,z)\}.$$

由引理 4.2 可知, $\widetilde{f}_s$ 关于 (y,z) 一致收敛, 对任意的 $\omega\in\Omega$ 收敛到 0. 因为 f 和 f^n 在全空间 Ω 上关于 ω 一致连续, 所以 $\widetilde{f}_s^n$ 在 Ω 上关于 ω 连续, 从而是拟连续的.

由文 [8] 中的引理 3.3, 对 $p>\alpha$, 有

$$\sup_{P\in\overline{\mathcal{P}}_M} E_p[|\widetilde{f}_s^n|^p]\leqslant C.$$

由 Markov 不等式和 Hölder 不等式, 有

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{P\in\overline{\mathcal{P}}_M} E_P[|\widetilde{f}_s^n|^{\alpha}1_{|\widetilde{f}_s^n|^{\alpha}>N}]=0.$$

从而可以使用单调收敛定理 (定理 2.3), 对任意的 $0\leqslant s\leqslant T$, 都有

$$\widehat{\mathbb{E}}[|\widetilde{f}_s^n|^{\alpha}]\to 0,\quad 当\, n\to\infty.$$

最后, 我们使用 Lebesgue 测度下的控制收敛定理得到结论.

当 $1<\alpha<2$ 时, 由 Hölder 不等式和 $\alpha=2$ 的结果立得.

引理 4.6 对任意的 $\alpha\in(1,\beta)$, (Y^n,Z^n) 在 $S_G^{\alpha}(0,T)\times H_G^{\alpha}(0,T)$ 中收敛.

证　由引理 3.6, 有

$$\|Y^n-Y^m\|_{S_G^\alpha}\leqslant C\Big\{\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_t^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\alpha-1}|f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)-f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big]\Big)^{\frac{\alpha}{\alpha'}}$$
$$+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_t^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\alpha-1}|f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)-f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big]\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\Big\}.$$

为了证明 $\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $S_G^\alpha(0,T)$ 中的 Cauchy 列, 只需证明对于某个 $\alpha'>\alpha$, 当 $n,m\to 0$ 时, 有

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_t^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\alpha-1}|f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)-f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big]\to 0.$$

由 Hölder 不等式和引理 4.1, 有

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_t^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\alpha-1}|f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)-f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big]\\
&\leqslant C_T\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}|f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)-f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)|^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big]\\
&\leqslant C_{T,C}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}|1+|Y_s^n|+|Y_s^m|+|Z_s^n|+|Z_s^m||^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big]\\
&\leqslant C_{T,C}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big]\\
&\quad+C_{T,C}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}|Y_s^n|^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big]\\
&\quad+C_{T,C}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}|Y_s^m|^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big]\\
&\quad+C_{T,C}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}|Z_s^n|^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big]\\
&\quad+C_{T,C}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}|Z_s^m|^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big],
\end{aligned}$$

其中令 $\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}<\beta$, $1<\alpha'<\beta$.

由引理 4.5, 我们知道在空间 $M_G^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}(0,T)$ 中, $Y^n\to Y$, 即

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big]\to 0,\quad \text{当 } n,m\to\infty \text{ 时}.$$

由 Hölder 不等式和引理 4.4, 有

$$\begin{aligned}
&C_{T,C}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}|Y_s^n|^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big]\\
&\leqslant C_{T,C}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|Y_s^n|^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big]\\
&\leqslant C_{T,C}\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|Y_s^n|^{\frac{\alpha'}{\alpha}\alpha}\Big]\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\times\Big(\widehat{\mathbb{E}}[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}\alpha^*}\mathrm{d}s]\Big)^{\frac{1}{\alpha^*}}\\
&\leqslant C_{T,C,A}\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\alpha'}\mathrm{d}s\Big]\Big)^{\frac{1}{\alpha^*}}\\
&\to 0,\quad \text{当 } m,n\to\infty \text{ 时},
\end{aligned}$$

其中 $\alpha^*=\frac{\alpha}{\alpha-1}$.

同样, 还有

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}|Y_s^m|^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big]\to 0.$$

对于不等式的最后两项, 有

$$\begin{aligned}&C_{T,C}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}}|Z_s^n|^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\mathrm{d}s\Big]\\ \leqslant{}& C_{T,C}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}\times\frac{2\alpha}{2\alpha-\alpha'}}\mathrm{d}s\Big)^{\frac{2\alpha-\alpha'}{2\alpha}}\Big(\int_0^T|Z_s^n|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{2\alpha}}\Big]\\ \leqslant{}& C_{T,C}\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}\times\frac{2\alpha}{2\alpha-\alpha'}}\mathrm{d}s\Big)^{\frac{2\alpha-\alpha'}{2\alpha}\times\frac{\alpha}{\alpha-1}}\Big)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\\ &\times\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T|Z_s^n|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha'}{2}}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\\ \leqslant{}& C_{T,C,A}\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}\times\frac{2\alpha}{2\alpha-\alpha'}}\mathrm{d}s\Big)^{\frac{2\alpha-\alpha'}{2\alpha}\times\frac{\alpha}{\alpha-1}}\Big)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\\ \leqslant{}& C_{T,C,A}\Big(\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\frac{(\alpha-1)\alpha'}{\alpha}\times\frac{2\alpha}{2\alpha-\alpha'}\times\frac{2\alpha-\alpha'}{2\alpha}\times\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\\ \leqslant{}& C_{T,C,A}\Big(\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T|Y_s^n-Y_s^m|^{\alpha'}\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\\ \to{}& 0,\quad \text{当 } m,n\to\infty \text{ 时},\end{aligned}$$

其中第 1, 2, 4, 5 个不等号是由 Hölder 不等式得到, 第 3 个不等号是由引理 4.4 得到. 这里我们要求 $\frac{\alpha'}{\alpha}<2$ 且 $\alpha'<\alpha+1$. 再由引理 4.5, 我们有 $\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $S_G^\alpha(0,T)$ 中的 Cauchy 列.

由引理 3.3, 我们知道 $\{Z^n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $H_G^\alpha(0,T)$ 中的 Cauchy 列, 记其极限为 Z.

在给出存在性证明之前, 首先给出唯一性的证明. 注意到 Lipschitz 条件下 G-BSDE 的唯一性结果是文 [2] 中性质 3.8 和性质 3.9 的直接推论. 同时注意到在单调性条件的经典 BSDE 情形下, 唯一性结果是 Briand 等[17]给出的. 我们证明了下列类似结果.

引理 4.7 设 f_i, $i=1,2$, 满足假设 4.1 的 (i)–(v), 对给定的 $\beta>1$, 假设

$$Y_t^i=\xi^i+\int_t^T f_i(s,Y_s^i,Z_s^i)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s^i\mathrm{d}B_s-(K_T^i-K_t^i),$$

其中 $Y^i\in\mathbb{S}^\alpha(0,T)$, $Z^i\in\mathbb{H}^\alpha(0,T)$, K^i 是满足 $K_0^i=0$ 的非增过程. 对给定的 $\beta\geqslant\alpha>1$, $K_T^i\in\mathbb{L}^\alpha(\Omega_T)$. 设 $\widehat{\xi}=\xi_1-\xi_2$, $\widehat{Y}_t=Y_t^1-Y_t^2$, $\widehat{Z}_t=Z_t^1-Z_t^2$ 且 $\widehat{K}_t=K_t^1-K_t^2$, 那么存在常数 $C_\alpha:=C(\alpha,T,\underline{\sigma},C)>0$, 使得

$$\begin{aligned}&\Big(\int_0^T|\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\\ \leqslant{}& C_\alpha\Big\{\|\widehat{Y}\|_{\mathbb{S}^\alpha}^\alpha+\|\widehat{Y}\|_{\mathbb{S}^\alpha}^{\frac{\alpha}{2}}\Big[(\widehat{\mathbb{E}}[|K_T^1|^\alpha])^{\frac12}+(\widehat{\mathbb{E}}[|K_T^2|^\alpha])^{\frac12}+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T\widehat{f}_s\mathrm{d}s\Big)^\alpha\Big]\Big)^{\frac12}\Big]\Big\},\end{aligned}$$

其中 $\widehat{f}_s=f_1(s,Y_s^2,Z_s^2)-f_2(s,Y_s^2,Z_s^2)$.

证 对 $|\widehat{Y}_t|^2$ 使用 Itô公式, 有

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{Y}_0|^2+\int_0^T|\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\
=&|\widehat{\xi}|^2+\int_0^T 2\langle Y_s^1-Y_s^2,\, f_1(s,Y_s^1,Z_s^1)-f_2(s,Y_s^2,Z_s^2)\rangle\mathrm{d}s\\
&-\int_0^T 2\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\mathrm{d}B_s-\int_0^T 2\widehat{Y}_s\mathrm{d}\widehat{K}_s.
\end{aligned}
$$

根据对 f_i 的假设, 有

$$
\begin{aligned}
&\langle Y_s^1-Y_s^2,\, f_1(s,Y_s^1,Z_s^1)-f_2(s,Y_s^2,Z_s^2)\rangle\\
=&\langle Y_s^1-Y_s^2,\, f_1(s,Y_s^1,Z_s^1)-f_1(s,Y_s^1,Z_s^2)\rangle\\
&+\langle Y_s^1-Y_s^2,\, f_1(s,Y_s^1,Z_s^2)-f_1(s,Y_s^2,Z_s^2)\rangle+\langle Y_s^1-Y_s^2,\, f_1(s,Y_s^2,Z_s^2)-f_2(s,Y_s^2,Z_s^2)\rangle\\
\leqslant& C|\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s|+\widehat{Y}_s\widehat{f}_s,
\end{aligned}
$$

其中 $\widehat{f}_s=f_1(s,Y_s^2,Z_s^2)-f_2(s,Y_s^2,Z_s^2)$. 那么

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_0^T|\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\\
\leqslant& C_\alpha\Big\{|\widehat{\xi}|^\alpha+\Big(\int_0^T|\widehat{Y}_s\widehat{f}_s|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha}{2}}+\Big(\int_0^T|\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s|\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\\
&+\Big|\int_0^T\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\mathrm{d}B_s\Big|^{\frac{\alpha}{2}}+\Big|\int_0^T\widehat{Y}_s\mathrm{d}K_s^1\Big|^{\frac{\alpha}{2}}+\Big|\int_0^T\widehat{Y}_s\mathrm{d}K_s^2\Big|^{\frac{\alpha}{2}}\Big\}.
\end{aligned}
$$

通过简单计算, 有

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_0^T|\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\\
\leqslant& C_\alpha\Big\{\|\widehat{Y}\|_{\mathbb{S}^\alpha}^\alpha+\|\widehat{Y}\|_{\mathbb{S}^\alpha}^{\frac{\alpha}{2}}\Big[(\widehat{\mathbb{E}}[|K_T^1|^\alpha])^{\frac{1}{2}}+(\widehat{\mathbb{E}}[|K_T^2|^\alpha])^{\frac{1}{2}}+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T\widehat{f}_s\mathrm{d}s\Big)^\alpha\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

引理 4.8 设 $\xi^i\in L_G^\beta(\Omega_T)$, 对给定的 $\beta>1$, f_i, $i=1,2$, 满足假设 (4.1) 的 (i)–(v). 假设对某个 $1<\alpha<\beta$, $(Y^i,Z^i,K^i)\in\mathfrak{G}_{\mathrm{G}}^\alpha(0,T)$ 是方程 (4.1) 关于终值 ξ^i 和生成元 f_i 的解. 令 $\widehat{\xi}=\xi_1-\xi_2$, $\widehat{Y}_t=Y_t^1-Y_t^2$, $\widehat{Z}_t=Z_t^1-Z_t^2$, $\widehat{K}_t=K_t^1-K_t^2$, 那么

(1) 存在只依赖于 $\alpha,T,\underline{\sigma}$ 和 C 的常数 C_α, 使得

$$
|\widehat{Y}_t|^\alpha\leqslant C_\alpha\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[|\widehat{\xi}|^\alpha+\int_t^T|\widehat{f}_s|^\alpha\mathrm{d}s\Big],
$$

其中 $\widehat{f}_s=f_1(s,Y_s^2,Z_s^2)-f_2(s,Y_s^2,Z_s^2)$.

(2) 对给定的 α', $\alpha<\alpha'<\beta$, 存在只依赖于 $\alpha,\alpha',\underline{\sigma}$ 和 C 的常数 $C_{\alpha,\alpha'}$, 使得

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|\widehat{Y}_t|^\alpha\Big]\leqslant& C_{\alpha,\alpha'}\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t[|\widehat{\xi}|^\alpha]\Big]+\Big(\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\Big(\int_0^T\widehat{f}_s\mathrm{d}s\Big)^{\alpha'}\Big]\Big]\Big)^{\frac{\alpha}{\alpha'}}\\
&+\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\Big(\int_0^T\widehat{f}_s\mathrm{d}s\Big)^{\alpha'}\Big]\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

证 对任意的 $\gamma,\varepsilon>0$, 对 $(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{\gamma t}$ 使用 Itô公式, 其中 $\varepsilon_\alpha=\varepsilon\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)^+$, 有

$$
\begin{aligned}
&(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{\gamma t}+\gamma\int_t^T(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{\gamma s}\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{2}\int_t^T\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Z}_s^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\
&=(|\widehat{\xi}|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{\gamma t}+\alpha\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)\int_t^T\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-2}\widehat{Y}_s^2\widehat{Z}_s^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\
&\quad+\int_t^T\alpha\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s[f_1(s,Y_s^1,Z_s^1)-f_2(s,Y_s^2,Z_s^2)]\mathrm{d}s\\
&\quad-\int_t^T\alpha\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\mathrm{d}B_s-\int_t^T\alpha\mathrm{e}^{\gamma t}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s\mathrm{d}(K_s^1-K_s^2)\\
&\leqslant(|\widehat{\xi}|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{\gamma T}+\alpha\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)\int_t^T\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Z}_s^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\
&\quad+\int_t^T\alpha\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s[f_1(s,Y_s^1,Z_s^1)-f_2(s,Y_s^2,Z_s^2)]\mathrm{d}s-(M_T-M_t),
\end{aligned}
$$

其中

$$
M_t=\int_0^t\alpha\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\mathrm{d}B_s+\int_0^t\alpha\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}(\widehat{Y}_s^+\mathrm{d}K_s^1+\widehat{Y}_s^-\mathrm{d}K_s^2).
$$

根据对 f_i 的假设, 有

$$
\langle Y_s^1-Y_s^2,\ f_1(s,Y_s^1,Z_s^1)-f_2(s,Y_s^2,Z_s^2)\rangle\leqslant C|\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s|+\widehat{Y}_s\widehat{f}_s.
$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T\alpha\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s[f_1(s,Y_s^1,Z_s^1)-f_2(s,Y_s^2,Z_s^2)]\mathrm{d}s\\
&\leqslant\int_t^T\alpha\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}(C|\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s|+\widehat{Y}_s\widehat{f}_s)\mathrm{d}s\\
&\leqslant\int_t^T\alpha\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}C|\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s|\mathrm{d}s+\int_t^T\alpha\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}\widehat{Y}_s\widehat{f}_s\mathrm{d}s\\
&\leqslant\int_t^T\alpha\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}C|\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s|\mathrm{d}s+\alpha\int_t^T\mathrm{e}^{\gamma s}\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\alpha}|\widehat{f}_s|^\alpha\Big)\mathrm{d}s\\
&\leqslant\int_t^T\alpha\mathrm{e}^{\gamma s}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}-1}C\Big(\frac{\underline{\sigma}^2(\alpha-1)}{4C}|\widehat{Z}_s|^2+\frac{C}{\underline{\sigma}^2(\alpha-1)}|\widehat{Y}_t|^2\Big)\mathrm{d}s\\
&\quad+\alpha\int_t^T\mathrm{e}^{\gamma s}\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\alpha}|\widehat{f}_s|^\alpha\Big)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

据此

$$
\begin{aligned}
&(|\widehat{Y}_t|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{\gamma t}+(\gamma-\widetilde{\alpha})\int_t^T(|\widehat{Y}_s|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{\gamma s}\mathrm{d}s\\
&\leqslant(|\widehat{\xi}|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{\gamma T}+\int_t^T\mathrm{e}^{\gamma s}|\widehat{f}_s|^\alpha\mathrm{d}s-(M_T-M_t),
\end{aligned}
$$

其中 $\widetilde{\alpha}=\frac{\alpha C^2}{\underline{\sigma}^2(\alpha-1)}+\alpha-1$. 令 $\gamma=\widetilde{\alpha}+1$, 有

$$
(|\widehat{Y}_t|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{\gamma t}+(M_T-M_t)\leqslant(|\widehat{\xi}|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{\gamma T}+\int_t^T\mathrm{e}^{\gamma s}|\widehat{f}_s|^\alpha\mathrm{d}s.
$$

根据引理 3.1, M_t 是 G-鞅, 从而

$$|\widehat{Y}_t|^\alpha \mathrm{e}^{\gamma t} \leqslant \widehat{\mathbb{E}}_t\Big[(|\widehat{\xi}|^2+\varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{\gamma t}+\int_t^T \mathrm{e}^{\gamma s}|\widehat{f}_s|^\alpha \mathrm{d}s\Big].$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$, 存在只依赖于 $\alpha, T, \underline{\sigma}$ 和 C 的常数, 使得

$$|\widehat{Y}_t|^\alpha \leqslant C_\alpha \widehat{\mathbb{E}}_t\Big[|\widehat{\xi}|^\alpha+\int_t^T |\widehat{f}_s|^\alpha \mathrm{d}s\Big].$$

通过文 [2] 中性质 3.7 和性质 3.9 同样的分析, 我们证明了引理.

最后给出主要结果.

定理 4.1　对于给定的 $\beta>1$, 设 $\xi\in L_G^\beta(\Omega_T)$ 且 f 满足假设 4.1, 那么方程 (4.1) 存在唯一解: 对于 $1<\alpha<\beta$, $(Y,Z,K)\in\mathfrak{S}_G^\alpha(0,T)$. 即 $\forall\alpha\in(1,\beta)$, 有 $Y\in S_G^\alpha(0,T)$, $Z\in H_G^\alpha(0,T)$, K 是非增 G-鞅且 $K_0=0$, $K_T\in L_G^\alpha(\Omega_T)$.

证　由于

$$Y_t^n=\xi+\int_t^T f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\mathrm{d}s-\int_0^T Z_s^n \mathrm{d}B_s-(K_T^n-K_t^n),$$

故

$$K_t^n=-\int_0^t f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\mathrm{d}s+\int_0^t Z_s^n\mathrm{d}B_s-Y_t^n+Y_0^n$$

是一族递降 G-鞅, 且满足 $K_0^n=0$ 和 $K_T^n\in L_G^\alpha(\Omega_T)$.

我们知道 $\{Y^n\}$ 在范数 $\|\cdot\|_{S_G^\alpha}$ 下是 Cauchy 列, $\{Z^n\}$ 在范数 $\|\cdot\|_{H_G^\alpha}$ 下也是 Cauchy 列. 因而由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式, 有

$$\lim_{n\to 0}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t (Z_s^n-Z_s)\mathrm{d}B_s|^\alpha\Big]=0,$$

和

$$\lim_{n\to 0}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_s^n-Y_s|^\alpha \mathrm{d}s\Big]=0.$$

为了证明 $\{K_t^n\}$ 在范数 $\|\cdot\|_{L_G^\alpha}$ 下是 Cauchy 列, 只需证明 $\int_0^t f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\mathrm{d}s$ 在范数 $\|\cdot\|_{L_G^\alpha}$ 下是 Cauchy 列.

注意到如下事实:$Y^n\nearrow Y$, 并且由引理 4.2 知, $f_n(t,y,z)$ 关于 (y,z) 一致收敛到 $f(t,y,z)$, f 关于 (y,z) 是 Lipschitz 连续的, 并且 f 关于 y 是一致连续的, 从而存在连续模 ρ, 使得

$$\begin{aligned}&|f(t,Y_t,Z_t)-f_n(t,Y_t^n,Z_t^n)|\\ \leqslant\ &\rho(|Y_t^n-Y_t|)+|f(t,Y_t^n,Z_t)-f_n(t,Y_t^n,Z_t)|+C|Z_t-Z_t^n|.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\mathrm{d}s-\int_0^t f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s\Big|^\alpha\\ \leqslant\ & C_{T,\alpha}\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T |f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)-f(s,Y_s,Z_s)|^\alpha\mathrm{d}s\\ \leqslant\ & C_{T,\alpha}\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T\{\rho^\alpha(|Y_s^n-Y_s|)+|f(s,Y_s^n,Z_s)-f_n(s,Y_s^n,Z_s)|^\alpha\end{aligned}$$

$$+|Z_s-Z_s^n|^\alpha\}\mathrm{d}s.$$

对于不等式右边第 1 项

$$\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T\rho^\alpha(|Y_s^n-Y_s|)\mathrm{d}s,$$

因为 Ω 是凸的, 因此连续模 ρ 可以选取为凹的、非降、次线性的, 且 $\rho(0)=0$. 又因为

$$Y-Y^n\downarrow 0,$$

故由容度中的单调收敛定理, 有

$$\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T\rho^\alpha(|Y_s^n-Y_s|)\mathrm{d}s\to 0.$$

对于第 2 项

$$\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T|f(s,Y_s^n,Z_s)-f_n(s,Y_s^n,Z_s)|^\alpha\mathrm{d}s,$$

用引理 4.5 的证明方法, 我们可以证明其趋向于 0.

对于第 3 项

$$\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T|Z_s-Z_s^n|^\alpha\mathrm{d}s,$$

可知

$$\widehat{E}\int_0^T|Z_s^n-Z_s|^\alpha\mathrm{d}s\leqslant C_{\alpha,T}\widehat{E}\Big(\int_0^T|Z_s^n-Z_s|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{\alpha}{2}},$$

以及引理 4.6 知, 它也收敛到 0.

从而 $\int_0^t f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\mathrm{d}s$ 在范数 $\|\cdot\|_{L_G^\alpha}$ 下是 Cauchy 列, $\{K_t^n\}$ 在范数 $\|\cdot\|_{L_G^\alpha}$ 下也是 Cauchy 列. 故存在 $L_G^\alpha(\Omega_T)$ 中的过程 $\{K_t\}$, 满足

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|K_t^n-K_t|^\alpha\Big]\to 0.$$

因而对任意的 $0\leqslant t<s\leqslant T$, 有

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}[|\widehat{\mathbb{E}}_t[K_s]-K_t|]\\&=\widehat{\mathbb{E}}[|\widehat{\mathbb{E}}_t[K_s]-\widehat{\mathbb{E}}_t[K_s^n]+K_s^n-K_t|]\\&\leqslant\widehat{\mathbb{E}}[\widehat{\mathbb{E}}_t[K_s-K_s^n]]+\widehat{\mathbb{E}}[|K_s^n-K_t|]\\&=\widehat{\mathbb{E}}[|K_s-K_s^n|]+\widehat{\mathbb{E}}[|K_s^n-K_t|]\to 0,\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$. 所以 $\{K_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是 G-鞅. 由收敛性易见 K 是递减过程且满足 $K_0=0,K_T\in L_G^\alpha(\Omega_T)$.

从而 $(Y,Z,K)\in\mathfrak{G}_G^\alpha(0,T)$ 是方程 (4.1) 的一个解.

唯一性是前两个引理的直接推论.

我们可以将结果推广到包含二次变差项积分的 G-BSDE,

$$\begin{aligned}Y_t=\xi&+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\&-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t),\quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned}\tag{4.7}$$

定理 4.2 对于给定的 $\beta > 1$, 设 $\xi \in L_G^\beta(\Omega_T)$ 且 f 和 g 满足假设 4.1. 那么方程 (4.7) 存在唯一解: 对于 $1 < \alpha < \beta$,$(Y, Z, K) \in \mathfrak{S}_G^\alpha(0, T)$.

致谢 作者感谢汤善健教授的指导, 感谢周超博士在来复旦大学访问期间给予的意见. 作者感谢审稿人的意见, 使得文章在 $p > 2$ 的情形及唯一性结果方面更加完善.

参 考 文 献

[1] Peng S. G-expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type [J]. *Stochastic Analysis & Applications*, 2006, 2(4):541–567.

[2] Hu M, Ji S, Peng S, Song Y S. Backward stochastic differential equations driven by G-Brownian motion [J]. *Stochastic Processes & Their Applications*, 2014, 124(1):759–784.

[3] Lepeltier J P, Martin J S. Backward stochastic differential equations with continuous coefficient [J]. *Statistics & Probability Letters*, 1997, 32(4):425–430.

[4] Chen S. L^p solutions of one-dimensional backward stochastic differential equations with continuous coefficients [J]. *Stochastic Analysis & Applications*, 2010, 28(5):820–841.

[5] Fan S J, Jiang L. L^p $(p > 1)$ solutions for one-dimensional bsdes with linear-growth generators [J]. *Journal of Applied Mathematics & Computing*, 2012, 38(1–2):295–304.

[6] Hu M, Ji S, Peng S, et al. Comparison theorem, Feynman-Kac formula and Girsanov transformation for bsdes driven by G-Brownian motion [J]. *Stochastic Processes & Their Applications*, 2014, 124(2):1170–1195.

[7] Mete Soner H, Touzi N, Zhang J F. Wellposedness of second order backward sdes [J]. *Probability Theory & Related Fiels*, 2010, 153(1–2):149–190.

[8] Possamai D. Second order backward stochastic differential equations under a monotonicity condition [J]. *Stochastic Processes & Their Applications*, 2013, 123(5):1521–1545.

[9] Denis L, Hu M, Peng S. Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: Application to G-Brownian motion paths [J]. *Potential Analysis*, 2008, 34(2):139–161.

[10] Strassen V, Huber P J. Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacities [J]. *Annals of Statistics*, 1973, 1(2):251–263.

[11] Peng S. Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation [J]. *Stochastic Processes & Their Applications*, 2008, 118(12):2223–2253.

[12] Li X, Peng S. Stopping times and related Ito's calculus with G-Brownian motion [J]. *Stochastic Processes & Their Applications*, 2009, 121:1492–1508.

[13] Peng S G. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty [R]. First Edition, 2010.

[14] Song Y S. Some properties on G-evaluation and its applications to G-martingale decomposition [J]. *Science China Mathematics*, 2011, 54(2):287–300.

[15] Barlow M T, Perkins E. One-dimensional stochastic differential equations involving a singular increasing process [J]. *Stochastics An International Journal of Probability & Stochastic Processes*, 1984, 12(12):229–249.

[16] Lasry J M, Lions P L. A remark on regularization in Hilbert spaces [J]. *Israel Journal of Mathematics*, 1986, 55(3):257–266.

[17] Briand P, Delyon B, Hu Y. L^p solutions of backward stochastic differential equations [J]. *Stochastic Processes & Their Applications*, 2003, 108(1):109–129.

Backward Stochastic Differential Equations Driven by *G*-Brownian Motion Under a Monotonicity Condition

SONG Yang[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China.
E-mail: yangsong13@fudan.edu.cn

Abstract In this paper, the solution of backward stochastic differential equations driven by a G-Brownian motion (G-BSDE for short):

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s - (K_T - K_t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

is studied, with a generator which is Lipschitz in Z, uniformly continuous with linear growth and satisfying a monotonicity condition in Y.

Keywords G-Brownian motion, Backward SDEs, Monotonicity condition

2000 MR Subject Classification 60H10, 60H30

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 2, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA