数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(2):211–230
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0017

一般时间区间 L^p-半鞅序列的单调极限定理*

石学军[1] 冯 群[2] 田德建[3] 江 龙[4]

提要 基于倒向随机微分方程 (BSDE) 和非线性期望理论中惩罚方法的启发, 研究并得到了一般时间区间上 L^p-半鞅序列的单调极限定理. 该结果的证明并非经典结果的平凡推广, 新的框架让我们面对许多新问题, 它将在一般框架下 g-上鞅的 Doob-Meyer 型分解以及受限 BSDE 解的存在性等问题的探索中发挥重要作用.

关键词 单调极限定理, 惩罚方法, 弱收敛, 非线性 Doob-Meyer 分解, 倒向随机微分方程
MR (2000) 主题分类 60H10
中图法分类 O211.6
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)02-0211-20

1 引 言

基于文 [1] 对有限时间区间上平方可积参数倒向随机微分方程 (BSDE) 的开创工作, 文 [2–3] 用惩罚方法分别独立研究了单边和双边障碍的反射倒向随机微分方程及相关问题. 借助单调极限定理, 文 [4] 进一步利用惩罚方法给出了非线性 g-上鞅的 Doob-Meyer 型分解以及一般限制 BSDE 最小 g-上解的存在性结果. 随后, 文 [5] 解决了单边及双边不规则平方可积障碍的反射倒向随机微分方程解的存在唯一性问题. 我们期望把所有依赖于单调极限定理的平方可积参数、有限时间区间的结果推广到 p-次可积和一般时间区间上, 因此一般框架下的单调极限定理在这些结果的证明中将发挥重要作用.

本文按如下结构组织主要内容: 在第 2 节, 给出表述问题所必需的记号和术语. 在第 3 节, 证明有限或无限一般时间区间上 L^p-半鞅序列的单调极限定理.

2 预备知识

给定概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 以及其上 d-维标准 Brown 运动 $(B_t)_{t\geqslant 0}$, 相应的自然 σ-域流 $\mathscr{F}_t:=\sigma\{B_s,0\leqslant s\leqslant t\}\vee\mathcal{N}$, 其中 $\mathcal{N}$ 是所有的 $\mathbb{P}$-可略集的集合, t 在有限或无限的一般时间区间 $[0,T]$ 中取值. 令 $|x|$ 表示元素 x 的 Euclid 范数. 对于参数 $p\geqslant 1$, $L^p(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})$ 是

本文 2016 年 3 月 12 日收到, 2018 年 3 月 20 日收到修改稿.
[1]山东师范大学数学与统计学院, 济南 250014. E-mail: shixuejun216@126.com
[2]济南大学商学院, 济南 250002. E-mail: sm_fengq@ujn.edu.cn
[3]中国矿业大学数学学院, 江苏 徐州 221008. E-mail: tiandejian1985@163.com
[4]通信作者. 中国矿业大学数学学院, 江苏 徐州 221008. E-mail: jianglong365@hotmail.com
*本文受到国家自然科学基金天元专项 (No. 11626146), 国家自然科学基金 (No. 71502071, No. 11371162, No. 11601509), 山东省自然科学基金 (No. ZR2016AP05, No. ZR2015PG001) 和江苏省自然科学基金 (No. BK20150167) 的资助.

所有 $\mathscr{F}_T$-可测并且满足 $\mathbb{E}[|\xi|^p]<+\infty$ 的随机变量集合. 接着, 我们引入下面的随机过程空间:

$$\mathscr{H}^p(0,T;\mathbb{R}^d):=\Big\{(\phi_t)_{t\in[0,T]}:\ \mathbb{R}^d\text{-值过程满足 }\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|\phi_t|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]<+\infty\Big\};$$

$$\mathscr{S}^p(0,T;\mathbb{R}):=\Big\{(\phi_t)_{t\in[0,T]}:\text{RCLL }\mathbb{R}\text{-值过程满足 }\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\phi_t|^p\Big]<+\infty\Big\};$$

$$\mathscr{A}^p(0,T;\mathbb{R}):=\Big\{(\phi_t)_{t\in[0,T]}:\ \mathscr{S}^p(0,T;\mathbb{R})\text{ 中的增过程且 }\phi(0)=0\ \Big\}.$$

对于给定的 $[0,T]$ 上确定性正值函数 κ 满足 $\int_0^T\kappa(t)\,\mathrm{d}t<+\infty$, 我们引入以 κ 为参数的空间:

$$\mathcal{H}^p_\kappa(0,T;\mathbb{R}^d):=\Big\{(\phi_t)_{t\in[0,T]}:\ \mathbb{R}^d\text{-值过程满足 }\mathbb{E}\int_0^T\kappa(t)|\phi_t|^p\,\mathrm{d}t<+\infty\Big\}.$$

如果 $\kappa\equiv1$, 则上面的过程记号写成 $\mathcal{H}^p(0,T;\mathbb{R}^d)$. 显然, 上述所有的随机过程空间在适当的范数下成为完备的 Banach 空间.

3 半鞅序列的单调极限

本节, 我们给出一般时间区间 $[0,T]$ 上的半鞅序列的单调极限结果. 半鞅序列的形式如下:

$$y^i_t=y^i_0+\int_0^t g^i_s\,\mathrm{d}s+\int_0^t z^i_s\,\mathrm{d}B_s-A^i_t+K^i_t,\quad t\in[0,T],\quad i=1,2,\cdots.\tag{3.1}$$

这里, 所有的过程都关于 Brown 运动生成的域流循序可测. 对于任意 i, $(g^i_t)_{t\in[0,T]}$ 满足

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|g^i_s|\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big]<+\infty.$$

空间 $\mathscr{A}^p(0,T;\mathbb{R})$ 中的过程序列 $\{(A^i_t)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 和 $\{(K^i_t)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 满足下面条件 (h1)–(h7).

(h1) $(A^i_t)_{t\in[0,T]}$ 是连续增过程, 满足 $A^i_0=0$ 和 $\mathbb{E}[|A^i_T|^p]<+\infty$;

(h2) $(K^i_t)_{t\in[0,T]}$ 是增过程且 $K^i_0=0$;

(h3) $K^j_t-K^j_s\geqslant K^i_t-K^i_s,\quad\forall 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\ \mathbb{P}-\text{a.s},\ \forall i\leqslant j$;

(h4) 对于任意 $t\in[0,T]$, $K^j_t\nearrow K_t$, 且 $\mathbb{E}[|K_T|^p]<+\infty$.

对于以 $i=1,2,\cdots$ 为指标的过程 $(y^i_t)_{t\in[0,T]}$, $(g^i_t)_{t\in[0,T]}$ 和 $(z^i_t)_{t\in[0,T]}$, 条件 (h5) 成立.

(h5) $(g^i_t)_{t\in[0,T]}$ 可以被两个正值过程之和控制, 即

$$|g^i_t|\leqslant\dot{g}_t+\ddot{g}^i_t,\quad t\in[0,T],$$

其中这两个过程满足如下 2 个条件:

(1) 第一个过程在下述意义可积

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\dot{g}_t\,\mathrm{d}t\Big)^p\Big]<+\infty;$$

(2) 对于第二个过程, 可以找到正实数 C 及正值函数 γ 满足 $\int_0^T \gamma^2(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$, 使得

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \Big|\frac{\ddot{g}_t^i}{\gamma(t)}\Big|^2 \mathrm{d}t\Big)^{\frac{p}{2}}\Big] \leqslant C, \quad \forall i \geqslant 1.$$

(h6) $(z_t^i)_{0\in[0,T]}$ 在空间 $\mathscr{H}^p(0,T;\mathbb{R})$ 中有界, 即

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |z_t^i|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{p}{2}}\Big] \leqslant C, \quad \forall i \geqslant 1.$$

(h7) 半鞅序列 $\{(y_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 单调递增且逐点收敛到过程 $(y_t)_{t\in[0,T]}$, 并满足

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |y_t|^p\Big] < +\infty.$$

在证明一般的单调极限定理之前, 我们先引入下面的引理.

引理 3.1　令 $(A_t)_{t\in[0,T]}$ 是定义在 $[0,T]$ 上的 RCLL 增过程, 满足 $A_0 = 0$ 和 $\mathbb{E}[(A_T)^p] < +\infty$, 则对于任意 $\varepsilon, \delta > 0$ 以及可积函数 κ: $[0,T] \mapsto \mathbb{R}^+$, 存在有限对停时 $\{\sigma_k, \tau_k\}$, $k = 0,1,2,\cdots,N$ 且 $\sigma_0 = 0 \leqslant \sigma_k \leqslant \tau_k \leqslant T = \sigma_{N+1}$, 使得

(i) $(\sigma_j, \tau_j] \cap (\sigma_k, \tau_k] = \emptyset$, 对任意 $j \neq k$;

(ii) $\sum\limits_{k=0}^{N} \mathbb{E}\int_0^T \kappa(s)\mathbb{1}_{(\tau_k,\sigma_{k+1}]}(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon$;

(iii) $\sum\limits_{k=0}^{N} \mathbb{E} \sum\limits_{\sigma_k < t \leqslant \tau_k} (\Delta A_t)^p \leqslant \delta$.

证　首先用附录中的引理 4.2 构造一个非减的停时序列 $\{\sigma_k\}_{k=0}^{N+1}$, 满足 $\sigma_0 = 0$ 和 $\sigma_{N+1} = T$, 当 $\sigma_k < T$ 时有 $\sigma_k < \sigma_{k+1}$, 并且有

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbb{E} \sum_{t\in(\sigma_k,\sigma_{k+1})} (\Delta A_t)^p \leqslant \delta,$$

则对于任意 $0 \leqslant k \leqslant N$, 应用附录中的引理 4.1 来构造逼近停时序列 $\{\tau_k^i\}_{i=1}^{+\infty}$, 满足 $\tau_k^i < \sigma_{k+1}$ 和 $\tau_k^i \uparrow \sigma_{k+1}$. 注意到

$$\sum_{k=0}^{N} \kappa(s)\mathbb{1}_{(\tau_k^i,\sigma_{k+1}]}(s) \leqslant N\kappa(s), \quad \forall s \in [0,T],$$

以及

$$N\int_0^T \kappa(t)\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

则应用控制收敛定理, 得到

$$\mathbb{E}\int_0^T \sum_{k=0}^{N} \kappa(s)\mathbb{1}_{(\tau_k^i,\sigma_{k+1}]}(s)\,\mathrm{d}s \longrightarrow 0, \quad i \longrightarrow +\infty.$$

因此, 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在有限整数 $n_0 > 0$, 使得

$$\mathbb{E}\int_0^T \sum_{k=0}^{N} \kappa(s)\mathbb{1}_{(\tau_k^{n_0},\sigma_{k+1}]}(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon.$$

最后, 令

$$\tau_0 = \tau_0^{n_0}, \quad \tau_1 = \sigma_1 \vee \tau_1^{n_0}, \quad \cdots, \quad \tau_N = \sigma_N \vee \tau_N^{n_0},$$

显然 $\tau_k \in [\sigma_k, \sigma_{k+1}) \cap [\tau_k^{n_0}, \sigma_{k+1}]$. 可以得到当 $\sigma_k < T$ 时, 有 $\tau_k \leqslant \sigma_{k+1}$. 因此 $(\sigma_k, \tau_k] \subset (\sigma_k, \sigma_{k+1})$, 可以推出

$$\mathbb{E}\int_0^T \sum_{k=0}^N \kappa(s)\mathbb{1}_{(\tau_k,\sigma_{k+1}]}(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon,$$

和

$$\sum_{k=0}^N \mathbb{E}\sum_{t\in(\sigma_k,\tau_k]}(\Delta A_t)^p \leqslant \sum_{k=0}^N \mathbb{E}\sum_{t\in(\sigma_k,\sigma_{k+1})}(\Delta A_t)^p \leqslant \delta.$$

因此结论 (i)–(iii) 成立.

现在, 我们开始证明本文的主要结果 ——L^p-半鞅序列的单调极限定理.

定理 3.1 假定半鞅序列 (3.1) 满足条件 (h1)–(h7) 且 $p > 1$, 则其极限过程 $(y_t)_{t\in[0,T]}$ 有下面的形式

$$y_t = y_0 + \int_0^t g_s^0\,\mathrm{d}s + \int_0^t z_s\,\mathrm{d}B_s - A_t + K_t, \quad t\in[0,T],$$

其中 $(z_t)_{t\in[0,T]}$ 是 $\{(z_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 在空间 $\mathscr{H}^p(0,T;\mathbb{R}^d)$ 中的弱极限, 并且对于任意满足 $\int_0^T \alpha^2(s)\,\mathrm{d}s < +\infty$ 的确定性正值函数 $\alpha(\cdot) : [0,T] \mapsto \mathbb{R}$ 和任意实数 $q \in [1,p)$, 序列 $\big\{\big(\frac{z_t^i}{\alpha(t)}\big)_{t\in[0,T]}\big\}_{i=1}^{+\infty}$ 在空间 $\mathcal{H}^q_{\alpha^2}(0,T;\mathbb{R}^d)$ 中收敛到 $\big(\frac{z_t}{\alpha(t)}\big)_{t\in[0,T]}$, 即

$$\mathbb{E}\int_0^T \alpha^2(t)\Big|\frac{z_t^i - z_t}{\alpha(t)}\Big|^q\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0, \quad i\longrightarrow +\infty, \tag{3.2}$$

并且对于任意 t, A_t 是序列 $\{A_t^i\}_{i=1}^{+\infty}$ 在空间 $L^p(\Omega,\mathscr{F}_t,\mathbb{P})$ 中的弱极限, 过程 $(g_t^0)_{t\in[0,T]}$ 是序列 $\{(g_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 在空间 $\mathcal{H}^1(0,T;\mathbb{R})$ 中的弱极限, 满足 $\mathbb{E}\big[\big(\int_0^T |g_s^0|\,\mathrm{d}s\big)^p\big] < +\infty$.

证 令 C 为可变的正常数, 其取值可以根据证明的需要而定. 该定理的证明分为 3 步:

步骤 1 说明过程序列 $\{(g_s^i)_{s\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 和 $\{(z_s^i)_{s\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 分别在空间 $\mathcal{H}^1(0,T;\mathbb{R})$ 和 $\mathscr{H}^p(0,T;\mathbb{R}^d)$ 中相对弱紧.

首先根据条件 (h5), 我们可以说明

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |g_s^i|\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big]\\
&\leqslant 2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \dot{g}_s\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big] + 2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \ddot{g}_s^i\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big]\\
&\leqslant 2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \dot{g}_s\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big] + 2\Big(\int_0^T \gamma^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \Big|\frac{\ddot{g}_s^i}{\gamma(s)}\Big|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\
&\leqslant 2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \dot{g}_s\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big] + 2C\Big(\int_0^T \gamma^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}} < +\infty.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

对任意满足 $A_n \supset A_{n+1}$ 和 $A_n \downarrow \emptyset$ 的循序可测集序列 $A_n, n\geqslant 1$, 有

$$\mathbb{E}\int_0^T \mathbb{1}_{A_n}|g_s^i|\,\mathrm{d}s \leqslant \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{1}_{A_n}|\ddot{g}_s^i|\,\mathrm{d}s + \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{1}_{A_n}\dot{g}_s\,\mathrm{d}s,$$

和

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^T \mathbb{1}_{A_n}|\ddot{g}_s^i|\,\mathrm{d}s\\ \leqslant&\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \mathbb{1}_{A_n}\gamma^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2(p-1)}}\Big]\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \Big|\frac{\ddot{g}_s^i}{\gamma(s)}\Big|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\Big)^{\frac{1}{p}}\\ \leqslant&\, C\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \mathbb{1}_{A_n}\gamma^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2(p-1)}}\Big]\Big)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

注意到

$$\mathbb{1}_{A_n}\gamma^2(s)\leqslant\gamma^2(s),\quad \mathbb{1}_{A_n}\dot{g}_s\leqslant\dot{g}_s,\quad \forall s\in[0,T],$$

和

$$\int_0^T\gamma^2(s)\,\mathrm{d}s<+\infty,\quad \mathbb{E}\int_0^T\dot{g}_s\,\mathrm{d}s<+\infty,$$

则根据 Lebesgue 控制收敛定理, 可以推得

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \mathbb{1}_{A_n}\gamma^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2(p-1)}}\Big]=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{1}_{A_n}|\dot{g}_s|\,\mathrm{d}s=0.$$

而且, 从上面的结果, 可知

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_i\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{1}_{A_n}|g_s^i|\,\mathrm{d}s=0.$$

进一步, 也可以得到

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_i\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{1}_{A_n}g_s^i\,\mathrm{d}s=0.$$

实际上,

$$-\sup_i\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{1}_{A_n}|g_s^i|\,\mathrm{d}s\leqslant\sup_i\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{1}_{A_n}g_s^i\,\mathrm{d}s\leqslant\sup_i\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{1}_{A_n}|g_s^i|\,\mathrm{d}s,$$

则立即可得

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_i\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{1}_{A_n}g_s^i\,\mathrm{d}s=0.$$

现在, 根据附录中的引理 4.3, 可得 $\{(g_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 有一子列, 在空间 $\mathcal{H}^1(0,T;\mathbb{R})$ 中弱收敛到 $(g_t^0)_{t\in[0,T]}$.

其次, 由于 $\mathbb{E}\big[\big(\int_0^T|z_t^i|^2\,\mathrm{d}t\big)^{\frac{p}{2}}\big]\leqslant C$, 则 $\{(z_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 存在一子列在 $\mathscr{H}^p(0,T;\mathbb{R})$ 中弱收敛到 $(z_t)_{t\in[0,T]}$. 记

$$A_t:=y_0-y_t+\int_0^t g_s^0\,\mathrm{d}s+\int_0^t z_s\,\mathrm{d}B_s+K_t,\quad \forall t\in[0,T],\tag{3.4}$$

则易知其为一可选过程, 且过程 $(y_t)_{t\in[0,T]}$ 可以写成

$$y_t=y_0+\int_0^t g_s^0\,\mathrm{d}s+\int_0^t z_s\,\mathrm{d}B_s-A_t+K_t,\quad t\in[0,T].$$

步骤 2 在下面的子步骤 (1)–(4) 中, 我们将验证如上定义的过程 $(A_t)_{t\in[0,T]}$ 是一增过程且 $A_0=0$.

(1) 为了证明该结果, 首先说明对于任意停时 $\sigma \in [0,T]$, 当 $i \longrightarrow +\infty$ 时, 有下面的弱收敛结果成立

$$\int_0^\sigma z_s^i \,\mathrm{d}B_s \xrightharpoonup{L^p(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})} \int_0^\sigma z_s \,\mathrm{d}B_s.$$

令 ζ 是空间 $L^q(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})$ 中的随机变量, 其中 q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则根据鞅表示定理, 有

$$\zeta_t := \mathbb{E}[\zeta|\mathscr{F}_t] = \mathbb{E}[\zeta] + \int_0^t \varrho_s \,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0,T],$$

其中 $\mathbb{R}^d$-值过程 $(\varrho_t)_{t\in[0,T]}$ 循序可测且满足

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |\varrho_s|^2 \,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{q}{2}}\Big] < +\infty,$$

则对于任意固定的停时 $\sigma \in [0,T]$, 在 $[0,T]$ 上对 $\zeta_t \int_0^t \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant \sigma\}} z_s^i \,\mathrm{d}B_s$ 应用 Itô 公式, 可得

$$\begin{aligned}
\zeta \cdot \int_0^\sigma z_s^i \,\mathrm{d}B_s &= \zeta \cdot \int_0^T \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant \sigma\}} z_s^i \,\mathrm{d}B_s \\
&= \int_0^T \zeta_s \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant \sigma\}} z_s^i \,\mathrm{d}B_s + \int_0^T \Big(\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant \sigma\}} z_r^i \,\mathrm{d}B_r\Big)\varrho_s \,\mathrm{d}B_s \\
&\quad + \int_0^T \varrho_s \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant \sigma\}} z_s^i \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

根据 Doob 不等式和 BDG 不等式, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t \zeta_s \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant \sigma\}} z_s^i \,\mathrm{d}B_s\Big|\Big] \\
&\leqslant C\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |\zeta_s \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant \sigma\}} z_s^i|^2 \,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \\
&\leqslant C\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\zeta_s| \cdot \Big(\int_0^T |\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant \sigma\}} z_s^i|^2 \,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \\
&\leqslant C(\mathbb{E}[|\zeta|^q])^{\frac{1}{q}}\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant \sigma\}} z_s^i|^2 \,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

由于随机变量 ζ 属于空间 $L^q(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})$ 并且过程序列 $\{(z_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 在空间 $\mathscr{H}^p(0,T;\mathbb{R}^d)$ 中有界, 可以推出

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t \zeta_s \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant \sigma\}} z_s^i \,\mathrm{d}B_s\Big|\Big] < +\infty.$$

因此, $\big(\int_0^t \zeta_s \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant \sigma\}} z_s^i \,\mathrm{d}B_s\big)_{t\in[0,T]}$ 是一致可积鞅, 则有

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T \zeta_s \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant \sigma\}} z_s^i \,\mathrm{d}B_s\Big] = 0.$$

类似地, 根据 BDG 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t \Big(\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant \sigma\}} z_r^i \,\mathrm{d}B_r\Big)\varrho_s \,\mathrm{d}B_s\Big|\Big] \\
&\leqslant C\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \Big|\Big(\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant \sigma\}} z_r^i \,\mathrm{d}B_r\Big)\varrho_s\Big|^2 \,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]
\end{aligned}$$

$$\leqslant C\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\Big|\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant\sigma\}} z_r^i \,\mathrm{d}B_r\Big|\Big(\int_0^T |\varrho_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big],$$

和

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t\Big(\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant\sigma\}} z_r^i\,\mathrm{d}B_r\Big)\varrho_s\,\mathrm{d}B_s\Big|\Big]\\
&\leqslant C\Big(\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\Big|\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant\sigma\}} z_r^i\,\mathrm{d}B_r\Big|^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \big|\varrho_s\big|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{q}{2}}\Big]\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant C\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}} z_s^i|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\Big)^{\frac{1}{p}}\cdot\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |\varrho_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{q}{2}}\Big]\Big)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

则可推出

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t\Big(\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant\sigma\}} z_r^i\,\mathrm{d}B_r\Big)\varrho_s\,\mathrm{d}B_s\Big|\Big]<+\infty.$$

所以, 由随机积分定义的过程为一个零均值鞅, 即有

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T\Big(\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant\sigma\}} z_r^i\,\mathrm{d}B_r\Big)\varrho_s\,\mathrm{d}B_s\Big]=0.$$

因此, 可以得到

$$\mathbb{E}\Big[\zeta\cdot\int_0^\sigma z_s^i\,\mathrm{d}B_s\Big]=\mathbb{E}\Big[\int_0^T \varrho_s\cdot\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}} z_s^i\,\mathrm{d}s\Big].$$

根据序列 $\{(z_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 在空间 $\mathscr{H}^p(0,T;\mathbb{R}^d)$ 中的弱收敛性并且过程 $(\varrho_t)_{t\in[0,T]}$ 属于空间 $\mathscr{H}^q(0,T;\mathbb{R}^d)$, 有

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T \varrho_s\cdot\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}} z_s^i\,\mathrm{d}s\Big]\longrightarrow\mathbb{E}\Big[\int_0^T \varrho_s\cdot\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}} z_s\,\mathrm{d}s\Big],\quad i\longrightarrow+\infty.$$

再观察到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\int_0^T \varrho_s\cdot\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}} z_s\,\mathrm{d}s\Big]&=\mathbb{E}\Big[\Big(\mathbb{E}[\zeta]+\int_0^T\varrho_s\,\mathrm{d}B_s\Big)\int_0^T \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}} z_s\,\mathrm{d}B_s\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[\zeta\int_0^\sigma z_s\,\mathrm{d}B_s\Big],
\end{aligned}$$

则有 $\mathbb{E}[\zeta\cdot\int_0^\sigma z_s^i\,\mathrm{d}B_s]\longrightarrow\mathbb{E}[\zeta\cdot\int_0^\sigma z_s\,\mathrm{d}B_s]$, 这意味着

$$\int_0^\sigma z_s^i\,\mathrm{d}B_s\rightharpoonup\int_0^\sigma z_s\,\mathrm{d}B_s \text{ 弱收敛于 } L^p(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P}),\quad i\longrightarrow+\infty.$$

(2) 对于任意停时 $\sigma\in[0,T]$, 当 $i\longrightarrow+\infty$ 时,

$$\int_0^\sigma g_s^i\,\mathrm{d}s\xrightharpoonup{L^p(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})}\int_0^\sigma g_s^0\,\mathrm{d}s.$$

现在进一步限制随机变量 ζ 在概率 $\mathbb{P}$ 下有界. 再应用 Itô 公式, 可得

$$\begin{aligned}
\zeta\cdot\int_0^\sigma g_s^i\,\mathrm{d}s&=\zeta\cdot\int_0^T \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}} g_s^i\,\mathrm{d}s\\
&=\int_0^T \zeta_s\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}} g_s^i\,\mathrm{d}s+\int_0^T\Big(\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant\sigma\}} g_r^i\,\mathrm{d}B_r\Big)\varrho_s\,\mathrm{d}B_s.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

根据 BDG 不等式, 推出

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t\Big(\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant\sigma\}}g_r^i\,\mathrm{d}r\Big)\varrho_s\,\mathrm{d}B_s\Big|\Big]\\
\leqslant{}& C\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\Big|\Big(\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant\sigma\}}g_r^i\,\mathrm{d}r\Big)\varrho_s\Big|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\\
\leqslant{}& C\mathbb{E}\Big[\int_0^T \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}}|g_s^i|\,\mathrm{d}s\Big(\int_0^T|\varrho_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\\
\leqslant{}& C\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|g_s^i|\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|\varrho_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^q\Big]\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T\Big(\int_0^s \mathbb{1}_{\{0\leqslant r\leqslant\sigma\}}g_r^i\,\mathrm{d}B_r\Big)\varrho_s\,\mathrm{d}B_s\Big]=0.$$

现在在 (3.5) 两边分别取期望, 可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\zeta\cdot\int_0^\sigma g_s^i\,\mathrm{d}s\Big]&=\mathbb{E}\Big[\zeta\cdot\int_0^T \mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}}g_s^i\,\mathrm{d}s\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[\int_0^T\zeta_s\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}}g_s^i\,\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}$$

注意到过程 $(\zeta_t)_{t\in[0,T]}$ 有界并且序列 $\{(g_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 在空间 $\mathcal{H}^1(0,T;\mathbb{R})$ 中存在弱收敛子列, 其极限为 $(g_t^0)_{t\in[0,T]}$, 则有

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T\zeta_s\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}}g_s^i\,\mathrm{d}s\Big]\longrightarrow\mathbb{E}\Big[\int_0^T\zeta_s\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}}g_s^0\,\mathrm{d}s\Big],\quad i\to+\infty,$$

则根据条件期望的性质和 Fubini 定理, 可推出

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\int_0^T\zeta_s\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}}g_s^0\,\mathrm{d}s\Big]\\
={}&\int_0^T\mathbb{E}[\mathbb{E}[\zeta|\mathscr{F}_s]\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}}g_s^0]\,\mathrm{d}s\\
={}&\int_0^T\mathbb{E}[\mathbb{E}[\zeta\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}}g_s^0|\mathscr{F}_s]]\,\mathrm{d}s\\
={}&\int_0^T\mathbb{E}[\zeta\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}}g_s^0]\,\mathrm{d}s\\
={}&\mathbb{E}\Big[\int_0^T\zeta\mathbb{1}_{\{0\leqslant s\leqslant\sigma\}}g_s^0\,\mathrm{d}s\Big]\\
={}&\mathbb{E}\Big[\zeta\int_0^\sigma g_s^0\,\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}$$

结合如上讨论, 有 $\mathbb{E}[\zeta\cdot\int_0^\sigma g_s^i\,\mathrm{d}s]\longrightarrow\mathbb{E}[\zeta\cdot\int_0^\sigma g_s^0\,\mathrm{d}s]$, 这意味着

$$\int_0^\sigma g_s^i\,\mathrm{d}s\rightharpoonup\int_0^\sigma g_s^0\,\mathrm{d}s\ \text{于}\ L^1(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P}),\quad i\to+\infty.$$

另一方面, 注意到 (3.3) 意味着序列 $\big\{\int_0^\sigma g_s^i\,\mathrm{d}s\big\}_{i=1}^{+\infty}$ 在空间 $L^p(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})$ 中有界, 即 $\mathbb{E}\big[\big|\int_0^T g_s^i\,\mathrm{d}s\big|^p\big]\leqslant C$, 我们可以得到有子列在此空间中弱收敛, 因此, 我们可以选择一子列在空间 $L^1(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})$ 和 $L^p(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})$ 中均弱收敛. 则 $L^p(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})$ 空间中的弱极限点

即为 $L^1(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})$ 中的弱极限点 $\int_0^\sigma g_s^0\,\mathrm{d}s$, 这意味着

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^\sigma g_s^0\,\mathrm{d}s\Big|^p\Big] < +\infty, \quad \forall\sigma\in[0,T].$$

(3) 事实上, 我们也能得到

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |g_s^0|\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big] < +\infty.$$

对序列 $\{(g_s^i)_{s\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 采用类似的讨论, 可以说明过程序列 $\{(-|g_s|^i)_{s\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 和 $\{(|g_s|^i)_{s\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$, 当 $i\longrightarrow+\infty$ 时, 有

$$(-|g_s^i|)_{s\in[0,T]} \rightharpoonup (\underline{g}_s^0)_{s\in[0,T]}, \quad 于\,\mathcal{H}^1(0,T;\mathbb{R}),$$

和

$$(|g_s^i|)_{s\in[0,T]} \rightharpoonup (\overline{g}_s^0)_{s\in[0,T]}, \quad 于\,\mathcal{H}^1(0,T;\mathbb{R}),$$

且

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^T \underline{g}_s^0\,\mathrm{d}s\Big|^p\Big] < +\infty,$$

和

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^T \overline{g}_s^0\,\mathrm{d}s\Big|^p\Big] < +\infty.$$

注意到

$$-|g_s^i| \leqslant g_s^i \leqslant |g_s^i|, \quad -|g_s^i| \leqslant 0 \leqslant |g_s^i|, \quad \forall s\in[0,T],$$

则过程在空间 $\mathcal{H}^1(0,T;\mathbb{R})$ 中的弱收敛意味着

$$\underline{g}_s^0 \leqslant g_s^0 \leqslant \overline{g}_s^0, \quad \underline{g}_s^0 \leqslant 0 \leqslant \overline{g}_s^0, \quad \forall s\in[0,T].$$

根据

$$|g_s^0| \leqslant |\underline{g}_s^0| + |\overline{g}_s^0| = -\underline{g}_s^0 + \overline{g}_s^0, \quad s\in[0,T],$$

可以推出

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |g_s^0|\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big] \leqslant 2\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^T \underline{g}_s^0\,\mathrm{d}s\Big|^p\Big] + 2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \overline{g}_s^0\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big] < +\infty.$$

(4) 对任意停时 $\sigma\in[0,T]$, 序列 $\{A_\sigma^i\}_{i=1}^{+\infty}$ 至少存在一子列, 在空间 $L^p(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})$ 中弱收敛到 A_σ 并且 $(A_t)_{t\in[0,T]}$ 是一增过程.

首先从关于序列 $\{(y_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 的假设 (h7), 推出

$$y_\sigma^i \longrightarrow y_\sigma,\ |y_\sigma^i|^p \leqslant 2|y_\sigma^1|^p + 2|y_\sigma|^p$$

且

$$\mathbb{E}[|y_\sigma^1|^p + |y_\sigma|^p] \leqslant \mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|y_t|^p\Big] + \mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|y_t^1|^p\Big] < +\infty.$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理, 可以得到 $\lim\limits_{i\to+\infty}\mathbb{E}[|y_\sigma^i - y_\sigma|^p] = 0$. 因此, 下面的弱收敛结果成立, 即当 $i\longrightarrow+\infty$ 时, 有

$$y_\sigma^i \xrightarrow{L^p(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})} y_\sigma, \quad K_\sigma^i \xrightarrow{L^p(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathbb{P})} K_\sigma. \tag{3.6}$$

由于

$$A_\sigma^i = y_0^i - y_\sigma^i + \int_0^\sigma g_s^i \,\mathrm{d}s + \int_0^\sigma z_s^i \,\mathrm{d}B_s + K_\sigma^i,$$

可以得到如下 $L^p(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathbb{P})$ 的弱收敛结果:

$$A_\sigma^i \rightharpoonup A_\sigma = y_0 - y_\sigma + \int_0^\sigma g_s^0 \,\mathrm{d}s + \int_0^\sigma z_s \,\mathrm{d}B_s + K_\sigma.$$

对于任意 $t \in [0, T)$, 可以推出除去一个 $\mathbb{P}$-可略集, 有

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{s\searrow t} y_s &= \lim_{n\to+\infty} \inf_{s\in(t,(t+2^{-n})\wedge T)} y_s = \lim_{n\to+\infty} \inf_{s\in(t,(t+2^{-n})\wedge T)} \lim_{m\to+\infty} y_s^m \\ &\geqslant \lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \inf_{s\in(t,(t+2^{-n})\wedge T)} y_s^m = \lim_{m\to+\infty} \underline{\lim}_{s\searrow t} y_s^m = \lim_{m\to+\infty} y_t^m = y_t,\end{aligned}$$

和

$$y_t = y_0 + \int_0^t g_s^0 \,\mathrm{d}s + \int_0^t z_s \,\mathrm{d}B_s - A_t + K_t, \quad t \in [0, T].$$

如果令

$$\breve{Y}_t = y_0 + \int_0^t g_s^0 \,\mathrm{d}s + \int_0^t z_s \,\mathrm{d}B_s + K_t, \quad t \in [0, T],$$

则根据附录中的引理 4.5 可知, $(\breve{Y}_s)_{s\in[0,T]}$ 是一 RCLL 过程且

$$y_t = \breve{Y}_t - A_t, \quad \forall\, t \in [0, T].$$

现在, 我们有

$$\underline{\lim}_{s\searrow t} y_s = \underline{\lim}_{s\searrow t} (\breve{Y}_s - A_s) = \lim_{s\searrow t} \breve{Y}_s + \underline{\lim}_{s\searrow t} (-A_s) = \breve{Y}_t - \overline{\lim}_{s\searrow t} A_s \geqslant \breve{Y}_t - A_t.$$

这意味着 $\forall t \in [0, T)$, $\overline{\lim}_{s\searrow t} A_s \leqslant A_t$.

容易验证 $\mathbb{E}[A_T^p] < +\infty$. 注意到对于任意两个停时 $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant T$ 且 $i \geqslant 1$, $A_{\sigma_1}^i \leqslant A_{\sigma_2}^i$ 成立, 取极限可以得到 $A_{\sigma_1} \leqslant A_{\sigma_2}$. 根据附录中的引理 4.4, 可得 $(A_t)_{t\in[0,T]}$ 是增过程. 因此 $A_t \leqslant \underline{\lim}_{s\searrow t} A_s \leqslant \overline{\lim}_{s\searrow t} A_s \leqslant A_t$. 所以 $(A_t)_{t\in[0,T]}$ 和 $(y_t)_{t\in[0,T]}$ 都是 RCLL 过程.

步骤 3 说明序列 $\{(z_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 在 (3.2) 的意义下强收敛.

对于任意停时 $\tau \in [0, T]$, 在区间 $(t, \tau] \subset [0, T]$ 上对 $|y_s^n - y_s|^p$ 应用 Itô 公式, 可得

$$\begin{aligned}|y_t^i - y_t|^p &= |y_\tau^i - y_\tau|^p - p\int_t^\tau |y_s^i - y_s|^{p-1} \,\mathrm{d}A_s^i + p\int_{(t,\tau]} |y_{s-}^i - y_{s-}|^{p-1} \,\mathrm{d}A_s \\ &\quad + p\int_t^\tau |y_{s-}^i - y_{s-}|^{p-1} \,\mathrm{d}K_s^i - p\int_{(t,\tau]} |y_{s-}^i - y_{s-}|^{p-1} \,\mathrm{d}K_s \\ &\quad + p\int_t^\tau |y_s^i - y_s|^{p-1}(g_s^i - g_s^0) \,\mathrm{d}s + p\int_t^\tau |y_s^i - y_s|^{p-1}(z_s^i - z_s) \,\mathrm{d}B_s \\ &\quad - \frac{1}{2}p(p-1)\int_t^\tau |y_s^i - y_s|^{p-2} \mathbb{1}_{\{y_s^i \neq y_s\}} |z_s^i - z_s|^2 \,\mathrm{d}s + T_1,\end{aligned}$$

其中 $T_1 := -\sum_{s\in(t,\tau]} \Delta(|y_s^i - y_s|^p) - p\sum_{s\in(t,\tau]} |y_{s-}^i - y_{s-}|^{p-1} \Delta(y_s^i - y_s)$.

这可以推出

$$
\begin{aligned}
|y_t^i-y_t|^p=&|y_\tau^i-y_\tau|^p-p\int_t^\tau |y_s^i-y_s|^{p-1}\,\mathrm{d}A_s^i+p\int_{(t,\tau]}|y_s^i-y_s|^{p-1}\,\mathrm{d}A_s\\
&+p\int_t^\tau |y_{s-}^i-y_{s-}|^{p-1}\,\mathrm{d}K_s^i-p\int_{(t,\tau]}|y_{s-}^i-y_{s-}|^{p-1}\,\mathrm{d}K_s\\
&+p\int_t^\tau |y_s^i-y_s|^{p-1}(g_s^i-g_s^0)\,\mathrm{d}s+p\int_t^\tau |y_s^i-y_s|^{p-1}(z_s^i-z_s)\,\mathrm{d}B_s\\
&-\frac{1}{2}p(p-1)\int_t^\tau |y_s^i-y_s|^{p-2}\mathbb{1}_{\{y_s^i\neq y_s\}}|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s+T_2+T_3,
\end{aligned}\tag{3.7}
$$

其中

$$
T_2:=-\sum_{s\in(t,\tau]}\Delta(|y_s^i-y_s|^p)-p\sum_{s\in(t,\tau]}|y_{s-}^i-y_{s-}|^{p-1}\Delta(y_s^i-y_s),
$$

且

$$
T_3:=p\sum_{s\in(t,\tau]}(|y_{s-}^i-y_{s-}|^{p-1}-|y_s^i-y_s|^{p-1})\Delta A_s.
$$

根据不等式 $a^p-b^p\leqslant pa^{p-1}(a-b)$, 其中 $a,b>0$ 且 $p\in(1,2]$, 令 $a=y_{s-}-y_{s-}^i$ 和 $b=y_s-y_s^i$, 有

$$
T_2=-\sum_{s\in(t,\tau]}\Delta(|y_s^i-y_s|^p)-p\sum_{s\in(t,\tau]}|y_{s-}^i-y_{s-}|^{p-1}\Delta(y_s^i-y_s)\leqslant 0.
$$

注意到

$$
y_{s-}-y_{s-}^i-y_s+y_s^i=\Delta K_s^i-\Delta K_s+\Delta A_s,
$$

且 $a^r-b^r\leqslant(a-b)^r$ 对于 $a>b>0$ 和 $0<r\leqslant 1$ 成立, 可以推出

$$
\begin{aligned}
T_3&=p\sum_{s\in(t,\tau]}(|y_{s-}^i-y_{s-}|^{p-1}-|y_s^i-y_s|^{p-1})\Delta A_s\\
&\leqslant p\sum_{s\in(t,\tau]}(y_{s-}-y_{s-}^i-y_s+y_s^i)^{p-1}\mathbb{1}_{\{y_{s-}-y_{s-}^i>y_s-y_s^i\}}\Delta A_s\\
&=p\sum_{s\in(t,\tau]}(\Delta K_s^i-\Delta K_s+\Delta A_s)^{p-1}\mathbb{1}_{\{\Delta K_s^i-\Delta K_s+\Delta A_s>0\}}\Delta A_s\\
&\leqslant p\sum_{s\in(t,\tau]}(\Delta A_s)^{p-1}\Delta A_s\\
&=p\sum_{s\in(t,\tau]}(\Delta A_s)^p.
\end{aligned}\tag{3.8}
$$

再注意到

$$
p\int_t^\tau |y_{s-}^i-y_{s-}|^{p-1}\,\mathrm{d}K_s^i-p\int_{(t,\tau]}|y_{s-}^i-y_{s-}|^{p-1}\,\mathrm{d}K_s\leqslant 0.
$$

所以, 根据上述不等式以及 (3.7) 和 (3.8), 可以得到

$$
|y_t^i-y_t|^p\leqslant|y_\tau^i-y_\tau|^p+p\int_{(t,\tau]}|y_s^i-y_s|^{p-1}\,\mathrm{d}A_s
$$

$$
\begin{aligned}
&+p\int_t^{\tau}|y_s^i-y_s|^{p-1}(g_s^i-g_s^0)\,\mathrm{d}s\\
&+p\int_t^{\tau}|y_s^i-y_s|^{p-1}(z_s^i-z_s)\,\mathrm{d}B_s\\
&-\frac{1}{2}p(p-1)\int_t^{\tau}|y_s^i-y_s|^{p-2}\mathbb{1}_{\{y_s^i\neq y_s\}}|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\\
&+p\sum_{s\in(t,\tau]}(\Delta A_s)^p. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

应用 BDG 不等式, 可以得到 $\big(M_t:=\int_0^t|y_s^i-y_s|^{p-1}(z_s^i-z_s)\,\mathrm{d}B_s\big)_{t\in[0,T]}$ 是一致可积鞅. 实际上, 由 Yong 不等式可推出

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_T^{\frac{1}{2}}]&\leqslant\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|y_s^i-y_s|^{p-1}\Big(\int_0^T|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\\
&\leqslant\frac{(p-1)}{p}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|y_s^i-y_s|^p\Big]+\frac{1}{p}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\
&<+\infty.
\end{aligned}
$$

现在回到不等式 (3.9), 替换 t 为停时 $\sigma\leqslant\tau$ 并取期望, 可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}p(p-1)\mathbb{E}\int_\sigma^{\tau}|y_s^i-y_s|^{p-2}\mathbb{1}_{\{y_s^i\neq y_s\}}|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\\
\leqslant{}&\mathbb{E}[|y_\tau^i-y_\tau|^p]+p\mathbb{E}\Big[\int_{(\sigma,\tau]}|y_s^i-y_s|^{p-1}\,\mathrm{d}A_s\Big]\\
&+p\mathbb{E}\Big[\int_\sigma^{\tau}|y_s^i-y_s|^{p-1}|g_s^i-g_s^0|\,\mathrm{d}s\Big]\\
&+p\mathbb{E}\Big[\int_\sigma^{\tau}|y_s^i-y_s|^{p-1}(z_s^i-z_s)\,\mathrm{d}B_s\Big]+p\mathbb{E}\Big[\sum_{s\in(\sigma,\tau]}(\Delta A_s)^p\Big]. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
X_{\sigma,\tau}^i={}&|y_\tau^i-y_\tau|^p+p\int_{(\sigma,\tau]}|y_s^i-y_s|^{p-1}\,\mathrm{d}A_s\\
&+p\int_\sigma^{\tau}|y_s^i-y_s|^{p-1}|g_s^i-g_s^0|\,\mathrm{d}s+p\sum_{s\in(\sigma,\tau]}(\Delta A_s)^p, \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

则在不等式 (3.9) 两边取上确界, 可得

$$
\mathbb{E}\Big[\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\tau}|y_s^i-y_s|^p\Big]\leqslant\mathbb{E}[X_{\sigma,\tau}^i]+k_p\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_{\sigma,\tau}^{\frac{1}{2}}]. \qquad (3.12)
$$

另一方面, 我们知道

$$
\begin{aligned}
&k_p\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_{\sigma,\tau}^{\frac{1}{2}}]\\
\leqslant{}&k_p\mathbb{E}\Big[\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\tau}|y_s^i-y_s|^{\frac{p}{2}}\Big(\int_\sigma^{\tau}|y_s^i-y_s|^{p-2}\mathbb{1}_{\{y_s^i\neq y_s\}}|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\\
\leqslant{}&\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\tau}|y_s^i-y_s|^p\Big]+\frac{k_p^2}{2}\mathbb{E}\Big[\int_\sigma^{\tau}|y_s^i-y_s|^{p-2}\mathbb{1}_{\{y_s^i\neq y_s\}}|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}
$$

结合如上不等式 (3.12) 及 (3.10), 可以推出

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\tau}|y_s^i-y_s|^p\Big]\leqslant d_p\mathbb{E}[X_{\sigma,\tau}^i]. \tag{3.13}$$

现在, 类似于子步骤 (4) 的讨论, 我们可得 (3.11) 右边第一项

$$\mathbb{E}[|y_\tau^i-y_\tau|^p]\longrightarrow 0,\quad i\longrightarrow+\infty. \tag{3.14}$$

对于 (3.11) 右边第二项, 由于

$$|y_s^i-y_s|^{p-1}\leqslant|y_s^1-y_s|^{p-1},\quad \forall s\in[0,T],$$

并且 Yong 不等式意味着

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T|y_s^1-y_s|^{p-1}\,\mathrm{d}A_s\Big]\leqslant\frac{p-1}{p}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|y_s^1-y_s|^p\Big]+\frac{1}{p}\mathbb{E}[|A_T|^p],$$

则根据 Lebesgue 控制收敛定理可知

$$\mathbb{E}\Big[\int_{(\sigma,\tau]}|y_s^i-y_s|^{p-1}\,\mathrm{d}A_s\Big]\longrightarrow 0,\quad i\longrightarrow+\infty. \tag{3.15}$$

对于 (3.11) 右边第三项, 假设 (h5) 意味着

$$\begin{aligned}&|y_s^i-y_s|^{p-1}|g_s^i-g_s^0|\\ &\leqslant|y_s^i-y_s|^{p-1}(\dot{g}_s+|g_s^0|)+|y_s^i-y_s|^{p-1}\ddot{g}_s^i.\end{aligned} \tag{3.16}$$

对于上述不等式的右边第一项, 有

$$|y_s^i-y_s|^{p-1}(\dot{g}_s+|g_s^0|)\leqslant|y_s^1-y_s|^{p-1}(\dot{g}_s+|g_s^0|),$$

应用 Yong 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\int_0^T|y_s^1-y_s|^{p-1}(\dot{g}_s+|g_s^0|)\,\mathrm{d}s\Big]\\ &\leqslant\frac{p-1}{p}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|y_s^1-y_s|^p\Big]+\frac{1}{p}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T(\dot{g}_s+|g_s^0|)\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big]<+\infty,\end{aligned}$$

则根据 Lebesgue 控制收敛定理, 可推出

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T|y_s^i-y_s|^{p-1}(\dot{g}_s+|g_s^0|)\,\mathrm{d}s\Big]\longrightarrow 0,\quad i\longrightarrow+\infty. \tag{3.17}$$

对于 (3.16) 右边第二项, 注意到

$$|y_s^i-y_s|^{p-1}\ddot{g}_s^i\leqslant|y_s^1-y_s|^{p-1}\ddot{g}_s^i,$$

过程序列 $\{(\ddot{g}_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 的有界性意味着

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\int_0^T|y_s^i-y_s|^{p-1}\ddot{g}_s^i\,\mathrm{d}s\Big]\\ &\leqslant\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\gamma^2(s)|y_s^i-y_s|^{2p-2}\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2(p-1)}}\Big]\Big)^{\frac{(p-1)}{p}}\\ &\quad\times\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\Big|\frac{\ddot{g}_s^i}{\gamma(s)}\Big|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\Big)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

$$\leqslant C\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \gamma^2(s)|y_s^i-y_s|^{2p-2}\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2(p-1)}}\Big]\Big)^{\frac{(p-1)}{p}}. \tag{3.18}$$

容易得到

$$\gamma^2(s)|y_s^i-y_s|^{2p-2}\leqslant \gamma^2(s)|y_s^1-y_s|^{2p-2},\quad \forall s\in[0,T],$$

和

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \gamma^2(s)|y_s^1-y_s|^{2p-2}\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2(p-1)}}\Big]\leqslant \Big(\int_0^T\gamma^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2(p-1)}}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|y_s^1-y_s|^p\Big],$$

则对不等式 (3.18) 的最后一项应用 Lebesgue 控制收敛定理, 可知

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T |y_s^i-y_s|^{p-1}\ddot{g}_s^i\,\mathrm{d}s\Big]\longrightarrow 0,\quad i\longrightarrow+\infty. \tag{3.19}$$

根据 (3.16)–(3.17) 和 (3.19), 可以得到

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T |y_s^i-y_s|^{p-1}|g_s^i-g_s^0|\,\mathrm{d}s\Big]\longrightarrow 0,\quad i\longrightarrow+\infty. \tag{3.20}$$

因此, 综合 (3.11), (3.13)–(3.15) 和 (3.20), 有

$$\varlimsup_{i\to+\infty}\mathbb{E}\Big[\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\tau}|y_s^i-y_s|^p\Big]\leqslant pd_p\mathbb{E}\Big[\sum_{s\in(\sigma,\tau]}(\Delta A_s)^p\Big]. \tag{3.21}$$

现在, 在 (3.7) 中取 $p=2$ 并且替换 t 为 $\sigma\in[0,\tau]$, 可知

$$\begin{aligned}
&|y_\sigma^i-y_\sigma|^2+\int_\sigma^\tau |z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\\
={}&|y_\tau^i-y_\tau|^2+\sum_{t\in(\sigma,\tau]}[(\Delta A_t)^2-(\Delta K_t-\Delta K_t^i)]\\
&-2\int_\sigma^\tau (y_s^i-y_s)(g_s^i-g_s^0)\,\mathrm{d}s-2\int_\sigma^\tau (y_s^i-y_s)(z_s^i-z_s)\,\mathrm{d}B_s\\
&+2\int_{(\sigma,\tau]}(y_s^i-y_s)\,\mathrm{d}A_s^i-2\int_{(\sigma,\tau]}(y_s^i-y_s)\,\mathrm{d}A_s\\
&-2\int_{(\sigma,\tau]}(y_{s-}^i-y_{s-})\,\mathrm{d}(K_s^i-K_s).
\end{aligned}$$

注意到对任意 $x_1,x_2\in\mathbb{R}_+$ 且 $0\leqslant r\leqslant 1$, 有

$$\frac{(x_1+x_2)^r}{x_1+x_2}\leqslant\frac{(x_1)^r}{x_1},\quad \frac{(x_1+x_2)^r}{x_1+x_2}\leqslant\frac{(x_2)^r}{x_2},$$

可以推出 $(x_1+x_2)^r\leqslant(x_1)^r+(x_2)^r$, 则对于序列 $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}\subset\mathbb{R}_+$, 有 $\Big(\sum\limits_{i=1}^n x_i\Big)^r\leqslant\sum\limits_{i=1}^n(x_i)^r$. 如果在不等式两边取极限, 我们可得 $\Big(\sum\limits_{i=1}^{+\infty}x_i\Big)^r\leqslant\sum\limits_{i=1}^{+\infty}(x_i)^r$. 这意味着

$$\begin{aligned}
\Big(\int_\sigma^\tau |z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\leqslant{}&|y_\tau^i-y_\tau|^p+\Big(\sum_{t\in(\sigma,\tau]}(\Delta A_t)^2\Big)^{\frac{p}{2}}\\
&+2^{\frac{p}{2}}\Big(\int_\sigma^\tau |y_s^i-y_s||g_s^i-g_s^0|\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\\
&+2^{\frac{p}{2}}\Big|\int_\sigma^\tau (y_s^i-y_s)(z_s^i-z_s)\,\mathrm{d}B_s\Big|^{\frac{p}{2}}
\end{aligned}$$

$$+\,2^{\frac{p}{2}}\Big(\int_{(\sigma,\tau]}|y_s^i-y_s|\,\mathrm{d}A_s\Big)^{\frac{p}{2}}. \tag{3.22}$$

注意到

$$\Big(\sum_{t\in(\sigma,\tau]}(\Delta A_t)^2\Big)^{\frac{p}{2}}\leqslant\sum_{t\in(\sigma,\tau]}(\Delta A_t)^p. \tag{3.23}$$

对不等式 (3.22) 右边的第四项, 根据 BDG 不等式, 可以推出

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[2^{\frac{p}{2}}\Big|\int_\sigma^\tau(y_s^i-y_s)(z_s^i-z_s)\,\mathrm{d}B_s\Big|^{\frac{p}{2}}\Big]\\
\leqslant\;& c_p\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\tau}|y_s^i-y_s|^{\frac{p}{2}}\int_\sigma^\tau|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{4}}\Big]\\
\leqslant\;& \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_\sigma^\tau|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]+\overline{c}_p\mathbb{E}\Big[\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\tau}|y_s^i-y_s|^p\Big].\end{aligned}$$

从上述不等式以及 (3.22) 和 (3.23), 可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_\sigma^\tau|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\
\leqslant\;&\mathbb{E}[|y_\tau^i-y_\tau|^p]+2^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\Big[\sum_{t\in(\sigma,\tau]}(\Delta A_t)^p\Big]\\
&+2^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_\sigma^\tau|y_s^i-y_s||g_s^i-g_s^0|\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\
&+2^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{(\sigma,\tau]}|y_s^i-y_s|\,\mathrm{d}A_s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\
&+\overline{c}_p\mathbb{E}\Big[\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\tau}|y_s^i-y_s|^p\Big].\end{aligned} \tag{3.24}$$

对于上述不等式右边第四项, 根据 Lebesgue 控制收敛定理, 如下两个不等式

$$|y_s^i-y_s|\leqslant|y_s^1-y_s|,\quad\forall s\in[0,T],$$

和

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|y_s^1-y_s|\,\mathrm{d}A_s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\leqslant\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|y_s^1-y_s|^p\Big]+\mathbb{E}\Big[|A_T|^p\Big],$$

意味着

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{(\sigma,\tau]}|y_s^i-y_s|\,\mathrm{d}A_s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\longrightarrow0,\quad i\longrightarrow+\infty. \tag{3.25}$$

对于 (3.24) 右边第三项, 从假设 (h5) 可推出

$$|y_s^i-y_s||g_s^i-g_s^0|\leqslant|y_s^i-y_s|(\dot{g}_s+|g_s^0|)+|y_s^i-y_s|\ddot{g}_s^i. \tag{3.26}$$

对于上述不等式右侧第一项, 有

$$|y_s^i-y_s|(\dot{g}_s+|g_s^0|)\leqslant|y_s^1-y_s|(\dot{g}_s+|g_s^0|),$$

和

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|y_s^1-y_s|(\dot{g}_s+|g_s^0|)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]$$

$$\leqslant \mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|y_s^1-y_s|^p\Big]+\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T(\dot{g}_s+|g_s^0|)\,\mathrm{d}s\Big)^p\Big]<+\infty.$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|y_s^i-y_s|(\dot{g}_s+|g_s^0|)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\longrightarrow 0,\quad i\longrightarrow+\infty. \tag{3.27}$$

对于 (3.26) 右边第二项, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|y_s^i-y_s|\ddot{g}_s\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\
\leqslant\ &\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\gamma^2(s)|y_s^i-y_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{4}}\Big(\int_0^T\Big|\frac{\ddot{g}_s^i}{\gamma(s)}\Big|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{4}}\Big]\\
\leqslant\ &\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\gamma^2(s)|y_s^i-y_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\Big|\frac{\ddot{g}_s^i}{\gamma(s)}\Big|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}\\
\leqslant\ &C\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\gamma^2(s)|y_s^i-y_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

注意到

$$\gamma^2(s)|y_s^i-y_s|^2\leqslant\gamma^2(s)|y_s^1-y_s|^2,\quad\forall s\in[0,T],$$

和

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\gamma^2(s)|y_s^1-y_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\leqslant\Big(\int_0^T\gamma^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|y_s^1-y_s|^p\Big]<+\infty,$$

对 (3.28) 的最后一项, 应用控制收敛定理可知

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|y_s^i-y_s|\ddot{g}_s^i\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\longrightarrow 0,\quad i\longrightarrow+\infty. \tag{3.29}$$

因此, 由 (3.26)–(3.27) 和 (3.29), 推出

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|y_s^i-y_s||g_s^i-g_s^0|\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\longrightarrow 0,\quad i\longrightarrow+\infty. \tag{3.30}$$

再根据 (3.14), (3.21), (3.24)–(3.25) 和 (3.30), 有

$$\varlimsup_{i\to+\infty}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_\sigma^\tau|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\leqslant\overline{d}_p\mathbb{E}\Big[\sum_{t\in(\sigma,\tau]}(\Delta A_t)^p\Big]. \tag{3.31}$$

根据 Jensen 不等式, 可知, 对 $[0,T]$ 上任意的正值函数 α, 满足 $\int_0^T\alpha^2(s)\,\mathrm{d}s<+\infty$, 则有下式成立

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\int_\sigma^\tau|z_s^i-z_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\
=\ &\mathbb{E}\Big[\Big(\int_\sigma^\tau\alpha^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big(\frac{1}{\int_\sigma^\tau\alpha^2(s)\,\mathrm{d}s}\int_\sigma^\tau\alpha^2(s)\frac{|z_s^i-z_s|^2}{\alpha^2(s)}\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\
\geqslant\ &\Big(\int_0^T\alpha^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p-2}{2}}\mathbb{E}\Big[\int_\sigma^\tau\alpha^2(s)\Big|\frac{z_s^i-z_s}{\alpha(s)}\Big|^p\,\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}$$

因此, 结合 (3.31), 可得

$$\varlimsup_{i\to+\infty}\mathbb{E}\Big[\int_\sigma^\tau\alpha^2(s)\Big|\frac{z_s^i-z_s}{\alpha(s)}\Big|^p\,\mathrm{d}s\Big]$$

$$\leqslant \Big(\int_0^T \alpha^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{2-p}{2}} \varlimsup_{i\to+\infty} \mathbb{E}\Big[\Big(\int_\sigma^\tau |z_s^i - z_s|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]$$
$$\leqslant \Big(\int_0^T \alpha^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{2-p}{2}} \overline{d}_p \mathbb{E}\Big[\sum_{t\in(\sigma,\tau]} (\Delta A_t)^p\Big]. \tag{3.32}$$

根据引理 3.1, 对任意 $\delta,\varepsilon > 0$ 和 $K > 0$, 存在有限个不相交的随机区间 $(\sigma_k,\tau_k]$, $k = 1,2,\cdots,N$, 且 $\sigma_0 = 0, \sigma_{N+1} = T$, 满足

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad \sum_{k=0}^N \mathbb{E}\int_0^T \alpha^2(s)\mathbb{1}_{(\tau_k,\sigma_{k+1}]}(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{\varepsilon}{2};\\ &\text{(ii)}\quad \sum_{k=0}^N \mathbb{E}\sum_{\sigma_k<t\leqslant\tau_k} (\Delta A_t)^p \leqslant \frac{1}{K}\frac{\delta\varepsilon}{3}.\end{aligned} \tag{3.33}$$

现在, 注意到对于任意 $\sigma = \sigma_k$ 和 $\tau = \tau_k$, 不等式 (3.32) 亦成立, 将指标 k 对应所有项相加, 并令 $K = \big(\int_0^T v^2(s)\,\mathrm{d}s\big)^{\frac{2-p}{2}}\overline{d}_p$, 可以得到

$$\varlimsup_{i\to+\infty} \sum_{k=0}^N \mathbb{E}\Big[\int_{\sigma_k}^{\tau_k} \alpha^2(s)\Big|\frac{z_s^i - z_s}{\alpha(s)}\Big|^p\,\mathrm{d}s\Big]$$
$$\leqslant \Big(\int_0^T \alpha^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{2-p}{2}} \overline{d}_p \sum_{k=0}^N \mathbb{E}\Big[\sum_{s\in(\sigma_k,\tau_k]} (\Delta A_s)^p\Big] \leqslant \frac{\delta\varepsilon}{3}.$$

因此, 存在整数 $l_{\varepsilon\delta} > 0$, 当 $i \geqslant l_{\varepsilon\delta}$ 时, 有

$$\sum_{k=0}^N \mathbb{E}\Big[\int_{\sigma_k}^{\tau_k} \alpha^2(s)\Big|\frac{z_s^i - z_s}{\alpha(s)}\Big|^p\,\mathrm{d}s\Big]s \leqslant \frac{\varepsilon\delta}{2}. \tag{3.34}$$

在可测空间 $([0,T]\times\Omega, \mathscr{B}([0,T])\times\mathscr{F})$ 定义新的测度如下:

$$\mathbb{m}\times\mathbb{P}(A) := \mathbb{E}\int_0^T \alpha^2(t)\mathbb{1}_A(t,\omega)\,\mathrm{d}t,$$

且当 $\alpha > 0$ 时, 该测度 $\mathbb{m}\times\mathbb{P}$ 等价于测度 $\mathrm{d}t\times\mathrm{d}\mathbb{P}$.

考虑乘积测度空间 $([0,T]\times\Omega, \mathscr{B}([0,T])\times\mathscr{F}, \mathbb{m}\times\mathbb{P})$ 上 (这里 $\mathbb{m}$ 代表 $[0,T]$ 上的测度 $\mathbb{m}(B) = \int_0^T \alpha^2\mathbb{1}_B(t)\,\mathrm{d}t$), 根据 (3.34) , 有

$$\mathbb{m}\times\mathbb{P}\Big\{(s,\omega)\in\bigcup_{k=0}^N(\sigma_k(\omega),\tau_k(\omega)] : \Big|\frac{z_s^i(\omega) - z_s(\omega)}{\alpha(s)}\Big|^p \geqslant \delta\Big\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

上式和 (3.33) (i) 意味着

$$\mathbb{m}\times\mathbb{P}\Big\{(s,\omega)\in[0,T]\times\Omega : \Big|\frac{z_s^i(\omega) - z_s(\omega)}{\alpha(s)}\Big|^p \geqslant \delta\Big\} \leqslant \varepsilon.$$

从上式可得对任意 $\delta > 0$, 有

$$\lim_{i\to+\infty} \mathbb{m}\times\mathbb{P}\Big\{(s,\omega)\in[0,T]\times\Omega : \Big|\frac{z_s^i(\omega) - z_s(\omega)}{\alpha(s)}\Big|^p \geqslant \delta\Big\} = 0.$$

因此, 在 $[0,T]\times\Omega$ 上, 序列 $\big\{\big(\frac{z_t^i}{\alpha(t)}\big)_{t\in[0,T]}\big\}_{i=1}^{+\infty}$ 依测度 $\mathbb{m}\times\mathbb{P}$ 收敛到 $\big(\frac{z_t}{\alpha(t)}\big)_{t\in[0,T]}$.

根据条件 (h6), 容易得到存在一实数 $C>0$, 满足

$$
\begin{aligned}
C &\geqslant \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |z_s^i|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \alpha^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big(\frac{1}{\int_0^T \alpha^2(s)\,\mathrm{d}s}\int_0^T \alpha^2(s)\frac{|z_s^i|^2}{\alpha^2(s)}\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big] \\
&\geqslant \Big(\int_0^T \alpha^2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p-2}{2}}\mathbb{E}\Big[\int_0^T \alpha^2(s)\Big|\frac{z_s^i}{\alpha(s)}\Big|^p\,\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}
$$

因此, 对任意 $1\leqslant q<p$, 有

$$
\mathbb{E}\int_0^T \alpha^2(t)\Big|\frac{z_t^i-z_t}{\alpha(t)}\Big|^q\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0, \quad i\longrightarrow +\infty.
$$

注 3.1 在上述的讨论过程中, 经常需要对原随机过程序列抽取合适的子列, 但是我们为了避免符号的复杂化, 总使用原来的记号来代表该子列.

注 3.2 如果过程序列 $\{(\widetilde{y}_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i\geqslant 1}$ 是关于 i 递减的, 并且可以写成下面的形式:

$$
\widetilde{y}_t^i=\widetilde{y}_0^i+\int_0^t \widetilde{g}_s^i\,\mathrm{d}s+\int_0^t \widetilde{z}_s^i\,\mathrm{d}B_s+\widetilde{A}_t^i-\widetilde{K}_t^i, \quad t\in[0,T], \quad i=1,2,\cdots, \tag{3.35}
$$

则对 $\{(-\widetilde{y}_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i\geqslant 1}$ 应用定理 3.1, 其中 $g_t^i=-\widetilde{g}_t^i$, $z_t^i=-\widetilde{z}_t^i$, $A_t^i=\widetilde{A}_t^i$ 和 $K_t^i=-\widetilde{K}_t^i$, 可得 $\{(\widetilde{y}_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i\geqslant 1}$ 的极限为

$$
\widetilde{y}_t=\widetilde{y}_0+\int_0^t \widetilde{g}_s^0\,\mathrm{d}s+\int_0^t \widetilde{z}_s\,\mathrm{d}B_s-\widetilde{A}_t+\widetilde{K}_t, \quad t\in[0,T].
$$

注 3.3 借助定理 3.1 的结果, 可以得到在新框架下的许多结果, 譬如 RCLL g-上鞅的 Doob-Meyer 型分解以及不规则障碍的反射倒向随机微分方程解的适定性. 我们将在后续文章中讨论该问题.

4 附 录

首先给出两个引理, 它们分别是文 [4] 中引理 A.1 和引理 A.2 的无穷时间版本.

引理 4.1 令 $0<\sigma\leqslant T$ 为一停时, 则存在一停时序列 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{+\infty}$, 满足 $0<\sigma_i<\sigma, \mathbb{P}-\text{a.s.}$ 和 $\sigma_i\uparrow\sigma$, 其中 $i=1,2,\cdots$.

引理 4.2 令 $(A_t)_{t\in[0,T]}$ 是定义在 $[0,T]$ 上的 RCLL 增过程, 满足 $A_0=0$ 和 $\mathbb{E}[(A_T)^p]<+\infty$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在有限个停时 τ_k, $k=0,1,2,\cdots,N+1$, 满足 $\tau_0=0<\tau_1\leqslant\cdots\leqslant\tau_k\leqslant T=\tau_{N+1}$ 且在 $(0,T)$ 上的图无交, 并有

$$
\sum_{k=0}^N \mathbb{E}\sum_{t\in(\tau_k,\tau_{k+1})}(\Delta A_t)^p\leqslant\varepsilon. \tag{4.1}
$$

为了读者的方便, 我们列出下列引理.

引理 4.3 (见 [6, 定理 9, IV.8.8]) $L^1(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ 的子集 $K=\{(f^\theta(t))_{t\in\Omega}\}_{\theta\in\Theta}$ 是弱序

列紧的充要条件是该序列在空间中有界并且积分 $\int_E f^\theta(s)\,\mu(\mathrm{d}s)$ 关于 $\theta \in \Theta$ 满足一致可数可加性, 即

(i) L^1 有界: $\sup\limits_{\theta\in\Theta}\|f^\theta\|_{L^1} < +\infty$;

(ii) 一致可数可加: 对任意集合列 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ 且 $E_n \supset E_{n+1}$ 满足 $E_n \downarrow \emptyset$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\int_{E_n} f^\theta(s)\,\mu(\mathrm{d}s) = 0.$$

引理 4.4　(见 [7, 引理 A.3]) 令 $(X_t)_{t\in[0,T]}$ 是一右上半连续 $\mathscr{F}_t$-可选过程, 即对 Ω 除去一 $\mathbb{P}$-可略集后的任意 ω, 有 $X_t \geqslant \limsup\limits_{s\searrow t} X_s, \forall t \in [0,T)$. 如果对于任意停时 $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau \leqslant T$, $X_\sigma \leqslant X_\tau$ 成立, 则 $(X_t)_{t\in[0,T]}$ 是一增过程.

引理 4.5　令 $\{(a_t^i)_{t\in[0,T]}\}_{i=1}^{+\infty}$ 是定义在 $[0,T]$ 上 (确定的) RCLL 增过程序列, 满足对任意 $t \in [0,T]$, 有 $a_t^i \nearrow a_t < +\infty$ 以及 $a_t^j - a_t^i \leqslant a_{t'}^j - a_{t'}^i$, 其中 $j \geqslant i$ 且 $0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant T$, 则其极限 $(a_t)_{t\in[0,T]}$ 也是 RCLL 过程.

注 4.1　引理 4.5 是文 [5] 中引理 3.2 的无穷时间版本, 证明类似.

参　考　文　献

[1] Pardoux E, Peng S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation [J]. *Systems & Control Letters*, 1990, 14(1):55–61.

[2] El Karoui N, Kapoudjian C, Pardoux E, et al. Reflected solutions of backward S-DE's, and related obstacle problems for PDE's [J]. *The Annals of Probability*, 1997, 25(2):702–737.

[3] Cvitanić J, Karatzas I. Backward stochastic differential equations with reflection and Dynkin games [J]. *The Annals of Probability*, 1996, 24(4):2024–2056.

[4] Peng S. Monotonic limit theorem of BSDE and nonlinear decomposition theorem of Doob-Meyer's type [J]. *Probability Theory and Related Fields*, 1999, 113(4):473–499.

[5] Peng S, Xu M. The smallest g-supermartingale and reflected BSDE with single and double L^2 obstacles [J]. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist*, 2005, 41(3):605–630.

[6] Dunford N J, Schwartz J T. Linear operators: V. 1: general theory [M]. New York: Interscience Publishers, Inc, 1988.

[7] Bayraktar E, Yao S. Doubly reflected BSDEs with integrable parameters and related Dynkin games [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2015, 125(12):4489–4542.

Monotonic Limit Theorem for L^p-Semimartingales on General Time Horizon

SHI Xuejun[1] FENG Qun[2] TIAN Dejian[3] JIANG Long[4]

[1]School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan 250014, China. E-mail: shixuejun216@126.com

[2]School of Business, University of Jinan, Jinan 250002, China.
E-mail: sm_fengq@ujn.edu.cn

[3]School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, Jiangsu, China. E-mail:tiandejian1985@163.com

[4]Corresponding author. School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, Jiangsu, China.
E-mail: jianglong365@hotmail.com

Abstract In this paper, a new version of monotonic limit theorem is established for a sequence of L^p-semimartingales on general time interval, motivated by the penalization method in the theories of backward stochastic differential equations (BSDEs for short) and nonlinear expectations. It is just the general framework that makes us have to tackle many new problems. And also this non-trivial result plays a key role in exploring the more general form of nonlinear Doob-Meyer Decomposition of g-supermartingale and the existence of solutions to BSDEs with constraints.

Keywords Monotonic limit theorem, Penalization method, Weak convergence, Nonlinear Doob-Meyer decomposition, Backward stochastic differential equation

2000 MR Subject Classification 60H10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 2, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA