数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(3):237–246
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0019

扩张的圈 Schrödinger-Virasoro 代数的导子*

王 松[1] 王晓明[1]

提要 介绍了一类与扩张的 Schrödinger-Virasoro 代数相关的无限维李代数, 它的所有导子代数被完全刻画.

关键词 Schrödinger-Virasoro 代数, 洛朗多项式代数, 导子
MR (2000) 主题分类 17B05, 17B56, 17B65, 17B68
中图法分类 O152
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)03-0237-10

1 引 言

Schrödinger-Virasoro 代数 $\mathfrak{sv}$ 最初是由 Henkel 在研究自由 Schrödinger 方程的不变性时被引入的[1], 其结构和表示理论被 Roger 和 Unterberger 深入研究[2], 这类李代数与 Schrödinger 代数及 Virasoro 代数紧密相关. 近几年来 Schrödinger-Virasoro 代数及其变形的结构和表示理论被许多学者广泛研究[3–5]. 为了研究 $\mathfrak{sv}$ 的顶点表示, Unterberger 介绍了一类新的无限维李代数[6], 称之为扩张的 Schrödinger-Virasoro 代数 $\widetilde{\mathfrak{sv}}$, 该李代数是复数域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间, 带有一组基 $\{L_n, M_n, N_n, Y_{n+\frac{1}{2}} \mid n \in \mathbb{Z}\}$, 满足李积关系:

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n}, \quad [M_m, M_n] = 0,\\
&[N_m, N_n] = 0, \quad [Y_{m+\frac{1}{2}}, Y_{n+\frac{1}{2}}] = (m-n)M_{m+n+1},\\
&[L_m, M_n] = nM_{m+n}, \quad [L_m, N_n] = nN_{m+n}, \quad [L_m, Y_{n+\frac{1}{2}}] = \Big(n + \frac{1-m}{2}\Big)Y_{m+n+\frac{1}{2}},\\
&[N_m, M_n] = 2M_{m+n}, \quad [N_m, Y_{n+\frac{1}{2}}] = Y_{m+n+\frac{1}{2}}, \quad [M_m, Y_{n+\frac{1}{2}}] = 0, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

这类无限维李代数的导子、自同构群及中心扩张等结构理论在文 [7] 中被完全刻画.

本文将介绍一类与扩张的 Schrödinger-Virasoro 代数 $\widetilde{\mathfrak{sv}}$ 相关的无限维李代数. 我们称之为扩张的圈 Schrödinger-Virasoro 代数, 通过 $\widetilde{\mathfrak{sv}}$ 与洛朗多项式代数 $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 张量成一个新的无限维李代数 $\widetilde{\mathfrak{sv}} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, 记作 $\widetilde{\mathscr{W}}$, 满足以下李积关系:

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n}, \quad [M_m, M_n] = 0,\\
&[N_m, N_n] = 0, \quad [Y_{m+\frac{1}{2}}, Y_{n+\frac{1}{2}}] = (m-n)M_{m+n+1},\\
&[L_m, M_n] = nM_{m+n}, \quad [L_m, N_n] = nN_{m+n}, \quad [L_m, Y_{n+\frac{1}{2}}] = \Big(n + \frac{1-m}{2}\Big)Y_{m+n+\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

本文 2018 年 5 月 12 日收到.
[1]上海海洋大学信息学院, 上海 201306. E-mail: s-wang@shou.edu.cn; xmwang@shou.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11501359) 的资助.

$$[N_m, M_n] = 2M_{m+n}, \quad [N_m, Y_{n+\frac{1}{2}}] = Y_{m+n+\frac{1}{2}}, \quad [M_m, Y_{n+\frac{1}{2}}] = 0, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{Z},$$

其中 $L_{m,i}$ 表示 $L_m \otimes t^i$, 其他定义类似.

由于上同调群与李代数的结构密切相关, 比如一阶同调群和李代数的导子代数及李双代数的联系, 从而上同调群的计算就显得比较重要. 在文 [8] 中, Farnsteiner 给出了一般有限生成阶化李代数的导子的刻画, 在文 [9–10] 中, 广义的 Block 李代数及 Witt 李代数的导子被完全解决. 本文我们主要确定了扩张的圈 Schrödinger-Virasoro 代数 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 的所有导子.

2 扩张的圈 Schrödinger-Virasoro 代数的导子代数

李代数 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的线性映射 $D : \widetilde{\mathscr{W}} \to \widetilde{\mathscr{W}}$, 若满足以下关系:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)], \quad \forall\, x, y \in \widetilde{\mathscr{W}},$$

称 D 为 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的导子. 如果存在 $z \in \widetilde{\mathscr{W}}$, 使得 $D = ad_z$, 其中 $ad_z(x) = [z, x]$, $\forall x \in \widetilde{\mathscr{W}}$, 则称 D 为内导子. 记 $\mathrm{Der}\,(\widetilde{\mathscr{W}})$ 和 $\mathrm{Inn}\,(\widetilde{\mathscr{W}})$ 分别为 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的所有导子、内导子构成的向量空间. 从而一上同调群 $\mathrm{H}^1(\widetilde{\mathscr{W}}, \widetilde{\mathscr{W}}) \cong \mathrm{Der}\,(\widetilde{\mathscr{W}})/\mathrm{Inn}\,(\widetilde{\mathscr{W}})$.

由 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 的定义知 $L_{0,0}$ 是半单的, 从而给出 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-阶化: $\widetilde{\mathscr{W}} = \bigoplus\limits_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \widetilde{\mathscr{W}}_m$, 其中

$$\widetilde{\mathscr{W}}_m = \{x \in \widetilde{\mathscr{W}} \mid [L_{0,0}, x] = mx\}.$$

显然, 对任意的 $m \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{\mathscr{W}}_m$ 是由 $L_{m,i}, M_{m,i}, N_{m,i}$ 线性张成, $\widetilde{\mathscr{W}}_{m+\frac{1}{2}}$ 是由 $Y_{m+\frac{1}{2},i}$ 线性张成, 其中 $i \in \mathbb{Z}$, 显然每一阶化向量空间都是无限维的.

若导子 $D \in \widetilde{\mathscr{W}}$ 满足 $D(\widetilde{\mathscr{W}}_m) \subset \widetilde{\mathscr{W}}_{m+n}, \forall\, m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, 称 D 是次数为 n 的. 记 $(\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_n$ 为所有次数为 n 的导子构成的向量空间.

引理 2.1 对任意的导子 $D \in \mathrm{Der}\,(\widetilde{\mathscr{W}})$, 有

$$D = \sum_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} D_m, \quad D_m \in (\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_m,$$

使得对任意的 $x \in \widetilde{\mathscr{W}}$, 仅有有限多个 $D_m(x) \neq 0$.

证 对任意的 $x_m \in (\widetilde{\mathscr{W}})_m$, $D \in \mathrm{Der}\,(\widetilde{\mathscr{W}})$, 不妨设

$$D(x_m) = \sum_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} y_n,$$

定义

$$D_n(x_m) = y_{m+n},$$

很容易验证 D_n 是 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的一个导子.

引理 2.2 如果 $n \neq 0$, 则任意的 $D \in (\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_n$ 都是内导子.

证　由于

$$[L_{0,0},x]=mx,\quad \forall\, x\in\widetilde{\mathscr{W}}_m,$$

将 D 作用在上式, 则有

$$mD(x)=[D(L_{0,0}),x]+[L_{0,0},D(x)].$$

由于 $D\in(\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_n$, $x\in\widetilde{\mathscr{W}}_m$, 从而 $D(x)\in\widetilde{\mathscr{W}}_{m+n}$, 则上式整理得

$$-nD(x)=[D(L_{0,0}),x].$$

从而就有 $D=ad_{-\frac{1}{n}D(L_{0,0})}$, 即为内导子.

引理 2.3　$\widetilde{\mathscr{W}}$ 的导子代数可分解为

$$\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}}=\bigoplus_{m\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}(\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_m.$$

证　由引理 2.1 知, 只需说明每一个导子 D 都可分解为有限个 D_m 的和. 假设 $D=\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}D_m$, 此求和有无限多个非零项, 由引理 2.2 知对于 $m\neq 0$, D_m 是内导子, 记 $D_m=ad_{x_m}$, 其中 $0\neq x_m\in\widetilde{\mathscr{W}}_m$, 从而 $D_m(L_{0,0})\neq 0$. 但是 $D(L_{0,0})=\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}D_m(L_{0,0})$, 从而等号右边为无限多个非零项的和, 这是矛盾的.

由引理 2.2 和引理 2.3, 有下面的引理.

引理 2.4

$$\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}}=(\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0+\mathrm{Inn}\,\widetilde{\mathscr{W}}.$$

为了刻画 $\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}}$, 由以上引理知, 只需要确定 $(\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0$. 记 $\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 表示 $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ 上的所有导子空间. 对于 $\rho\in\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 可以定义 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的线性映射:

$$D^{\rho}(X_{m,i})=X_m\rho(t^i),\quad \forall\, X\in\{L,M,N,Y\},\ m\in\frac{1}{2}\mathbb{Z},\ i\in\mathbb{Z}.\tag{2.1}$$

很容易验证 D^{ρ} 为 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的次数为 0 的导子. 记

$$D_{\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}:=\left\{D^{\rho}\mid \rho\in\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right\}$$

为 $\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}}$ 的子空间.

对于任意的 $D\in(\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0$, 不妨设

$$D(L_{m,i})=f^1_{m,i}L_{m,i}+g^1_{m,i}M_{m,i}+t^1_{m,i}N_{m,i},\tag{2.2}$$

其中 $f^1_{m,i},g^1_{m,i},t^1_{m,i}\in\mathbb{C}[t,t^{-1}],\ m,i\in\mathbb{Z}$. 由关系

$$D[L_{m,i},L_{n,j}]=[D(L_{m,i}),L_{n,j}]+[L_{m,i},D(L_{n,j})],$$

又由 (2.2) 及 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的李积关系, 整理得

$$\begin{aligned}&(n-m)(f^1_{m+n,i+j}L_{m+n,i+j}+g^1_{m+n,i+j}M_{m+n,i+j}+t^1_{m+n,i+j}N_{m+n,i+j})\\=&(n-m)f^1_{m,i}L_{m+n,i+j}-mg^1_{m,i}M_{m+n,i+j}-mt^1_{m,i}N_{m+n,i+j}\end{aligned}$$

$$+ (n-m)f_{n,j}^1 L_{m+n,i+j} + ng_{n,j}^1 M_{m+n,i+j} + nt_{n,j}^1 N_{m+n,i+j}.$$

比较上式 $L_{m+n,i+j}$ 的系数, 有

$$f_{m+n,i+j}^1 = f_{m,i}^1 + f_{n,j}^1, \quad m \neq n. \tag{2.3}$$

在上式中令 $m = i = 0$, 则有 $f_{0,0}^1 = 0$. 在 (2.3) 中取 $m = -n \neq 0$, $i = -j$, 则有 $f_{0,0}^1 = f_{-n,-j}^1 + f_{n,j}^1$, 从而有

$$f_{n,j}^1 + f_{-n,-j}^1 = 0, \quad n \neq 0. \tag{2.4}$$

引理 2.5 $f_{m+n,i+j}^1 = f_{m,i}^1 + f_{n,j}^1, \quad \forall\, m,n,i,j \in \mathbb{Z}.$

证 对于任意给定的 $m, n \in \mathbb{Z}$, 必存在一整数 k, 满足 $k \neq 0$, $k \neq m$, $k \neq -n$, 并且 $m + k \neq n - k$, 由 (2.3) 可得

$$\begin{aligned} f_{m+n,i+j}^1 &= f_{m+k,i}^1 + f_{n-k,j}^1, \\ f_{m+k,i}^1 &= f_{m,i}^1 + f_{k,0}^1, \\ f_{n-k,j}^1 &= f_{n,j}^1 + f_{-k,0}^1. \end{aligned}$$

结合 (2.4), 有

$$f_{m+n,i+j}^1 = f_{m,i}^1 + f_{n,j}^1, \quad \forall\, m,n,i,j \in \mathbb{Z}.$$

由引理 2.5, 有

$$f_{m,i}^1 = f_{m,0}^1 + f_{0,i}^1 = mf_{1,0}^1 + if_{0,1}^1, \quad \forall\, m, i \in \mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

令 $\rho = tf_{0,1}^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 由 (2.1), 则有

$$D^\rho L_{m,i} = L_m \rho(t^i) = if_{0,1}^1 L_{m,i}.$$

记 $\overline{D} = D - D^\rho$, 利用 (2.5), 可得

$$\overline{D}(L_{m,i}) = f_{m,0}^1 L_{m,i} + g_{m,i}^1 M_{m,i} + t_{m,i}^1 N_{m,i}.$$

不妨将 $\overline{D}$ 依然记作 D, 则有

$$f_{m,i}^1 = f_{m,0}^1, \quad \forall\, m, i \in \mathbb{Z}.$$

这意味着 $f_{m,i}^1$ 与第二个指标 i 无关, 这样可以记 $f_m^1 = f_{m,i}^1$, 结合 (2.5), 则有

$$f_m^1 = mf_1^1, \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

假设

$$D(M_{m,i}) = f_{m,i}^2 L_{m,i} + g_{m,i}^2 M_{m,i} + t_{m,i}^2 N_{m,i}, \tag{2.7}$$

其中 $f_{m,i}^2, g_{m,i}^2, t_{m,i}^2 \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, $m, i \in \mathbb{Z}$. 由关系

$$D[L_{m,i}, M_{n,j}] = [D(L_{m,i}), M_{n,j}] + [L_{m,i}, D(M_{n,j})],$$

又由 (2.6) 及 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的李积关系, 可得

$$n(f_{m+n,i+j}^2 L_{m+n,i+j} + g_{m+n,i+j}^2 M_{m+n,i+j} + t_{m+n,i+j}^2 N_{m+n,i+j})$$

$$= nf^1_m M_{m+n,i+j} + 2t^1_{m,i} M_{m+n,i+j} + (n-m) f^2_{n,j} L_{m+n,i+j} + ng^2_{n,j} M_{m+n,i+j} + nt^2_{n,j} N_{m+n,i+j}. \tag{2.8}$$

上式比较 $L_{m+n,i+j}$ 的系数, 有

$$nf^2_{m+n,i+j} = (n-m) f^2_{n,j}. \tag{2.9}$$

在上式取 $n=0$, 有

$$f^2_{0,j} = 0, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}. \tag{2.10}$$

在 (2.9) 中取 $m=-n$, 则有

$$f^2_{n,j} = \frac{f^2_{0,i+j}}{2}, \quad n \neq 0. \tag{2.11}$$

结合 (2.10) 和 (2.11), 从而

$$f^2_{n,j} = 0, \quad \forall\, n, j \in \mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

在 (2.8) 中比较 $M_{m+n,i+j}$ 的系数, 有

$$ng^2_{m+n,i+j} = nf^1_m + 2t^1_{m,i} + ng^2_{n,j}, \quad \forall\, m, n, i, j \in \mathbb{Z}. \tag{2.13}$$

在上式中令 $n=0$, 则有

$$t^1_{m,i} = 0, \quad \forall\, m, i \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

从而式 (2.13) 可简化为

$$g^2_{m+n,i+j} = f^1_m + g^2_{n,j}, \quad n \neq 0. \tag{2.15}$$

上式取 $j=0$, 则有

$$g^2_{m+n,i} = f^1_m + g^2_{n,0}, \quad n \neq 0. \tag{2.16}$$

这说明 $g^2_{m+n,i}$ 与第二个指标 i 无关, 从而不妨记 $g^2_m = g^2_{m,i}, i \in \mathbb{Z}$, 则 (2.16) 可改写为

$$g^2_{m+n} = f^1_m + g^2_n, \quad n \neq 0. \tag{2.17}$$

在上式中取 $m=-n$, 则有

$$g^2_0 = f^1_{-n} + g^2_n, \quad n \neq 0. \tag{2.18}$$

由 (2.6) 及上式有

$$g^2_n = f^1_n + g^2_0, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.19}$$

接下来假设

$$D(N_{m,i}) = f^3_{m,i} L_{m,i} + g^3_{m,i} M_{m,i} + t^3_{m,i} N_{m,i}, \tag{2.20}$$

其中 $f^3_{m,i}, g^3_{m,i}, t^3_{m,i} \in \mathbb{C}[t,t^{-1}],\ m, i \in \mathbb{Z}$. 由关系

$$D[L_{m,i}, N_{n,j}] = [D(L_{m,i}), N_{n,j}] + [L_{m,i}, D(N_{n,j})],$$

又由 (2.6), (2.14) 及 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的李积关系, 可得

$$n(f^3_{m+n,i+j} L_{m+n,i+j} + g^3_{m+n,i+j} M_{m+n,i+j} + t^3_{m+n,i+j} N_{m+n,i+j})$$

$$
\begin{aligned}
&= nf_m^1 N_{m+n,i+j} - 2g_{m,i}^1 M_{m+n,i+j} + (n-m) f_{n,j}^3 L_{m+n,i+j} + ng_{n,j}^3 M_{m+n,i+j} \\
&\quad + nt_{n,j}^3 N_{m+n,i+j}.
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

比较上式中 $L_{m+n,i+j}$ 的系数, 有

$$nf_{m+n,i+j}^3 = (n-m) f_{n,j}^3, \quad \forall\, m,n,i,j \in \mathbb{Z}. \tag{2.22}$$

这与 (2.9) 的讨论一致, 从而有

$$f_{m,i}^3 = 0, \quad \forall\, m,i \in \mathbb{Z}. \tag{2.23}$$

在 (2.21) 中比较 $M_{m+n,i+j}$ 的系数, 则有

$$ng_{m+n,i+j}^3 = -2g_{m,i}^1 + ng_{n,j}^3. \tag{2.24}$$

在上式中令 $n=0$, 则有

$$g_{m,i}^1 = 0, \quad \forall\, m,i \in \mathbb{Z}. \tag{2.25}$$

从而 (2.24) 化简为

$$g_{m+n,i+j}^3 = g_{n,j}^3, \quad n \neq 0. \tag{2.26}$$

在上式中令 $j=0$, 则有

$$g_{m+n,i}^3 = g_{n,0}^3, \quad n \neq 0. \tag{2.27}$$

上式说明 $g_{m+n,i}^3$ 与第二个指标 i 的选取无关, 从而不妨记 $g_m^3 = g_{m,i}^3$, 则 (2.27) 可简化为

$$g_{m+n}^3 = g_n^3, \quad n \neq 0. \tag{2.28}$$

在上式中取 $m=-n\neq 0$, 则有

$$g_n^3 = g_0^3, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.29}$$

在 (2.21) 中比较 $N_{m+n,i+j}$ 的系数, 可得

$$t_{m+n,i+j}^3 = f_m^1 + t_{n,j}^3, \quad n \neq 0. \tag{2.30}$$

在上式中令 $j=0$, 则有

$$t_{m+n,i}^3 = f_m^1 + t_{n,0}^3, \quad n \neq 0.$$

这说明 $t_{m+n,i}^3$ 与第二个指标的 i 无关, 从而记 $t_m^3 = t_{m,i}^3$, 则 (2.30) 可写为

$$t_{m+n}^3 = f_m^1 + t_n^3, \quad n \neq 0. \tag{2.31}$$

在上式取 $m=-n$, 结合 (2.6), 从而有

$$t_n^3 = f_n^1 + t_0^3, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.32}$$

综合 (2.6),(2.12),(2.14),(2.19),(2.23),(2.25),(2.29) 及 (2.32), 有下面的引理.

引理 2.6

$$
\begin{aligned}
D(L_{m,i}) &= f_m^1 L_{m,i}, \\
D(M_{m,i}) &= g_m^2 M_{m,i} + t_{m,i}^2 N_{m,i},
\end{aligned}
$$

$$D(N_{m,i}) = g_0^3 M_{m,i} + t_m^3 N_{m,i}^3,$$

其中 $f_m^1 = mf_1^1$, $g_m^2 = mf_1^1 + g_0^2$, $t_m^3 = mf_1^1 + t_0^3$, $\forall\, m, i \in \mathbb{Z}$.

由关系

$$D[M_{m,i}, N_{n,j}] = [D(M_{m,i}), N_{n,j}] + [M_{m,i}, D(N_{n,j})], \tag{2.33}$$

又由引理 2.6 及 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的李积关系, 有

$$-2(g_{m+n}^2 M_{m+n,i+j} + t_{m+n,i+j}^2 N_{m+n,i+j}) = -2g_m^2 M_{m+n,i+j} - 2t_n^3 M_{m+n,i+j}. \tag{2.34}$$

由上式, 显然有

$$t_{m,i}^2 = 0, \quad \forall\, m, i \in \mathbb{Z}. \tag{2.35}$$

在 (2.34) 中比较 $M_{m+n,i+j}$ 的系数, 则有

$$g_{m+n}^2 = g_m^2 + t_n^3. \tag{2.36}$$

在上式取 $n = 0$, 可得

$$t_0^3 = 0.$$

从而由引理 2.6, 知

$$t_n^3 = f_n^1, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.37}$$

假设

$$D(Y_{m+\frac{1}{2},i}) = b_{m+\frac{1}{2},i} Y_{m+\frac{1}{2},i},$$

其中 $b_{m+\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, $m, i \in \mathbb{Z}$. 考虑关系

$$D[L_{m,i}, Y_{n+\frac{1}{2},j}] = [D(L_{m,i}), Y_{n+\frac{1}{2},j}] + [L_{m,i}, D(Y_{n+\frac{1}{2},j})].$$

由引理 2.6 及 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的李积关系, 整理得

$$b_{m+n+\frac{1}{2},i+j} = f_m^1 + b_{n+\frac{1}{2},j}, \quad n + \frac{1-m}{2} \neq 0. \tag{2.38}$$

在上式取 $j = 0$, 则有

$$b_{m+n+\frac{1}{2},i} = f_m^1 + b_{n+\frac{1}{2},0}, \quad n + \frac{1-m}{2} \neq 0.$$

这说明 $b_{m+\frac{1}{2},i}$ 与第二个指标 i 的选取无关, 从而记 $b_{m+\frac{1}{2}} = b_{m+\frac{1}{2},i}$, 这样我们将上式改写为

$$b_{m+n+\frac{1}{2}} = f_m^1 + b_{n+\frac{1}{2}}, \quad n + \frac{1-m}{2} \neq 0. \tag{2.39}$$

在上式令 $n = 0$, 则有

$$b_{m+\frac{1}{2}} = f_m^1 + b_{\frac{1}{2}}, \quad m \neq 1. \tag{2.40}$$

在 (2.39) 中取 $m = -1, n = 1$, 有

$$b_{\frac{1}{2}} = f_{-1}^1 + b_{\frac{3}{2}}. \tag{2.41}$$

综合 (2.40) 及 (2.41), 从而

$$b_{m+\frac{1}{2}}=f_m^1+b_{\frac{1}{2}},\quad \forall\, m\in\mathbb{Z}. \tag{2.42}$$

由关系

$$D[Y_{m+\frac{1}{2},i},Y_{n+\frac{1}{2},j}]=[D(Y_{m+\frac{1}{2},i}),Y_{n+\frac{1}{2},j}]+[Y_{m+\frac{1}{2},i},D(Y_{n+\frac{1}{2},j})].$$

又由引理 2.6 及 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 上的李积关系, 整理得

$$g^2_{m+n+1}=b_{m+\frac{1}{2}}+b_{n+\frac{1}{2}},\quad m\neq n. \tag{2.43}$$

在上式取 $m=0,n=-1$, 则有

$$g_0^2=b_{\frac{1}{2}}+b_{-\frac{1}{2}}, \tag{2.44}$$

在 (2.42) 中取 $m=-1$, 从而

$$b_{-\frac{1}{2}}=f_{-1}^1+b_{\frac{1}{2}}. \tag{2.45}$$

由 (2.44) 及 (2.45), 有

$$g_0^2=2b_{\frac{1}{2}}-f_1^1, \tag{2.46}$$

由引理 2.6, (2.35),(2.37),(2.42) 及 (2.46), 有下面的引理.

引理 2.7

$$\begin{aligned}
D(L_{m,i})&=mf_1^1L_{m,i},\\
D(M_{m,i})&=(mf_1^1+2b_{\frac{1}{2}}-f_1^1)M_{m,i},\\
D(N_{m,i})&=g_0^3M_{m,i}+mf_1^1N^3_{m,i},\\
D(Y_{m+\frac{1}{2},i})&=(mf_1^1+b_{\frac{1}{2}})Y_{m+\frac{1}{2},i},
\end{aligned}$$

其中 $f_1^1,g_0^3,b_{\frac{1}{2}}\in\mathbb{C}[t,t^{-1}]$, $m,i\in\mathbb{Z}$.

接下来给出本文的主要定理.

定理 2.1 $\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}}=\mathrm{Inn}\,\widetilde{\mathscr{W}}\bigoplus D_{\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$, 即 $\mathrm{H}^1(\widetilde{\mathscr{W}},\widetilde{\mathscr{W}})=D_{\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.

证 首先刻画 $(\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0$. 对任意的 $D\in(\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0$, 由引理 2.5 中关于 D 的说明及引理 2.7, 存在 $\rho\in\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 使得

$$\begin{aligned}
(D-D^\rho)(L_{m,i})&=mf_1^1L_{m,i},\\
(D-D^\rho)(M_{m,i})&=(mf_1^1+2b_{\frac{1}{2}}-f_1^1)M_{m,i},\\
(D-D^\rho)(N_{m,i})&=g_0^3M_{m,i}+mf_1^1N^3_{m,i},\\
(D-D^\rho)(Y_{m+\frac{1}{2},i})&=(mf_1^1+b_{\frac{1}{2}})Y_{m+\frac{1}{2},i},
\end{aligned}$$

其中 $f_1^1,g_0^3,b_{\frac{1}{2}}\in\mathbb{C}[t,t^{-1}]$, $m,i\in\mathbb{Z}$. 取 $f_1^1L_0-\frac{1}{2}g_0^3M_0+(b_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}f_1^1)N_0\in\widetilde{\mathscr{W}}$, 很容易验证 $D-D^\rho=ad_{f_1^1L_0-\frac{1}{2}g_0^3M_0+(b_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}f_1^1)N_0}$, 从而有

$$(\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0=D_{\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}+(\mathrm{Inn}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0.$$

下面说明 $D_{\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\bigcap(\mathrm{Inn}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0=0$. 假设 $D\in D_{\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\bigcap(\mathrm{Inn}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0$, 则存在 $\rho\in\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 使得

$$D=D^{\rho}=\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i ad_{L_{0,i}}+\sum_{i\in\mathbb{Z}}b_i ad_{M_{0,i}}+\sum_{i\in\mathbb{Z}}c_i ad_{N_{0,i}},$$

其中 a_i,b_i,c_i 仅有有限多个非零. 将上式两边分别作用在 $L_{0,i}$ 上, 则有 $L_0\rho(t^i)=0$, 即有 $\rho=0$, 从而有

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i ad_{L_{0,i}}+\sum_{i\in\mathbb{Z}}b_i ad_{M_{0,i}}+\sum_{i\in\mathbb{Z}}c_i ad_{N_{0,i}}=0.$$

因此 $D_{\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\bigcap(\mathrm{Inn}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0=0$. 这样, 就有

$$(\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0=D_{\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\bigoplus(\mathrm{Inn}\,\widetilde{\mathscr{W}})_0. \tag{2.47}$$

结合引理 2.4, 有

$$\mathrm{Der}\,\widetilde{\mathscr{W}}=\mathrm{Inn}\,\widetilde{\mathscr{W}}\bigoplus D_{\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}.$$

从而有

$$\mathrm{H}^1(\widetilde{\mathscr{W}},\widetilde{\mathscr{W}})=D_{\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}.$$

致谢 作者感谢审稿人对原稿的修改建议.

参　考　文　献

[1] Henkel M. Schrödinger invariance and strongly anisotropic critical systems [J]. *J Stat Phys*, 1994, 75:1023–1029.

[2] Roger C, Unterberger J. The Schrödinger-Virasoro Lie group and algebra: representation theory and cohomological study [J]. *Ann Henri Poincaré*, 2006, 7:1477–1529.

[3] Tan S, Zhang X. Automorphisms and Verma modules for generalized Schrödinger-Virasoro algebras [J]. *J Algebra*, 2009, 322:1379–1394.

[4] Wang W, Li J, Xu Y. Derivation algebra and automorphism of the twisted deformative Schrödinger-Virasoro Lie algebra [J]. *Comm Algebra*, 2012, 40:3365–3388.

[5] Wu H, Wang S, Yue X. Structures of generalized loop Virasoro algebras [J]. *Comm Algebra*, 2014, 42:1545–1558.

[6] Unterberger J. On vertex algebra representations of the Schrödinger-Virasoro Lie algebra [J]. *Nucler Phys B*, 2009, 823:320–371.

[7] Gao S, Jiang C, Pei Y. Structure of the extended Schrödinger-Virasoro Lie algebra [J]. *Alg Colluq*, 2009, 16:549–666.

[8] Farnsteiner R. Derivations and central extensions of finitely generated graded Lie algebras [J]. *J Algebra*, 1988, 118:33–45.

[9] Doković D, Zhao K. Derivations, isomorphisms and second cohomology of generalized Block algebras [J]. *Alg Colloq*, 1996, 3:245–272.

[10] Doković D, Zhao K. Derivations, isomorphisms and second cohomology of generalized Witt algebras [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1998, 350:643–664.

Derivations of the Extended Loop Schrödinger-Virasoro Algebras

WANG Song[1] WANG Xiaoming[1]

[1]College of Information Technology, Shanghai Ocean University, Shanghai 201306, China. E-mail: s-wang@shou.edu.cn; xmwang@shou.edu.cn

Abstract The infinite dimensional Lie algebras related to the extended Schrödinger-Virasoro algebras are introduced in this paper, and its derivation algebras are completely determined.

Keywords Schrödinger-Virasoro algebra, Laurent polynomial algebra, Derivation

2000 MR Subject Classification 17B05, 17B56, 17B65, 17B68