数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(2):199–210
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0016

关于有限 Abel p-群的自同构群*

徐 涛 [1] 刘合国 [2] 余 杨 [2]

提要 从有限 Abel p-群 P 的型不变量出发, 给出了其自同构群 $\mathrm{Aut}P$ 的阶的计算公式, 并利用 $|\mathrm{Aut}P|$ 的计算公式得到了下面 3 个结果: 1. 由有限 Abel p-群的型不变量的两种变换得到了其自同构群的阶的变化规律; 2. 用群的阶、秩、幂指数三个量界定了有限 Abel p-群的自同构的阶; 3. 对部分 Frattini 子群为 p 阶群的有限 p-群, 确定了其自同构群的阶何时达到最小值和最大值.

关键词 有限 Abel p-群, 自同构群, Frattini 子群
MR (2000) 主题分类 20D45
中图法分类 O152.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)02-0199-12

1 有限 Abel p-群的自同构群的阶

本文所涉及的群均是有限群, 采用的符号和术语都是标准的, 参照文 [1].

设 A 是一个有限 Abel 群, $|A| = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ 为素因子分解式, 则 A 可分解为

$$A = S_{p_1} \oplus S_{p_2} \oplus \cdots \oplus S_{p_s},$$

其中 S_{p_i} 是 A 的 Sylow p_i-子群. 由此得到 A 的自同构群 $\mathrm{Aut}A$ 可分解为

$$\mathrm{Aut}A = \mathrm{Aut}S_{p_1} \oplus \mathrm{Aut}S_{p_2} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Aut}S_{p_s},$$

这样对有限 Abel 群的自同构群的研究就可归结到对有限 Abel p-群的自同构群的研究. 关于初等 Abel p-群的自同构群, Hall 在文 [2] 中证明了下面的命题.

命题 1.1 设 P 是一个阶为 p^n 的初等 Abel 群, 则 $\mathrm{Aut}P \cong GL(n, Z_p)$ 且

$$|\mathrm{Aut}P| = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}).$$

这是群的自同构群理论的一个基本结果, 它是许多深入工作的出发点, 如文 [3–5]. 在文 [5] 中, 潘江敏研究了 2 类有限 Abel p-群的自同构群, 得到了以下结果.

命题 1.2 设 P 是一个有限 Abel p-群且型不变量为 $(p^{r_1}, p^{r_2}, \cdots, p^{r_s})$, 其中 $r_1 > r_2 > \cdots > r_s$, 则

$$|\mathrm{Aut}P| = p^{2r_2+4r_3+\cdots+2(s-1)r_s} \times \prod_{i=2}^{s}(p^{r_i} - p^{r_i-1}).$$

本文 2016 年 3 月 26 日收到, 2016 年 12 月 27 日收到修改稿.
[1]河北工程大学数理学院, 河北 邯郸 056038. E-mail: gtxutao@163.com
[2]湖北大学数学与统计学院, 武汉 430062. E-mail: ghliu@hubu.edu.cn, 459193638@qq.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11626078, No. 11371124) 和河北省教育厅青年基金 (No. QN2016184) 的资助.

命题 1.3 设 P 是一个阶为 p^n 的 Abel 群且 $P=\langle a_1\rangle\oplus\langle a_2\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_s\rangle$, 其型不变量为 $(p^r,\cdots,p^r)$, 则

$$|\mathrm{Aut}P|=(p^n-p^{n-s})(p^n-p^{n-s+1})\cdots(p^n-p^{n-1}).$$

现在我们要推广上面的命题, 研究一般的有限 Abel p-群的自同构群的阶.

为了方便叙述, 我们重新引述有限 Abel p-群的型不变量: 有限 Abel p-群 P 分解为循环子群的直和 $P=\langle a_1\rangle\oplus\langle a_2\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_r\rangle$, 其中 $|a_i|=p^{\alpha_i}$, 则称 P 的型不变量为 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$.

定理 1.1 设 P 是一个阶为 p^n 的有限 Abel 群, 其型不变量是

$$(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1t_1},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t_2},\cdots,\alpha_{r1},\cdots,\alpha_{rt_r}),$$

记 $\alpha_{ij}=s_i\ (1\leqslant j\leqslant t_i)$, 设 $s_1>s_2>\cdots>s_r$, 则

$$|\mathrm{Aut}P|=\prod_{i=2}^{r}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)t_i}\times\prod_{i=1}^{r}|GL(t_i,Z_p)|\times\prod_{i=1}^{r}|\Phi_i|^{t_i}\times\prod_{i=1}^{r}p^{t_i(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)},$$

其中对于 $1\leqslant i\leqslant r$, Φ_i 是 P 的型不变量为 $(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{it_i})$ 的子群的 Frattini 子群, $|\Phi_i|=p^{(s_i-1)t_i}$.

证 因为 P 的型不变量是 $(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1t_1},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t_2},\cdots,\alpha_{r1},\cdots,\alpha_{rt_r})$, 不妨设

$$P=\langle a_{11}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_{1t_1}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_{r1}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_{rt_r}\rangle,\quad 其中\ |a_{ij}|=p^{\alpha_{ij}}.$$

对于任意的 $\sigma\in\mathrm{Aut}P$, 我们把 $(a_{i1}\oplus\cdots\oplus a_{it_i})$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ 看作一个整体, 由文 [5, 引理 2] 可知

$$(\sigma(a_{11}),\cdots,\sigma(a_{1t_1}),\cdots,\sigma(a_{i1}),\cdots,\sigma(a_{it_i}),a_{i+1,1},\cdots,a_{i+1,t_{i+1}},\cdots,a_{r1},\cdots,a_{rt_r})$$

是 P 的一组基底. 所以 $(\sigma(a_{i1}),\cdots\cdots,\sigma(a_{it_i}))$ 的取法由以下方程组决定:

$$\begin{cases}\sigma(a_{i1})=b_{i1}+x_{11}a_{i1}+\cdots+x_{1t_i}a_{it_i}+f_{i1}+u_{i1},\\ \sigma(a_{i2})=b_{i2}+x_{21}a_{i1}+\cdots+x_{2t_i}a_{it_i}+f_{i2}+u_{i2},\\ \qquad\vdots\\ \sigma(a_{it_i})=b_{it_i}+x_{t_i1}a_{i1}+\cdots+a_{it_i}+f_{it_i}+u_{it_i},\end{cases}$$

其中 $f_{ij}\in\Phi_i\ (1\leqslant j\leqslant t_i)$; 矩阵 $(x_{uv})_{t_i\times t_i}\in GL(t_i,Z_p)$;

$$b_{ij}\in\langle a_{11}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_{1t_i}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_{i-1,1}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_{i-1,t_{i-1}}\rangle;\quad |b_{ij}|\leqslant p^{s_i};$$

$$u_{ij}\in\langle a_{i+1,1}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_{i+1,t_{i+1}}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_{r1}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_{rt_r}\rangle.$$

因此 $(\sigma(a_{i1}),\cdots\cdots,\sigma(a_{it_i}))$, 可得

$$p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)t_i}\times|GL(t_i,Z_p)|\times|\Phi_i|^{t_i}\times p^{(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)t_i}$$

种取法. 故

$$|\mathrm{Aut}P|=\prod_{i=2}^{r}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)t_i}\times\prod_{i=1}^{r}|GL(t_i,Z_p)|\times\prod_{i=1}^{r}|\Phi_i|^{t_i}\times\prod_{i=1}^{r}p^{t_i(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)}.$$

2　公式的应用

下面我们给出有限 Abel p-群的型不变量的两种变换, 并结合上述计算公式, 找到了有限 Abel p-群的自同构群的阶的变化规律.

定义 2.1 (第一种变换) 有限 Abel p-群 P 的型不变量为 $(r_1, r_2, \cdots, r_s)$, 任选 $r_i < r_j - 1$, 则把型不变量为

$$(r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}, r_i + 1, r_{i+1}, \cdots, r_{j-1}, r_j - 1, r_{j+1}, \cdots, r_s)$$

的有限 Abel p-群 Q 称为 P 经一次第一种变换后得到的群.

定理 2.1 有限 Abel p-群经第一种变换后得到的群的自同构群的阶比其自身的自同构群的阶大.

证 设原群 P 是定理 1.1 中所定义的群. 对 α_{i1} 和 α_{j1} 进行变换, 不妨设 $i < j$. 我们分以下 10 种情况进行讨论:

(1) $j = i + 1,\ s_{i+1} + 1 = s_i - 1$;

(2) $j = i + 1,\ s_{i+1} + 1 < s_i - 1$;

(3) $j = i + 2,\ s_i = s_{i+1} + 1 = s_{i+2} + 2$;

(4) $j = i + 2,\ s_i = s_{i+1} + 1 > s_{i+2} + 2$;

(5) $j = i + 2,\ s_i > s_{i+1} + 1 > s_{i+2} + 2$;

(6) $j = i + 2,\ s_i > s_{i+1} + 1 = s_{i+2} + 2$;

(7) $j > i + 2,\ s_i - 1 = s_{i-1},\ s_j + 1 = s_{j-1}$;

(8) $j > i + 2,\ s_i - 1 = s_{i+1},\ s_j + 1 < s_{j-1}$;

(9) $j > i + 2,\ s_i - 1 > s_{i+1}, s_j + 1 = s_{j-1}$;

(10) $j > i + 2,\ s_i - 1 > s_{i+1}, s_j + 1 < s_{j-1}$.

首先证明情况 (1) $j = i + 1,\ s_{i+1} + 1 = s_i - 1$.

在这种情况下变换后的群 Q 的型不变量是

$$(\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1t_1}, \cdots, \overline{\alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{it_i}, \alpha_{i1} - 1, \alpha_{i+1,1} + 1, \alpha_{i+1,2}, \cdots, \alpha_{i+1,t_{i+1}}}, \cdots, \alpha_{r1}, \cdots, \alpha_{rt_r}).$$

对照定理 1.1 的证明过程, 我们发现只有划线的部分的像的取法发生了变化, 所以

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathrm{Aut}P|}{|\mathrm{Aut}Q|} = {} & \frac{|GL(t_i, Z_p)||\Phi_i|^{t_i} p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1} t_k)t_i} p^{t_i(n - \sum\limits_{k=1}^{i} t_k s_k)}}{|GL(t_i - 1, Z_p)||\Phi'_i|^{t_1 - 1} p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1} t_k)(t_i - 1)} p^{(t_i - 1)(n - \sum\limits_{k=1}^{i} t_k s_k + s_i)}} \\
& \times \frac{1}{|GL(t_{i+1} - 1, Z_p)||\Phi'_{i+1}|^{t_{i+1} - 1} p^{s_{i+1}(\sum\limits_{k=1}^{i} t_k + 1)(t_{i+1} - 1)} p^{(t_{i+1} - 1)(n - \sum\limits_{k=1}^{i+1} t_k s_k)}} \\
& \times \frac{|GL(t_{i+1}, Z_p)||\Phi_{i+1}|^{t_{i+1}} p^{s_{i+1}(\sum\limits_{k=1}^{i} t_k)t_{i+1}} p^{t_{i+1}(n - \sum\limits_{k=1}^{i+1} t_k s_k)}}{|GL(2, Z_p)||\Phi|^2 p^{2(s_i - 1)(\sum\limits_{k=1}^{i} t_k - 1)} p^{2(n - \sum\limits_{k=1}^{i} t_k s_k - s_{i+1})}},
\end{aligned}$$

其中 $\Phi_i', \Phi_{i+1}', \Phi$ 分别是型不变量为 $(\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{it_i})$, $(\alpha_{i+1,2},\cdots,\alpha_{i+1,t_{i+1}})$, $(\alpha_{i1}-1,\alpha_{i+1,1}+1)$ 的子群的 Frattini 子群. 进而上式展开得到

$$\begin{aligned}\frac{|\mathrm{Aut}P|}{|\mathrm{Aut}Q|}=&\frac{(p^{t_i}-1)\cdots(p^{t_i}-p^{t_i-1})p^{(s_i-1)t_i^2}p^{s_i(t_1+\cdots+t_{i-1})t_i}p^{t_i(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)}}{(p^{t_i-1}-1)\cdots(p^{t_i-1}-p^{t_i-2})p^{(s_i-1)(t_i-1)^2}p^{s_i(t_1+\cdots+t_{i-1})(t_i-1)}p^{(t_i-1)(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k+s_i)}}\\&\times\frac{(p^{t_{i+1}}-1)\cdot(p^{t_{i+1}}-p^{t_{i+1}-1})p^{(s_{i+1}-1)t_{i+1}^2}p^{s_{i+1}(t_1+\cdots+t_i)t_{i+1}}p^{t_{i+1}(n-\sum\limits_{k=1}^{i+1}t_ks_k)}}{(p^{t_{i+1}-1}-1)\cdots(p^{t_{i+1}-1}-p^{t_{i+1}-2})p^{(s_{i+1}-1)(t_{i+1}-1)^2}p^{s_{i+1}(1+\sum\limits_{k=1}^{i}t_k)(t_{i-1}-1)}}\\&\times\frac{1}{p^{(t_{i+1}-1)(n-\sum\limits_{k=1}^{i+1}t_ks_k)}(p^2-1)(p^2-p)p^{4(s_i-2)}p^{2(s_i-1)(\sum\limits_{k=1}^{i}t_k-1)}p^{2(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k-s_{i+1})}}.\end{aligned}$$

经过约分后得到

$$\begin{aligned}\frac{|\mathrm{Aut}P|}{|\mathrm{Aut}Q|}=&\frac{(p^{t_i}-1)p^{t_i-1}p^{(s_i-1)(2t_i-1)}p^{s_i(t_1+\cdots+t_i)}p^{n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k}}{p^{s_i(t_i-1)}}\\&\times\frac{(p^{t_{i+1}}-1)p^{t_{i+1}-1}p^{(s_{i+1}-1)(2t_{i+1}-1)}p^{s_{i+1}(t_1+\cdots+t_i)}p^{n-\sum\limits_{k=1}^{i+1}t_ks_k}}{p^{s_{i+1}(t_{i+1}-1)}}\\&\times\frac{1}{(p^2-1)(p^2-p)p^{4(s_i-2)}p^{2(s_i-1)(\sum\limits_{k=1}^{i}t_k-1)}p^{2(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k-s_{i+1})}}.\end{aligned}$$

已知 $s_{i+1}+1=s_i-1$, 下面比较上式分子分母中 p 的幂指数. 分子中 p 的幂指数是

$$\begin{aligned}&(t_i-1)+(s_i-1)(2t_i-1)+s_i(t_1+\cdots+t_{i-1})+\Big(n-\sum_{k=1}^{i}t_ks_k\Big)+(t_{i+1}-1)\\&+(s_{i+1}-1)(2t_{i+1}-1)+s_{i+1}(t_1+\cdots+t_i)+\Big(n-\sum_{k=1}^{i+1}t_ks_k\Big),\end{aligned}$$

分母中 p 的幂指数是

$$s_i(t_i-1)+4(s_i-2)+2(s_i-1)(t_1+\cdots+t_i-1)+2\Big(n-\sum_{k=1}^{i}t_ks_k-s_{i+1}\Big)+s_{i+1}(t_i-1),$$

再约分后得到

$$\frac{|\mathrm{Aut}P|}{|\mathrm{Aut}Q|}=\frac{(p^{t_i}-1)(p^{t_{i+1}}-1)}{p^{t_i+t_{i+1}-2}(p^2-1)(p^2-p)}<1.$$

所以定理中的 (1) 成立.

对于情况 (2) $j=i+1,\ s_{i+1}+1<s_i-1$, 我们设群 Q 是 P 经过 (2) 变换得到的, 则

$$
\begin{aligned}
\frac{|\mathrm{Aut}P|}{|\mathrm{Aut}Q|}=&\frac{|GL(t_i,Z_p)||\Phi_i|^{t_i}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)t_i}p^{t_i(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)}}{|GL(t_i-1,Z_p)||\Phi_i'|^{t_1-1}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)(t_i-1)}p^{(t_i-1)(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k+s_i)}|GL(t_{i+1}-1,Z_p)|}\\
&\times\frac{1}{|\Phi_{i+1}'|^{t_{i+1}-1}p^{s_{i+1}(\sum\limits_{k=1}^{i}t_k+1)(t_{i+1}-1)}p^{(t_{i+1}-1)(n-\sum\limits_{k=1}^{i+1}t_ks_k)}\phi(p^{s_i-1})}\\
&\times\frac{|GL(t_{i+1},Z_p)||\Phi_{i+1}|^{t_{i+1}}p^{s_{i+1}(\sum\limits_{k=1}^{i}t_k)t_{i+1}}p^{t_{i+1}(n-\sum\limits_{k=1}^{i+1}t_ks_k)}}{p^{(s_i-1)(\sum\limits_{k=1}^{i}t_k-1)}p^{n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k+1}\phi(p^{s_{i+1}+1})p^{(s_{i+1}+1)(\sum\limits_{k=1}^{i}t_k)}p^{n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k-s_{i+1}}},
\end{aligned}
$$

其中 Φ_i',Φ_{i+1}' 是如上定义的群. 经过约分后得到

$$\frac{|\mathrm{Aut}P|}{|\mathrm{Aut}Q|}<1.$$

对于情况 (3) $j=i+2,\ s_i=s_{i+1}+1=s_{i+2}+2$, 设群 Q 是 P 经过 (3) 变换得到的, 则

$$
\begin{aligned}
\frac{|\mathrm{Aut}P|}{|\mathrm{Aut}Q|}=&\frac{|GL(t_i,Z_p)||\Phi_i|^{t_i}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)t_i}p^{t_i(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)}}{|GL(t_i-1,Z_p)||\Phi_i'|^{t_1-1}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)(t_i-1)}p^{(t_i-1)(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k+s_i)}}\\
&\times\frac{|GL(t_{i+1},Z_p)||\Phi_{i+1}|^{t_{i+1}}p^{s_{i+1}(\sum\limits_{k=1}^{i}t_k)t_{i+1}}p^{t_{i+1}(n-\sum\limits_{k=1}^{i+1}t_ks_k)}}{|GL(t_{i+1}+2,Z_p)||\Phi_{i+1}'|^{t_{i+1}+2}p^{s_{i+1}(\sum\limits_{k=1}^{i}t_k-1)(t_{i+1}+2)}p^{(t_{i+1}+2)(n-\sum\limits_{k=1}^{i+1}t_ks_k-s_{i+2})}}\\
&\times\frac{|GL(t_{i+2},Z_p)||\Phi_{i+2}|^{t_{i+2}}p^{s_{i+2}(\sum\limits_{k=1}^{i+1}t_k)t_{i+2}}p^{t_{i+2}(n-\sum\limits_{k=1}^{i+2}t_ks_k)}}{|GL(t_{i+2}-1,Z_p)||\Phi_{i+2}'|^{t_{i+2}-1}p^{s_{i+2}(\sum\limits_{k=1}^{i+1}t_k+1)(t_{i+1}-1)}p^{(t_{i+2}-1)(n-\sum\limits_{k=1}^{i+2}t_ks_k)}},
\end{aligned}
$$

其中 $\Phi_i',\Phi_{i+1}',\Phi_{i+2}'$ 分别是型不变量为 $(\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{it_i})$, $(\alpha_{i1}-1,\alpha_{i+1,1},\cdots,\alpha_{i+1,t_{i+1}},\alpha_{i+2,1}+1)$, $(\alpha_{i+2,2},\cdots,\alpha_{i+2,t_{i+2}})$ 的群的 Frattini 子群. 经过约分后得到

$$\frac{|\mathrm{Aut}P|}{|\mathrm{Aut}Q|}<1.$$

后面 7 种类型的变换可以看作是上述 3 种类型的变换的合成, 所以定理在这 7 种情况下也成立. 定理得证.

根据定理 2.1, 我们可以容易地比较两个阶和秩相同的有限 Abel p-群的自同构群的阶的大小.

推论 2.1 在阶为 p^n 且秩为 r 的有限 Abel p-群中, 型不变量为

$$\Big(\underbrace{\Big[\frac{n}{r}\Big]+1,\cdots,\Big[\frac{n}{r}\Big]+1}_{k},\Big[\frac{n}{r}\Big],\cdots,\Big[\frac{n}{r}\Big]\Big),\quad n=r\Big[\frac{n}{r}\Big]+k,\ 0\leqslant k<r$$

的群的自同构群的阶最大 (因为它不能再进行变换); 型不变量为

$$(\underbrace{1,\cdots,1}_{r-1},n-r+1)$$

的群的自同构群的阶最小 (因为任何这种类型的群都可以经过它变换得到).

定义 2.2 (第二种变换) 设有限 Abel p-群 P 的型不变量为 $(r_1,r_2,\cdots,r_s)$, 任选 $r_i>1$, 则型不变量为

$$(r_1,r_2,\cdots,r_{i-1},r_i-1,r_{i+1},\cdots,r_s,1)$$

的有限 Abel p-群 Q 称为 P 经过一次第二种变换得到的群.

定理 2.2 有限 Abel p-群经第二种变换得到的群的自同构群的阶比其自身的自同构群的阶大.

证 设原群 P 是定理 1.1 中所定义的群, 变换中的 $\alpha_{i1}>1$, 我们分以下 4 种情况讨论:

(1) $\alpha_{i1}-1>\alpha_{i+1,1},\ \alpha_{r1}=1$;

(2) $\alpha_{i1}-1=\alpha_{i+1,1},\ \alpha_{r1}=1$;

(3) $\alpha_{i1}-1>\alpha_{i+1,1},\ \alpha_{r1}>1$;

(4) $\alpha_{i1}-1=\alpha_{i+1,1},\ \alpha_{r1}>1$.

首先证明 (1). 经 (1) 变换后得到的群 Q 的型不变量是

$$(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1t_1},\cdots,\alpha_{i-1,1},\cdots,\alpha_{i-1,t_{i-1}},\overline{\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{it_i},\alpha_{i1}-1},\cdots,\overline{\alpha_{r1},\cdots,\alpha_{rt_r},1}).$$

设

$$\begin{aligned}Q=&\langle b_{11}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle b_{1t_1}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle b_{i-1,1}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle b_{i-1,t_{i-1}}\rangle\\&\oplus\langle b_{i2}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle b_{i,t_i}\rangle\oplus\langle b_{i1}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle b_{r1}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle b_{rt_r}\rangle\oplus\langle b\rangle,\end{aligned}$$

其中 $|b_{i1}|=p^{\alpha_{i1}-1}$, $|b|=p$, $b_{ij}=p^{\alpha_{ij}}$(其他). 设 N 代表取法数, 对于任意的 $\sigma\in\mathrm{Aut}P$, $\delta\in\mathrm{Aut}Q$, 有

$$\begin{aligned}&N(\sigma(a_{11}),\cdots,\sigma(a_{1t_1}),\cdots,\sigma(a_{i-1,1}),\cdots,\sigma(a_{i-1,t_{i-1}}))\\=&N(\delta(b_{11}),\cdots,\delta(b_{1t_1}),\cdots,\delta(b_{i-1,1}),\cdots,\delta(b_{i-1,t_{i-1}})),\\&p^{t_{i+1}+\cdots+t_{r-1}}N(\sigma(a_{i+1,1}),\cdots,\sigma(a_{i+1,t_1}),\cdots,\sigma(a_{r-1,1}),\cdots,\sigma(a_{r-1,t_{r-1}}))\\=&N(\delta(b_{i+1,1}),\cdots,\delta(b_{i+1,t_1}),\cdots,\delta(b_{r-1,1}),\cdots,\delta(b_{r-1,t_{r-1}})).\end{aligned}$$

接下来比较剩下的部分, 即划线的部分:

$$
\begin{aligned}
&N(\sigma(a_{i1}),\cdots,\sigma(a_{i,t_i}),\sigma(a_{r1}),\cdots,\sigma(a_{r,t_r}))\\
=\,&|GL(t_i,Z_p)||\Phi_i|^{t_i}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)t_i}p^{n-(\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)t_i}|GL(t_r,Z_p)|p^{(\sum\limits_{k=1}^{r-1}t_k)t_r},\\
&N(\delta(b_{i2}),\cdots,\delta(b_{i,t_i}),\delta(b_{i1}),\delta(b_{r1}),\cdots,\delta(b_{rt_r}),\delta(b))\\
=\,&|GL(t_{i-1},Z_p)||\Phi_i'|^{t_i-1}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)(t_i-1)}p^{(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k+s_i)(t_i-1)}p^{(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k+s_i)(t_i-1)}\\
&\times\phi(p^{s_i-1})p^{(s_i-1)(\sum\limits_{k=1}^{i}t_k-1)}p^{(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k+1)}|GL(t_r+1,Z_p)|p^{(\sum\limits_{k=1}^{r-1}t_k)(t_r+1)},
\end{aligned}
$$

其中 Φ_i' 是型不变量为 $(\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{it_i})$ 的子群的 Frattini 子群, ϕ 代表欧拉函数. 所以

$$
\begin{aligned}
\frac{|\mathrm{Aut}P|}{|\mathrm{Aut}Q|}=\,&\frac{(p^{t_i}-1)\cdots(p^{t_i}-p^{t_i-1})p^{(s_i-1)t_i^2}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)t_i}p^{(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)t_i}}{p^{t_{i+1}+\cdots+t_{r-1}}(p^{t_i-1}-1)\cdots(p^{t_i-1}-p^{t_i-2})p^{(s_i-1)(t_i-1)^2}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)(t_i-1)}}\\
&\times\frac{(p^{t_r}-1)\cdots(p^{t_r}-p^{t_r-1})p^{(\sum\limits_{k=1}^{r-1}t_k)t_r}}{p^{(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k+s_i)(t_i-1)}(p^{t_r+1}-1)\cdots(p^{t_r+1}-p^{t_r})p^{(\sum\limits_{k=1}^{r-1}t_k)(t_r+1)}}\\
&\times\frac{1}{(p^{s_i-1}-p^{s_i-2})p^{(s_i-1)(\sum\limits_{k=1}^{i}t_k-1)}p^{(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k+1)}}.
\end{aligned}
$$

约分后得

$$
\begin{aligned}
\frac{|\mathrm{Aut}P|}{|\mathrm{Aut}Q|}=\,&\frac{(p^{t_i}-1)p^{t_i-1}p^{(2t_i-1)(s_i-1)}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)}p^{(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)}}{p^{t_{i+1}+\cdots+t_{r-1}}p^{s_i(t_i-1)}(p^{t_r+1}-1)p^{t_r}p^{(\sum\limits_{k=1}^{r-1}t_k)}}\\
&\times\frac{1}{(p^{s_i-1}-p^{s_i-2})p^{(s_i-1)(\sum\limits_{k=1}^{i}t_k-1)}p^{(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)}}.
\end{aligned}
$$

比较上式分子分母中 p 的幂指数. 分子中 p 的幂指数是

$$
t_i-1+(2t_i-1)(s_i-1)+s_i\Big(\sum_{k=1}^{i-1}t_k\Big)+n-\sum_{k=1}^{i}t_ks_k,
$$

分母中 p 的幂指数是

$$
t_{i+1}+\cdots+t_{r-1}+s_i(t_i-1)+t_r+\sum_{k=1}^{i-1}t_k+s_i-2+(s_i)\Big(\sum_{k=1}^{i}t_k-1\Big)+n-\sum_{k=1}^{i}t_ks_k+1.
$$

再约分得

$$
\frac{|\mathrm{Aut}P|}{|\mathrm{Aut}Q|}=\frac{p^{t_i}-1}{(p-1)p^{2(t_{i+1}+\cdots+t_{r-1})+t_i+t_r-1}}<1.
$$

所以在这种情况下变换后的群的自同构群的阶大. 我们用同样的方法可以证明定理在 (2), (3), (4) 的情况下也成立.

根据定理 2.1 和定理 2.2, 对于任何两个阶相同的有限 Abel p-群, 我们可以比较它们的自同构群的阶的大小.

推论 2.2 在阶为 p^n 的有限 Abel p-群中, 型不变量为 $(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n})$ 的有限 Abel p-群的自同构群的阶最大; 群 Z_{p^n} 的自同构群的阶最小.

推论 2.3 设 P 和 Q 是两个阶和秩都相同的有限 Abel p-群, $\Phi(P)$ 和 $\Phi(Q)$ 分别是它们的 Frattini 子群, 如果 $|\mathrm{Aut}\Phi(P)|<|\mathrm{Aut}\Phi(Q)|$, 那么 $|\mathrm{Aut}P|<|\mathrm{Aut}Q|$.

证 显然如果 $|\mathrm{Aut}\Phi(P)|<|\mathrm{Aut}\Phi(Q)|$, 那么 Q 是由 P 经过一些变换得到, 这些变换中可能有第二种变换.

另外, 还有以下推论.

推论 2.4 设 P 和 Q 是两个阶相同的有限 Abel p-群. 如果 $P=P_1\oplus P_2$, $Q=Q_1\oplus Q_2$, $P_1\cong Q_1$ 且 $|\mathrm{Aut}P_2|<|\mathrm{Aut}Q_2|$, 那么 $|\mathrm{Aut}P|<|\mathrm{Aut}Q|$.

证 易知 P_2 和 Q_2 是具有相同阶的有限 Abel p-群. 根据定理 2.1 和定理 2.2 我们可以得到如果 $|\mathrm{Aut}P_2|<|\mathrm{Aut}Q_2|$, 那么 Q_2 就是 P_2 经过一些变换得到的群, 所以 Q 也是 P 经过一些变换得到的群.

对于有限 Abel p-群, 我们能够求出其自同构群的阶, 找到其自同构群的阶的变化规律. 自然地, 我们要考虑把本文的思想和结果推广到有限非 Abel p-群, 但是这不是一件简单的工作. 对一般的有限非 Abel p-群, 即使是计算其自同构群的阶也是非常困难的.

在文 [6] 中, Horoševskii 界定了有限群的自同构的阶. 下面我们应用定理 1.1 来界定有限 Abel p-群的自同构的阶, 证明了有限 Abel p-群的自同构的阶不大于 $f(n,r,e)$, 其中 $f(n,r,e)$ 是与 Abel p-群的阶、秩、幂指数有关的函数.

定理 2.3 设 P 是一个阶为 p^n 的有限 Abel 群, P 的秩是 r 且 P 的幂指数是 p^e, 则对于任意的 $\alpha\in\mathrm{Aut}P$, 存在一个只与 Abel 群 P 的阶、秩、幂指数有关的函数 $f(n,r,e)=p^{2er^2+rn}-1$, 使得 $|\alpha|\leqslant f(n,r,e)$.

证 不妨设 P 的型不变量是

$$(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1t_1},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t_2},\cdots,\alpha_{r1},\cdots,\alpha_{rt_r}),$$

其中 $\alpha_{ij}=s_i\ (1\leqslant j\leqslant t_i)$, $s_1>s_2>\cdots>s_r$. 由定理 1 知道

$$|\mathrm{Aut}P|=\prod_{i=2}^{r}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)t_i}\times\prod_{i=1}^{r}|GL(t_i,Z_p)|\times\prod_{i=1}^{r}|\Phi_i|^{t_i}\times\prod_{i=1}^{r}p^{t_i(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)},$$

其中对于 $1\leqslant i\leqslant r$, Φ_i 是 P 的型不变量为 $(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{it_i})$ 的子群的 Frattini 子群, $|\Phi_i|=p^{(s_i-1)t_i}$.

容易验证 $e=s_1>s_2>\cdots>s_r$, $t_1+t_2+\cdots+t_r=r$. 注意到

$$\begin{aligned}\prod_{i=2}^{r}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)t_i}&=p^{s_2t_1t_2}p^{s_3(t_1+t_2)t_3}\cdots p^{s_{r-1}(t_1+\cdots+t_{r-2})t_{r-1}}p^{s_r(t_1+\cdots+t_{r-1})t_r}\\&=p^{s_2t_1t_2+s_3(t_1+t_2)t_3+\cdots+s_{r-1}(t_1+\cdots+t_{r-2})t_{r-1}+s_r(t_1+\cdots+t_{r-1})t_r}\\&<p^{er(t_2+t_3+\cdots+t_r)}<p^{er^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{r}|GL(t_i,Z_p)|&=|GL(t_1,Z_p)||GL(t_2,Z_p)|\cdots|GL(t_r,Z_p)|\\&=(p^{t_1}-p^{t_1-1})(p^{t_1}-p^{t_1-2})\cdots(p^{t_1}-1)\cdots(p^{t_r}-p^{t_r-1})\cdots(p^{t_r}-1)\\&<p^{t_1^2}p^{t_2^2}\cdots p^{t_r^2}\\&=p^{t_1^2+t_2^2+\cdots+t_r^2}<p^{r^2},\end{aligned}$$

$$\prod_{i=1}^{r}|\Phi_i|^{t_i}=\prod_{i=1}^{r}(p^{(s_i-1)t_i})^{t_i}=p^{(s_1-1)t_1^2}p^{(s_2-1)t_2^2}\cdots p^{(s_r-1)t_r^2}<p^{(e-1)(t_1^2+t_2^2+\cdots+t_r^2)}<p^{(e-1)r^2},$$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{r}p^{t_i(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)}&=p^{t_1(n-t_1s_1)}p^{t_2(n-t_1s_1-t_2s_2)}\cdots p^{t_r(n-t_1s_1-t_2s_2-\cdots-t_rs_r)}\\&=p^{(t_1+t_2+\cdots+t_r)n-t_1(t_1s_1)-t_2(t_1s_1+t_2s_2)-\cdots-t_r(t_1s_1+t_2s_2+\cdots+t_rs_r)}\\&=p^{rn-t_1(t_1s_1)-t_2(t_1s_1+t_2s_2)-\cdots-t_r(t_1s_1+t_2s_2+\cdots+t_rs_r)}<p^{rn},\end{aligned}$$

于是, 我们可以得到

$$\begin{aligned}|\alpha|\leqslant|\mathrm{Aut}P|&=\prod_{i=2}^{r}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)t_i}\times\prod_{i=1}^{r}|GL(t_i,Z_p)|\times\prod_{i=1}^{r}|\Phi_i|^{t_i}\times\prod_{i=1}^{r}p^{t_i(n-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)}\\&<p^{er^2}p^{r^2}p^{(e-1)r^2}p^{rn}\\&=p^{2er^2+rn}.\end{aligned}$$

因此 $|\alpha|\leqslant p^{2er^2+rn}-1$.

文 [7–8] 确定了换位子群为 p 阶群的有限 p-群的自同构群的结构, 研究了这类群的自同构群的阶何时达到最大值和最小值. 下面我们要考虑部分 Frattini 子群为 p 阶群的有限 p-群的自同构群的阶何时达到最大值和最小值. 首先给出一个引理.

引理 2.1 [9] 设 p 是一个奇素数, P 是一个超特殊 p-群且其阶为 p^{2n+1}, Aut_cP 是 $\mathrm{Aut}P$ 中平凡地作用在 ζP 上的元素形成的正规子群, 则 $\mathrm{Aut}P=\langle\theta\rangle\mathrm{Aut}_cP$, 其中 θ 的阶是 $p-1$, $\mathrm{Aut}_cP\cap\langle\theta\rangle=1$, $\mathrm{Aut}_cP/\mathrm{Inn}P$ 可以嵌入到 $\mathrm{Sp}(2n,p)$ 中. 进一步,

(i) 如果 P 的幂指数是 p, 那么 $\mathrm{Aut}_cP/\mathrm{Inn}P\cong\mathrm{Sp}(2n,p)$, 其中 $\mathrm{Sp}(2n,p)$ 的阶是 $p^{n^2}\prod\limits_{i=1}^{n}(p^{2i}-1)$.

(ii) 如果 P 的幂指数是 p^2, 那么 $\mathrm{Aut}_cP/\mathrm{Inn}P$ 是 $\mathrm{Sp}(2n-2,p)$ 和一个 p^{2n-1} 阶正规的超特殊群的半直积 (如果 $n=1$, 那么 $\mathrm{Aut}_cP/\mathrm{Inn}P$ 是 p 阶群).

定理 2.4 设 p 是一个奇素数, 对于 Frattini 子群是 p 阶群的 p^{2n+1} 阶有限 Abel 群和

Frattini 子群与导群都是 p 阶群的 p^{2n+1} 阶有限非 Abel 群, 我们有下面的结果:

(i) 当 $n=1$ 时, 幂指数是 p 的非 Abel p-群的自同构群的阶最大, 最大阶数是

$$p^3(p-1)(p^2-1);$$

幂指数是 p^2 的非 Abel p-群的自同构群的阶最小, 最小阶数是

$$p^3(p-1).$$

(ii) 当 $n\geqslant 2$ 时, Abel p-群的自同构群的阶最大, 最大阶数是

$$p^{2n^2+n}(p-1)(p^2-1)(p^3-1)\cdots(p^{2n-2}-1)(p^{2n-1}-1);$$

幂指数是 p^2 的非 Abel p-群的自同构群的阶最小, 最小阶数是

$$p^{n^2+2n}(p-1)(p^2-1)(p^4-1)\cdots(p^{2(n-1)}-1).$$

证 (i) 当 $n=1$ 时, P 的阶是 p^3. 如果 P 是 Frattini 子群为 p 阶群的 Abel 群, 那么 P 的型不变量是 $(2,1)$. 由定理 1.1 知

$$\begin{aligned}|\mathrm{Aut}P|&=p^{s_2t_1t_2}|GL(1,Z_p)||GL(1,Z_p)|p^{(s_1-1)t_1}p^{(s_2-1)t_2}p^{t_1(3-t_1s_1)}p^{t_2(3-s_1t_1-s_2t_2)}\\&=p(p-1)(p-1)pp\\&=p^3(p-1)(p-1).\end{aligned}$$

如果 P 是 Frattini 子群和导群都为 p 阶群的非 Abel p-群, 那么 P 是一个超特殊 p-群. 由引理 2.1 知, 当 P 的幂指数是 p 时,

$$\begin{aligned}|\mathrm{Aut}P|&=|\langle\theta\rangle||\mathrm{Aut}_cP|=(p-1)|\mathrm{Inn}P||\mathrm{Sp}(2,p)|\\&=(p-1)|P/\zeta P|p(p^2-1)\\&=(p-1)p^2p(p^2-1)\\&=p^3(p-1)(p^2-1);\end{aligned}$$

当 P 的幂指数是 p^2 时,

$$\begin{aligned}|\mathrm{Aut}P|&=|\langle\theta\rangle||\mathrm{Aut}_cP|=(p-1)p|\mathrm{Inn}P|\\&=(p-1)p|P/\zeta P|\\&=(p-1)pp^2\\&=p^3(p-1).\end{aligned}$$

注意到

$$p^3(p-1)<p^3(p-1)(p-1)<p^3(p-1)(p^2-1),$$

因此幂指数是 p 的非 Abel p-群的自同构群的阶最大, 幂指数是 p^2 的非 Abel p-群的自同构群的阶最小.

(ii) 当 $n\geqslant 2$ 时, 如果 P 是 Frattini 子群为 p 阶群的 Abel 群, 那么 P 的型不变量是

$$(2,\underbrace{1,1,\cdots,1}_{2n-1}).$$

由定理 1.1 知 $s_1=2,\ s_2=1,\ t_1=1,\ t_2=2n-1,\ |\Phi_i|=p^{(s_i-1)t_i}$. 因此

$$\begin{aligned}|\mathrm{Aut}P|&=\prod_{i=2}^{r}p^{s_i(\sum\limits_{k=1}^{i-1}t_k)t_i}\times\prod_{i=1}^{r}|GL(t_i,Z_p)|\times\prod_{i=1}^{r}|\Phi_i|^{t_i}\times\prod_{i=1}^{r}p^{t_i(2n+1-\sum\limits_{k=1}^{i}t_ks_k)}\\&=p^{s_2t_1t_2}|GL(t_1,Z_p)||GL(t_2,Z_p)||\Phi_1|^{t_1}|\Phi_2|^{t_2}p^{t_1(2n+1-t_1s_1)}p^{t_2(2n+1-t_1s_1-t_2s_2)}\\&=p^{2n-1}p^{2n-1}p(p-1)(p^{2n-1}-p^{2n-2})(p^{2n-1}-p^{2n-3})\cdots(p^{2n-1}-p)(p^{2n-1}-1)\\&=p^{2n^2+n}(p-1)(p^2-1)(p^3-1)\cdots(p^{2n-2}-1)(p^{2n-1}-1).\end{aligned}$$

如果 P 是 Frattini 子群和导群都是 p 阶群的非 Abel 群, 那么 P 是一个超特殊 p-群, 由引理 2.1 知 P 的幂指数是 p 时,

$$\begin{aligned}|\mathrm{Aut}P|&=|\langle\theta\rangle||\mathrm{Aut}_cP|=(p-1)|\mathrm{Inn}P||\mathrm{Sp}(2n,p)|\\&=(p-1)|P/\zeta P|p^{n^2}\prod_{i=1}^{n}(p^{2i}-1)\\&=(p-1)p^{2n}p^{n^2}(p^2-1)(p^4-1)\cdots(p^{2n}-1)\\&=p^{n^2+2n}(p-1)(p^2-1)(p^4-1)\cdots(p^{2n}-1);\end{aligned}$$

P 的幂指数是 p^2 时,

$$\begin{aligned}|\mathrm{Aut}P|&=|\langle\theta\rangle||\mathrm{Aut}_cP|=(p-1)|\mathrm{Inn}P||\mathrm{Sp}(2n-2,p)|p^{2n-1}\\&=(p-1)|P/\zeta P|p^{(n-1)^2}\prod_{i=1}^{n-1}(p^{2i}-1)p^{2n-1}\\&=(p-1)p^{2n}p^{(n-1)^2}(p^2-1)(p^4-1)\cdots(p^{2(n-1)}-1)p^{2n-1}\\&=p^{n^2+2n}(p-1)(p^2-1)(p^4-1)\cdots(p^{2(n-1)}-1).\end{aligned}$$

容易验证 $p^{n^2+2n}(p-1)(p^2-1)(p^4-1)\cdots(p^{2(n-1)}-1)<p^{n^2+2n}(p-1)(p^2-1)(p^4-1)\cdots(p^{2n}-1)<p^{2n^2+n}(p-1)(p^2-1)(p^3-1)\cdots(p^{2n-2}-1)(p^{2n-1}-1)$. 因此 Abel p-群的自同构群的阶最大, 幂指数是 p^2 的非 Abel p-群的自同构群的阶最小.

不难看出定理 2.4 只是研究了部分 Frattini 子群为 p 阶群的有限 p-群的自同构群的阶的大小关系. 受定理 2.4 的启发, 我们猜想: 设 p 是奇素数, $n>3$, P 是 Frattini 子群为 p 阶群的 p^n 阶群, 是否当 P 是 Abel 群时 $|\mathrm{Aut}P|$ 最大? 更广地, 设 P 是 Frattini 子群循环的 p^n 阶群, 其中 $n>3$, 是否当 P 是 Abel 群时 $|\mathrm{Aut}P|$ 最大? 这不是一个简单的问题, 值得我们进一步关注和研究.

致谢 作者感谢审稿人提出的宝贵意见.

参　考　文　献

[1] Gorenstein D. Finite groups [M]. New York: Harper and Row, 1968.

[2] Hall P. A contribution to the theory of groups of prime power order [J]. *Proc London Math Soc*, 1999, 36(2):29–95.

[3] 俞曙霞. 有限交换 p-群的自同构群的阶的几点注记 [J]. 数学杂志, 1983, 3(2):189–194.

[4] 俞曙霞. 有限交换 p-群的自同构群 [J]. 广西大学学报 (自然科学版), 1983, 8(2):90–95.

[5] 潘江敏. 有限 Abel 群的自同构群的阶 [J]. 云南大学学报 (自然科学版), 2003, 25(2):88–90.

[6] Horoševskii M V. On automorphisms of finite groups [J]. *Mat Sbornik*, 1974, 22(4):584–594.

[7] 徐行忠, 刘合国. 换位子群为 p 阶群的有限 p-群的自同构群 [J]. 中国科学: 数学, 2010, 40(11):1055–1078.

[8] 徐行忠, 刘合国. 换位子群为 p 阶群的有限 p-群的自同构群 (II) [J]. 中国科学: 数学, 2012, 42(1):1–11.

[9] Winter D. The automorphism group of an extraspecial p-group [J], *Rocky Mountain J Math*, 1972, 2(2):159–168.

On the Automorphism Groups of Finite Abelian *p*-Groups

XU Tao[1] LIU Heguo[2] YU Yang[2]

[1]Department of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, Hebei, China. E-mail: gtxutao@163.com

[2]College of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan 430062, China. E-mail: ghliu@hubu.edu.cn, 459193638@qq.com

Abstract Starting from the invariant of a finite abelian p-group P, the authors obtain the computational formula of the order of its automorphism group $\mathrm{Aut}P$. Three applications of this computational formula are given as follows. Firstly, they find some properties on the order of its automorphism group from two transformations of invariant of a finite abelian p-group. Secondly, they estimate the order of automorphism of a finite abelian p-group by a function depending on order, rank and exponent of this group. Thirdly, letting P be a finite p-group with Frattini subgroup of prime order, they give the conditions to guarantee the order of $\mathrm{Aut}P$ attains the maximal value or minimal value, respectively.

Keywords Finite abelian p-group, Automorphism group, Frattini subgroup

2000 MR Subject Classification 20D45