数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(3):231–236
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0018

涉及CM分担值的常系数指数多项式的唯一性*

苏 敏[1] 李玉华[2] 刚鹏飞[2]

提要 主要证明了两个非常数的常系数指数多项式, 如果在复平面中 4 个张角严格大于 π 的每一个角域内都有 1 个有穷的 CM 分担值, 且这 4 个分担值是判别的, 则它们必然恒等.

关键词 指数多项式, CM分担值, 唯一性

MR (2000) 主题分类 30D35, 11T23

中图法分类 O174.52

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2019)03-0231-06

1 引言及主要结论

在本文中, 用 $\mathbb{C}$ 和 $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 分别表示复平面与扩充复平面, 所提及的亚纯函数指复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数. 我们假定读者熟知亚纯函数值分布理论的标准记号和基本定理[1−2].

形如

$$f(z)=p_1(z)\mathrm{e}^{\alpha_1 z}+p_2(z)\mathrm{e}^{\alpha_2 z}+\cdots+p_n(z)\mathrm{e}^{\alpha_n z},$$

这样的整函数称为指数多项式, 其中 $\alpha_j\in\mathbb{C}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组判别的复数, 称为指数多项式的频数; $p_j(z)\in\mathbb{C}[z]$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为复系数多项式, 称为指数多项式的系数. 特别地, 若 $p_j(z)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为常数多项式时, 则称 $f(z)$ 为常系数指数多项式. 容易看出, 多项式是特殊的指数多项式, 且非多项式的指数多项式是增长级为 1 的整函数. 关于指数多项式的相关知识, 读者可参见文 [3].

1929 年, Ritt[4] 证明了: 如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是常系数指数多项式, 且 $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ 为整函数, 则 $h(z)$ 也是常系数指数多项式. Lax[5] 用不同的方法对上述的 Ritt 的结果给出新证明. 1963 年, Shields[6] 改进了 Ritt 的结果, 证明了: 若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 都是常系数指数多项式, $g(z)$ 不恒为零, 且 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 在 $|z|<r$ 中极点的个数 $n\big(r,\frac{f}{g}\big)=o(r)(r\to\infty)$, 则 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 是常系数指数多项式. 对于一般的指数多项式, Ritt 和 Shields 的如上结果都不成立, 例如: $f(z)=\sin z$ 和 $g(z)=z$ 都是指数多项式, 显然 $\frac{\sin z}{z}$ 为整函数, 但是 $\frac{\sin z}{z}$ 不是指数多项式.

亚纯函数值分布论的应用十分广泛, 1929 年, Nevanlinna 应用他所建立的关于亚纯函数的第二基本定理证明了: 如果复平面上的两个非常数亚纯函数在 5 个不同点处的 5 个逆像集对应相等, 则这两个亚纯函数一定恒等. Nevanlinna 的这一结果目前被人们称为Nevanlinna 5IM分担值定理, 该定理是涉及分担值的亚纯函数唯一性研究的重要开端. 后

本文 2018 年 6 月 20 日收到.

[1]中国矿业大学 (北京) 理学院, 北京 100083; 云南师范大学数学学院, 昆明 650500.
E-mail: mathesumin@yahoo.com

[2]通信作者. 云南师范大学数学学院, 昆明 650500. E-mail: liyuhua@ynnu.edu.cn; 2436079266@qq.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11761081) 的资助.

人从不同角度对Nevanlinna 5IM值定理进行推广, 例如, 郑建华研究了在角域上具有IM分担值的亚纯函数的唯一性问题, 将Nevanlinna五值定理推广至张角大于 π 的角域的情形, 见文 [7].

在Nevanlinna 5IM分担值定理和Nevanlinna 4CM分担值定理条件中, 为了说明定理条件是精确的, 在分担值个数不能再减少的众多例子中, 指数多项式 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 与 $g(z)=\mathrm{e}^{-z}$ 是具有最小增长级、结构最简单的亚纯函数对. 另一方面, 由于指数多项式的零点分布有其独特的性质 (可参见文 [3]), 因此涉及分担值的指数多项式的唯一性研究既具有独特性, 又不失唯一性问题的本质. 考虑常系数指数多项式这一特殊情形, Nevanlinna 5IM 分担值定理和 Nevanlinna 4CM 分担值等定理改进的可能性, 很自然地, 会产生如下几个问题.

问题 1.1 如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是非常数的常系数指数多项式, $a_k(k=1,2,3,4)$ 是 4 个判别的有穷复数, $\Omega_k(k=1,2,3,4)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 的 4 个张角大于 π 的角形区域, 使得对 $\forall k\in\{1,2,3,4\}$, $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 Ω_k 中以 a_k 为 CM 分担值, 那么是否一定有 $f(z)\equiv g(z)$?

问题 1.2 如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是非常数的常系数指数多项式, $a_k(k=1,2,3)$ 是 3 个判别的有穷复数, $\Omega_k(k=1,2,3)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 的 3 个张角大于 π 的角形区域, 使得对 $\forall k\in\{1,2,3\}$, $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 Ω_k 中以 a_k 为 CM 分担值, 那么 $f(z)$ 与 $g(z)$ 之间具有如何的关系?

下面我们首先给出亚纯函数在区域 $D\subset\mathbb{C}$ 上的 IM 与CM分担值集 (分担值) 定义.

定义 1.1 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是非常数亚纯函数, D 是复平面 $\mathbb{C}$ 的子区域, Ω 是扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的一个非空子集, 如果 $\bigcup\limits_{a\in\Omega}\{z\in D\mid f(z)=a\}=\bigcup\limits_{a\in\Omega}\{z\in D\mid g(z)=a\}$, 则称 Ω 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 上的 IM 分担值集. 特别地, 当 $a\in\widehat{\mathbb{C}}$, 集合 $\{a\}$ 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 上的 IM 分担值集时, 称 a 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 上的 IM 分担值.

定义 1.2 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是非常数亚纯函数, D 是复平面 $\mathbb{C}$ 的子区域, $\widehat{\mathbb{C}}$ 中的非空子集 Ω 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 上的 IM 分担值集, 如果 $\bigcup\limits_{a\in\Omega}\{z\in D\mid f(z)=a\}=\emptyset$ 或者 $\forall z_0\in\bigcup\limits_{a\in\Omega}\{z\in D\mid f(z)=a\}\neq\emptyset$, z_0 作为方程 $f(z)=f(z_0)$ 根的重数总是等于 z_0 作为方程 $g(z)=g(z_0)$ 根的重数, 则称 Ω 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 上的CM分担值集. 当 $a\in\widehat{\mathbb{C}}$, 集合 $\{a\}$ 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 上的CM分担值集时, 称 a 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 上的CM分担值.

注 1.1 若区域 $D=\mathbb{C}$ 时, 则称 Ω 为非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的 IM 或CM分担值集, 相应地, a 称为非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的 IM 或CM 分担值.

定义 1.3 设 Ω 为复平面 $\mathbb{C}$ 的非空子集. 如果对于非常数整函数 $f(z)$ 与 $g(z)$, 只要 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上以 Ω 为CM分担值集, 就一定有 $f(z)\equiv g(z)$, 则称 Ω 为整函数在复平面 $\mathbb{C}$ 上的唯一性像集.

借助指数多项式中 Shapiro 的一个结果, 我们解决了上述的两个问题. 事实上, 我们得到了如下结果.

定理 1.1 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为非常数的常系数指数多项式, a_k $(k=1,2,3,4)$ 为判别的

有穷复数, 如果存在 $K \geqslant 0$ 以及复平面 $\mathbb{C}$ 中张角大于 π 的角形区域 Ω_k $(k=1,2,3,4)$, 使得对 $\forall k \in \{1,2,3,4\}$, $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 $D_k=\Omega_k \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z|>K\}$ 以 a_k 为CM 分担值, 那么 $f(z) \equiv g(z)$.

定理 1.2 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为非常数的常系数指数多项式, a_k $(k=1,2,3)$ 为判别的有穷复数, 如果存在 $K \geqslant 0$ 以及复平面 $\mathbb{C}$ 中张角大于 π 的角形区域 Ω_k $(k=1,2,3)$, 使得对 $\forall k \in \{1,2,3\}$, $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 $D_k=\Omega_k \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z|>K\}$ 以 a_k 为CM 分担值, 那么 $f(z)$ 与 $g(z)$ 必满足以下情形之一:

(1) 若 $\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3} \neq \frac{1}{2}, 2, -1$, 则 $f(z) \equiv g(z)$;

(2) 若 $f(z) \not\equiv g(z)$, 则 $f(z)=T(g(z))$, 其中 T 是一次多项式.

定理 1.3 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为非常数的常系数指数多项式, 如果存在 $K \geqslant 0$ 以及复平面 $\mathbb{C}$ 中的张角大于 π 的角域 Ω, 使得 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 $D=\Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z|>K\}$ 上以集合 $\{z \in \mathbb{C} \mid z^7+z+1=0\}$ 为CM分担值集, 则必有 $f(z) \equiv g(z)$.

2 主要引理

引理 2.1[8-9] 设 $f(z)=\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(z)\mathrm{e}^{\alpha_j z}$ 与 $g(z)=\sum\limits_{j=1}^{m} q_j(z)\mathrm{e}^{\beta_j z}$ 为指数多项式, 其中 $m,n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j\,(j=1,2,\cdots,n), \beta_j\,(j=1,2,\cdots,m)$ 是两组各自两两互异的不全为零的复数, $p_j(z)\,(j=1,2,\cdots,n), q_j(z)\,(j=1,2,\cdots,m)$ 是两组多项式, $g(z)$ 的系数多项式组 $q_j(z)\,(j=1,2,\cdots,m)$ 无非平凡的公因式, $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是张角大于 π 的角形区域, 如果存在 $R \geqslant 0$, 使得 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 在区域 $\Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z|>R\}$ 中解析, 则存在指数多项式 $h(z)$, 使得 $f(z)=g(z)h(z)$.

引理 2.2[10] (Nevanlinna五值定理) 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $a_j \in \widehat{\mathbb{C}}$ $(j=1,2,3,4,5)$ 为 5 个判别的复数, 如果 a_j $(j=1,2,3,4,5)$ 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的 IM 分担值, 则 $f(z) \equiv g(z)$.

注 2.1 如果取 $f(z)=\mathrm{e}^{-z}$ 与 $g(z)=\mathrm{e}^{z}$, 则整函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上以 $-1,0,1,\infty$ 这 4 个复数中的每一个为 CM 分担值, 但是 $f(z) \not\equiv g(z)$. 事实上, $g(z)=\frac{1}{f(z)}$, 这表明Nevanlinna五值定理的条件是精确的. 在此例子中, $f(z)$ 与 $g(z)$ 都是常系数指数多项式, 它们的增长级都是 1.

引理 2.3[10] 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个判别的非常数亚纯函数, a_j $(j=1,2,3,4)$ 为 4 个判别的复数 (其中之一可以是 ∞), 且 a_j $(j=1,2,3,4)$ 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的CM分担值, 则有

(1) $f(z)=T(g(z))$, 其中 T 是某个分式线性变换;

(2) a_j $(j=1,2,3,4)$ 中有两个值必是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的公共 Picard 例外值;

(3) 存在 a_j $(j=1,2,3,4)$ 的重排 $a_{k_j}(j=1,2,3,4)$, 使得交比 $(a_{j_1},a_{j_2},a_{j_3},\,a_{j_4})=-1$.

注 2.2 经过简单的讨论可知, 交比 $(a_{j_1},a_{j_2},a_{j_3},\,a_{j_4})=-1$, 蕴含了 $(a_1,a_2,a_3,\,a_4) \in \{-1,\frac{1}{2},2\}$

由引理 2.3 的证明可得下面的引理.

引理 2.4[10] 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数整函数, a_j $(j=1,2,3)$ 为 3 个判别的有穷复数, 且 a_j $(j=1,2,3)$ 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的CM分担值, 那么有

(1) 如果 $\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\neq -1,\frac{1}{2},2$, 则 $f(z)\equiv g(z)$;

(2) 如果 $f(z)\not\equiv g(z)$, 则一定存在一次多项式 $T(z)$, 使得 $g(z)=T(f(z))$.

引理 2.5[11] 集合 $\{z\in\mathbb{C}\mid z^7+z+1=0\}$ 是整函数在复平面 $\mathbb{C}$ 上的唯一性像集.

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 由于 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为非常数的常系数指数多项式, 对于有穷复数 a_1, 显然 $f(z)-a_1$ 与 $g(z)-a_1$ 也是非常数的常系数指数多项式, 并且 $f(z)-a_1$ 与 $g(z)-a_1$ 的系数多项式组均无非平凡的公因式. 由已知条件, $f(z)$ 与 $g(z)$ 在

$$D_1=\Omega_1\cap\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>K\}$$

上以 a_1 为CM分担值, 所以 $\frac{f(z)-a_1}{g(z)-a_1}$ 与 $\frac{g(z)-a_1}{f(z)-a_1}$ 在 D_1 中解析. 于是由引理 2.1 可知, 存在指数多项式 $h_1(z),h_2(z)$ 且 $h_1(z)\not\equiv 0,h_2(z)\not\equiv 0$, 使得

$$\frac{f(z)-a_1}{g(z)-a_1}=h_1(z),\quad \frac{g(z)-a_1}{f(z)-a_1}=h_2(z),$$

故有

$$h_1(z)h_2(z)\equiv 1.$$

从而 $h_1(z)$ 与 $h_2(z)$ 均为无零点整函数, 因此 a_1 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的CM分担值. 同理可证, a_2,a_3,a_4 也是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的CM公共值. 此时, 整函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上以 a_1,a_2,a_3,a_4 这 4 个判别的有穷复数为CM分担值, 因而由引理 2.2, $f(z)\equiv g(z)$. 定理 1.1 证毕.

定理 1.2 的证明 与定理 1.1 的前半部分相似, 可以得出 3 个判别的复数 $a_j(j=1,2,3)$ 均为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的CM公共值, 由引理 2.3、引理 2.4 得: 若 $(a_1,a_2,a_3,\infty)=\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\neq\frac{1}{2},2,-1$, 则 $f(z)\equiv g(z)$; 若 $f(z)\not\equiv g(z)$, 则存在一次多项式, 使得 $f(z)=T(g(z))$. 综上所述, 定理 1.2 成立.

定理 1.3 的证明 令

$$F(z)=f^7(z)+f(z)+1,\qquad G(z)=g^7(z)+g(z)+1,$$

显然, $F(z)$ 与 $G(z)$ 是非常数的常系数指数多项式. 由于存在 $K\geqslant 0$ 以及复平面 $\mathbb{C}$ 中的张角大于 π 的角域 Ω, 使得 $f(z),g(z)$ 在区域 $D=\Omega\cap\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>K\}$ 上以集合 $\{z\in\mathbb{C}\mid z^7+z+1=0\}$ 为CM分担值集, 所以 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在区域 D 上以 0 为CM分担值, 因此 $\frac{F(z)}{G(z)}$ 和 $\frac{G(z)}{F(z)}$ 在区域 D 上解析. 由引理 2.1 知, $\frac{F(z)}{G(z)}$ 和 $\frac{G(z)}{F(z)}$ 均为整函数, 所以 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 中以 0 为CM分担值, 即 $f(z),g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 中以集合 $\{z\in\mathbb{C}\mid z^7+z+1=0\}$ 为CM分担值集, 由引理 2.5 得 $f(z)\equiv g(z)$.

注 3.1 取 $f(z)=\cos\sqrt{z}$, $g(z)=\cos 2\sqrt{z}$, 它们是级为 $\frac{1}{2}$ 的整函数, $\forall a\in(0,1)$, 在角域 $\Omega=\{w\mid\varepsilon<\arg w<2\pi-\varepsilon,\varepsilon>0\}$ 内以 a 为CM公共值, 但是, $f(z)\not\equiv g(z)$. 易见, $f(z),g(z)$ 不是指数多项式, 此例子表明, 定理 1.1 是很有可能是常系数指数多项式特有的性质.

注 3.2 上述 3 个定理中对角形区域张角必须大于 π 的限制是必要的. 例如: 取 $f(z)=\sin z$, $g(z)=\sin 2z$, 显然它们都是常系数指数多项式, $\forall a\in(-1,1)$, 在角域 $\Omega=\{w\,|\,0<\arg w<\pi\}$ 上以 a 为CM公共值, 但是, 对于任意的一次多项式 $T(z)$, 易见, $g(z)\not\equiv T(f(z))$.

注 3.3 由定理 1.1, 定理 1.2 的证明过程以及引理 2.1, 不难看出, 这两个定理的结论对一般的指数多项式也成立, 只要所涉及的指数多项式不退化为多项式且各自的系数多项式组是互素的.

注 3.4 在定理 1.1 和定理 1.2 中, 如将它们的条件中的CM分担值减弱为 IM 分担值, 而其他条件保持不变, 那么结论是否成立? 要想在该问题的研究方面取得突破, 需要新的思想与方法. 如下述的 Shapiro 猜想得以解决, 也许会对该问题的研究大有帮助.

Shapiro 猜想[6, 12−13] 如果常系数指数多项式 $f(z)$ 与 $g(z)$ 具有无穷多个公共零点, 一定存在具有无穷多个零点的常系数指数多项式 $h(z)$, 使得 $\frac{f(z)}{h(z)}$ 和 $\frac{g(z)}{h(z)}$ 是整函数.

即使在附加较强条件 “$f(z)$ 与 $g(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上以 0 为 IM 分担值” 这样的特殊情形, Shapiro 猜想也没有解决.

参　考　文　献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Yang L. Value distribution theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[3] Berenstein C A, Gay R. Complex analysis and special topics in harmonic analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[4] Ritt J F. On the zeros of exponential polynomials [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1929, 31(4):680–686.

[5] Lax P D. The quotient of exponential polynomials [J]. *Duke Math J*, 1948, 15(4):967–970.

[6] Shields A. On quotients of exponential polynomials [J]. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, 1963, 16(1):27–31.

[7] Zheng J H. On uniqueness of meromorphic functions with shared values in one angular domain [J]. *Complex Variables, Theory & Application: An International Journal*, 2003, 48(9):777–785.

[8] Ritt J F. Algebraic combinations of exponentials [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1929, 31(4):654–679.

[9] Van der Poorten A J, Tijdeman R. On common zeros of exponential polynomials [J]. *Rijksuniversiteit Te Leiden Leiden*, 1975, 21(1):57–67.

[10] Yang C C, Yi H X. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. New York: Kluwer Academic Publisher, 2003.

[11] 仪洪勋. 亚纯函数的唯一性和 Gross 的一个问题 [J]. 中国科学 A 辑, 1994, 24(5):457–466.

[12] Shapiro H S. The expansion of mean-periodic functions in series of exponentials [J]. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, 1958, 11(4):1–21.

[13] Montgomery H L. Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis [M]. Providence: American Mathematical Society, 1994.

On the Uniqueness of Exponential Polynomials with Constant Coefficients Concerning Shared Values CM

SU Min[1] LI Yuhua[2] GANG Pengfei[2]

[1]School of Science, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China; School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650500, China. E-mail: mathesumin@yahoo.com

[2]Corresponding author. School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650500, China. E-mail: liyuhua@ynnu.edu.cn; 2436079266@qq.com

Abstract In this paper, the authors prove that two non-constant exponential polynomials with constant coefficients must be identical, provide that they share four distinct CM values while each CM value lies in an angular domain of opening strictly larger than π.

Keywords Exponential polynomials, Shared value, Uniqueness

2000 MR Subject Classification 30D35, 11T23

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 3, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA