数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(3):287–306
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0022

反射的椭圆随机偏微分方程的网格逼近*

戴 珺[1] 张 静[1]

提要 研究了由可乘噪声驱动的反射的椭圆随机偏微分方程网格近似解的收敛性, 其中考虑区域 $D := (0,1)^d$, $d = 1,2,3$. 此外, 还研究确定的椭圆障碍问题离散格式的解存在唯一性, 并得到解关于障碍函数的连续依赖性和收敛性.

关键词 随机偏微分方程, 障碍问题, 白噪声, 有限差分方法
MR (2000) 主题分类 60H15, 76M20
中图法分类 O211.6
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)03-0287-20

1 引 言

本文中, 考虑如下反射的半线性椭圆随机偏微分方程 (SPDE) 的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x,u(x)) + \sigma(x,u(x))\dot{W}(x) + \eta(x), \quad x \in D; \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial D; \quad u(x) \geqslant 0, \quad x \in D, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $D := (0,1)^d$, $\{\dot{W}(x), x \in \overline{D}\}$ 是 $\overline{D} := [0,1]^d$ 上的白噪声, f 和 σ 是可测映射:$[0,1]^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 作为方程解 (u,η) 的一部分, $\eta(x)$ 是随机测度，相当于阻止解 u 变负的局部时. 本文中, 我们假设空间维数 $d = 1,2,3$.

Nualart 和 Tindel[1] 研究了可加噪声驱动的在零点处反射的椭圆 SPDE 解的存在唯一性问题, 其中他们考虑 $\sigma(\cdot) = 1$ 且空间变量 $x \in D \subseteq \mathbb{R}^d$, $d = 1,2,3$ 的情形. 文 [1] 将随机椭圆方程转换成带奇异边界的确定性障碍问题, 该类问题可参考文 [2]. 注意此时椭圆变分不等式的边界函数只是连续, 达不到经典变分不等式理论 (见 [2]) 中强解存在唯一性的条件. 之后, Yue 和 Zhang[3] 研究了可乘噪声驱动的反射的椭圆 SPDE 解的存在唯一性问题, 该结论是文 [1] 的一个拓展. 关于该模型的应用, 反射的 SPDE 在流体力学中可以用来描述硬壁上界面高度的动态变化规律, 见文 [4].

此外, 在文 [5] 中研究了可加噪声驱动的椭圆 SPDE 的数值方法, 其中考虑区域 $D = (0,1)^d$, $d = 1,2,3$. 通过 Laplace 算子的离散格式, 得到离散 Green 函数即一种截断的 Fourier 级数, 最终得到了数值解在 $L^2(D)$ 和 $L^\infty(D)$-范数中的收敛速率. 进一步, Martinez 和 Sanz-Solè[6] 在更高维数 $d \geqslant 4$ 时研究了彩色噪声 (colored noise) 驱动的椭圆 SPDE 的网格逼近. 事实上, 由于当 $d \geqslant 4$ 时, Green 函数 $G_D(x,\cdot) \in L^\alpha(D)$, $\alpha \in [1, \frac{d}{d-2})$, 随机积分

本文 2017 年 7 月 8 日收到, 2018 年 7 月 4 日收到修改稿.
[1]复旦大学数学科学学院, 上海 200433. E-mail: 13110180052@fudan.edu.cn; zhang_jing@fudan.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11401108) 和上海市浦江人才计划 (No. 14PJ1401500) 的资助.

$\int_D G_D(x,y)\mathrm{d}W(y)$ 没有相应的 L^2 估计, 因此他们采用彩色噪声替代了 (1.1) 中的白噪声, 从而给出了更严格的定义.

对于反射的抛物 SPDEs, Nualart 和 Pardoux[7] 研究了在空间 $[0,1]$ 上的一类由可加时空白噪声驱动的非线性热方程的 Dirichlet 边界问题. Donati-Martin 和 Pardoux[8] 推广了文 [7] 中的模型, 其中非线性项同时出现在漂移项和扩散项中, 也就是可乘噪声驱动问题. 他们利用惩罚方法证明了解的存在性, 但是无法得到唯一性. 之后在 2009 年, Xu 和 Zhang[9] 解决了唯一性问题并得到了解的大偏差性. 最近, Denis, Matoussi 和 Zhang[10] 研究了更广义的模型, 其中 SPDE 是散度型且系数依赖于解的梯度. 他们的方法是基于抛物位势理论中的分析技术. Gyöngy 在文 [11–12] 中首次提出了由时空白噪声驱动的随机热方程的离散格式. 在文 [13] 中, Zhang 通过反射的随机微分系统构造了一个由时空白噪声驱动的反射的随机偏微分方程的晶格逼近, 同时他还研究了时空区域上确定的 Skorohod 型问题和确定的抛物障碍问题近似解的收敛性.

本文的主要目的是建立反射的椭圆 SPDEs 的数值格式并拓展文 [13] 的结果. 正如文 [13] 所言，困难点集中在方程 (1.1) 中出现的随机测度 η 的离散化和更高的空间维度. 借助文 [1] 提到的经典方法，我们将反射问题分解成无反射的椭圆 SPDE 和确定的椭圆障碍问题. 此外我们还通过证明确定的椭圆障碍问题离散格式解的存在唯一性和解关于障碍函数连续依赖性, 得到离散格式的收敛性. 最终, 利用文 [5] 中证明的原问题和其有限差分格式下格林函数 L^2 估计, 我们得到收敛性结果.

本文剩下章节的安排如下: 在第 2 节中, 我们建立了问题的框架. 在第 3 节中, 我们介绍了离散格式和主要结论. 在第 4 节, 我们建立了确定的椭圆障碍问题在有限差分格式下数值解的存在唯一性, 关于障碍函数的连续依赖性和收敛性. 第 5 节致力于证明反射的椭圆 SPDEs 数值解的存在唯一性及收敛性. 其中通过将反射的椭圆 SPDEs 的差分格式和第 4 节中确定的椭圆障碍问题的差分格式仔细比较, 可以将问题转化为研究椭圆 SPDEs 积分形式数值解的收敛性, 即离散 Green 函数的收敛性.

2 问题框架

记 $D:=(0,1)^d$. 给定完备的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 和其上 d-维指标的标准 Wiener 过程 $W=\{W(x):x\in\overline{D}\}$, 在 $\overline{D}:=[0,1]^d$ 上几乎处处连续的 Gauss 随机场, 满足 $EW(x)=0,\ x\in\overline{D}$ 和 $EW(x)W(y)=x\wedge y=\prod\limits_{j=1}^{d}(x_j\wedge y_j)\ x,y\in\overline{D}$. 方程 (1.1) 中 $\dot{W}(x)$ 是 W 关于 Lebesgue 测度的形式导数, 符号 Δ 定义为 $L^2(D)$ 空间中的 Laplace 算子. 当 $u(x)$ 碰到 0 点时, 我们施加一股额外的力量阻止 u 变成负值. 这种效应在方程 (1.1) 中表示为右端增加一个额外的未知项 η.

记 Euclid 空间中的内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $L^2(D)$ 中的内积为 $(\cdot,\cdot)$, D 上的上确界范数为 $||\cdot||_\infty$, 两种多重指标集合分别为

$$I^d:=\{1,2,\cdots\}^d,\quad I_n^d:=\{1,\cdots,n-1\}^d.$$

记 $\mathcal{C}_0^\infty(D)$ 表示在 D 上所有有紧支集的无穷可微连续函数组成的空间.

我们假定 $d=1,2,3$, $f,\sigma: D\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可测函数，且满足下列条件:

假设 1 存在常数 L_1, 使得对任意 $x,y\in D$, $u,v\in\mathbb{R}$,

$$|f(x,u)-f(y,v)|+|\sigma(x,u)-\sigma(y,v)|\leqslant L_1[|x-y|+|u-v|].$$

假设 2 存在常数 L_2, 使得 $|f(0,0)|+|\sigma(0,0)|\leqslant L_2$.

假设 3 f 局部有界、连续且关于第二个变量非减.

方程 (1.1) 有一组解 (u,η), 使得 $u(x)\geqslant 0$ 在 D 上成立, 且在分布意义下满足方程 (1.1), 而 $\eta(\mathrm{d}x)$ 是在 D 上的随机测度使得过程 u 非负. 关于方程 (1.1) 的解的严格定义来自于文 [3, 定义2.1], 即下面定义 2.1.

定义 2.1 (u,η) 被称为方程 (1.1) 的解, 如果

(i)$\{u(x),\ x\in\overline{D}\}$ 是 $\overline{D}$ 上的非负连续随机场, 且几乎处处满足 $u|_{\partial D}=0$;

(ii)$\eta(\mathrm{d}x)$ 是 D 上的随机测度, 使得对任意紧子集 $K\subset D$, 有 $\eta(K)<+\infty$;

(iii) 对于所有的 $\phi\in C_0^\infty(D)$, 有

$$-(u,\Delta\phi)=(f(u),\phi)+\int_D\phi(x)\sigma(u)W(\mathrm{d}x)+\int_D\phi(x)\eta(\mathrm{d}x),\quad P-\text{a.s.};\tag{2.1}$$

(iv) $\int_D u(x)\eta(\mathrm{d}x)=0$.

注 2.1 (i) 我们需要解释这里能使用文 [3] 中定理 4.1 解存在唯一性结果的原因. 事实上, 我们的假设 1–3 强于文 [3] 中提到的假设, 并且文 [3] 中条件 (4.2) 包含在我们定理 3.1 的条件 (3.14) 中;

(ii) 为了方便读者理解这个抽象的随机测度, 我们从分布意义下简单刻画随机测度 η 的形式 (见 [1, 定理2.2] 中的证明过程). 首先定义惩罚项:

$$\eta_\varepsilon(\mathrm{d}x):=\frac{1}{\varepsilon}(z^\varepsilon(x)+v(x))^-\mathrm{d}x,$$

其中 v 是 $\overline{D}$ 上给定的连续函数满足 $v|_{\partial D}=0$, z^ε 是方程

$$\begin{cases}-\Delta z^\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}(z^\varepsilon+v)^-(x),\quad x\in D,\\ z^\varepsilon|_{\partial D}=0\end{cases}$$

唯一的 $L^2(D)\cap C(\overline{D})$ 解. 从文 [1, 定理2.2] 中的证明, 可知在 D 上当 ε 趋于 0 时, η_ε 依分布收敛到分布 η, 即对任意的 $\phi\in C_0^\infty(D)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_D\phi(x)\eta_\varepsilon(\mathrm{d}x)=\int_D\phi(x)\eta(\mathrm{d}x).$$

由定义 $\eta\geqslant 0$, 因此 η 是一个 D 上的测度.

3　离散格式和主要结论

对于 $n\in\mathbb{N}^*$, 记 $h:=\frac{1}{n}$,

$$D_n:=\{hi:\ i=(i_1,i_2,\cdots,i_d)\in I_n^d\},$$
$$\overline{D}_n:=\{hj: j=0,1,\cdots,n\}^d,\quad \partial D_n:=\overline{D}_n\backslash D_n.$$

记 $\delta_j^+, \delta_j^-, \Delta_n$ 分别是 D_n 上的向前、向后和二阶差分算子: 对于 $x \in D_n$,

$$\delta_j^+\psi(x) := n(\psi(x+he_j)-\psi(x)), \quad \delta_j^-\psi(x) := n(\psi(x)-\psi(x-he_j)),$$
$$\Delta_n\psi(x) := \sum_{j=1}^d \delta_j^+\delta_j^-\psi(x) = \sum_{j=1}^d n^2(\psi(x+he_j)-2\psi(x)+\psi(x-he_j)),$$

其中 $\{e_j\}_{j=1}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的标准基, ψ 是定义在 D_n 上的函数, 满足 $\psi|_{x\notin D_n} = 0$. 对于 $t \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$, $j = 0, \pm1, \pm2, \cdots$, 和 $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, 定义函数:

$$k_n(t) := \frac{j}{n}, \quad k_n^+(t) := \frac{j+1}{n}, \quad \underline{k}_n(x) := (k_n(x_1), \cdots, k_n(x_d)).$$

记 (u^n, η^n) 是反射的随机方程组

$$\begin{cases} -\Delta_n u^n(x) = f(x, u^n(x)) + \sigma(x, u^n(x))\delta_1^+ \cdots \delta_d^+ W(x) + \eta^n(x), \quad x \in D_n; \\ u^n(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{D}_n; \quad u^n|_{\partial D_n} = 0; \quad \sum\limits_{x\in D_n} u^n(x)\eta^n(x) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

的解.

现在介绍一种网格点的排序方法, 称为自然排序 (见 [14, 第 298 页]):

当我们说网格 D_n 上的全部 $(n-1)^d$ 个点按照自然排序, 意味着对于排列后的序列中第 k 个元素坐标对应着 $\frac{i}{n}$, $i = (i_1, \cdots, i_d) \in I_n^d$, 满足

$$k = i_1 + (n-1)(i_2-1) + \cdots + (n-1)^{d-1}(i_d-1). \tag{3.2}$$

如果把方程组 (3.1) 看成一个矩阵方程的话, 方程按照自然排序后对应的矩阵将会有很好的对称正定, 主对角占优等性质 (称为 M- 阵). 具体情况如下:

记点列 $(x_1, \cdots, x_{(n-1)^d})$ 按照自然顺序排列, 其中 $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant(n-1)^d}$ 是 D_n 中所有点. 记

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^n &:= (u^n(x_1), \cdots, u^n(x_{(n-1)^d})), \\ \overline{\eta}^n &:= (\eta^n(x_1), \cdots, \eta^n(x_{(n-1)^d})), \\ f^n(\mathbf{u}^n) &:= (f(x_1, u^n(x_1)), \cdots, f(x_{(n-1)^d}, u^n(x_{(n-1)^d}))), \\ \sigma^n(\mathbf{u}^n)\Delta W^n &:= (\sigma(x_1, u^n(x_1))\delta_1^+ \cdots \delta_d^+ W(x_1), \cdots, \\ &\qquad \sigma(x_{(n-1)^d}, u^n(x_{(n-1)^d})\delta_1^+ \cdots \delta_d^+ W(x_{(n-1)^d}))), \end{aligned}$$

那么方程组 (3.1) 可以被看成一个 $(n-1)^d$-维矩阵方程, 记为

$$-n^2 A^n \mathbf{u}^n = f^n(\mathbf{u}^n) + n^d \sigma^n(\mathbf{u}^n)\Delta W^n + \overline{\eta}^n, \tag{3.3}$$

其中很容易知道矩阵 $A^n := A^{n,d}$ 是 $\mathbb{R}^{(n-1)^d}$ 上的一个对称线性算子. 特别地, 当 $d = 1$ 时, 令 $A^{n,1} = (A_{ki}^{n,1})$ 表示一个 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵, 其中元素 $A_{kk}^{n,1} = -2$, $A_{ki}^{n,1} = 1$, $|k-i| = 1$, 和 $A_{ki}^n = 0$, $|k-i| > 1$. 当 $d = 2, 3$ 时, 同样可以发现 $-A^n$ 是一个对称正定阵.

如果记 $B := -n^2 A^n$, 那么

$$\mathbf{u}^n = B^{-1} f^n(\mathbf{u}^n) + n^d B^{-1}\sigma^n(\mathbf{u}^n)\Delta W^n + B^{-1}\overline{\eta}^n.$$

对于 $\alpha \in I_n^d$, 定义

$$\varphi_\alpha(x) := \varphi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\varphi_{\alpha_d}(x_d), \quad \text{其中 } \varphi_j(t) := \sqrt{2}\sin(j\pi t),\ t \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \cdots;$$

$$\varphi^n_{\alpha_i}(x_i) := \varphi_{\alpha_i}(k_n(x_i)) + n[\varphi_{\alpha_i}(k_n^+(x_i)) - \varphi_{\alpha_i}(k_n(x_i))](x_i - k_n(x_i)),\ 1 \leqslant i \leqslant d;$$

$$\varphi^n_\alpha(x) := \varphi^n_{\alpha_1}(x_1)\cdots\varphi^n_{\alpha_d}(x_d),$$

那么有下列表示:

$$B^{-1}x = \sum_{\alpha\in I_n^d} \lambda_\alpha \langle x, b_\alpha\rangle b_\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^{(n-1)^d},$$

其中

$$b_\alpha := \Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{d}{2}} (\varphi_\alpha(x))_{x\in D_n}, \quad \lambda_\alpha := \sum_{i=1}^d \pi^2\alpha_i^2 c_{\alpha_i}, \quad \alpha \in I_n^d,$$

分别是 n^2A^n 的特征向量和特征值; $c_j := \sin^2(\frac{j\pi}{2n})(\frac{j\pi}{2n})^{-2}$ 满足 $\frac{4}{\pi^2} \leqslant c_j \leqslant 1$.

对于 $x, y \in [0,1]^d$, 记

$$K_n(x,y) := \sum_{\alpha\in I_n^d} \frac{1}{\lambda_\alpha} \varphi_\alpha(\underline{k}_n(x))\varphi_\alpha(\underline{k}_n(y)), \tag{3.4}$$

$$K^n(x,y) := \sum_{\alpha\in I_n^d} \frac{1}{\lambda_\alpha} \varphi^n_\alpha(x)\varphi_\alpha(\underline{k}_n(y)), \tag{3.5}$$

$$K(x,y) := \sum_{\alpha\in I^d} \frac{1}{\pi^2|\alpha|^2} \varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha(y), \tag{3.6}$$

$$K'(x,y) := \sum_{\alpha\in I^d} \frac{1}{\pi^2|\alpha|^2} \varphi^n_\alpha(x)\varphi_\alpha(y), \tag{3.7}$$

其中 $K(x,y)$ 是 D 上 Poisson 方程的 Dirichlet 问题的 Green 函数, $K_n(x,y)$ 是有限差分格式下的离散 Green 函数; $K'(x,y)$ 和 $K^n(x,y)$ 分别是 $K(x,y)$ 和 $K_n(x,y)$ 关于变量 x 的线性插值后得到的连续逼近.

下面介绍一个关于 Green 函数的引理, 它的证明可以直接或间接地从文 [5, 引理3.2, 3.3 和3.4] 中得到.

引理 3.1　记 $G = K, K', K^n, K_n$. 存在仅依赖于维数 d 的常数 C_1, 使得

$$\int_D |G(x,y)|^2 \mathrm{d}y \leqslant C_1, \quad x \in D. \tag{3.8}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$, $x, z \in D$, 存在常数 B, 使得

$$\int_D |G(x,y) - G(z,y)|^2 \mathrm{d}y \leqslant B|x - z|^{4\gamma(d,\varepsilon)}, \tag{3.9}$$

其中

$$\gamma(d,\varepsilon) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{当 } d = 1; \\ \dfrac{1}{2} - \varepsilon, & \text{当 } d = 2; \\ \dfrac{1}{4} - \varepsilon, & \text{当 } d = 3. \end{cases} \tag{3.10}$$

对于任意的 $x \in D_n$, 利用 (3.3) 和 (3.4), 有

$$u^n(x) = \int_D K_n(x,y) f(\underline{k}_n(y), u^n(\underline{k}_n(y)))\mathrm{d}y + \int_D K_n(x,y)\eta^n(\underline{k}_n(y))\mathrm{d}y$$

$$+\int_D K_n(x,y)\sigma(\underline{k}_n(y),u^n(\underline{k}_n(y)))\mathrm{d}W(y). \tag{3.11}$$

下列引理是关于离散格式解的存在唯一性.

引理 3.2 假设 1 和 2 成立, 且存在 $p>\frac{d}{2\gamma(d,\varepsilon)}$, 使得 L_1 满足

$$2^{2p-1}L_1^pC_D^{\frac{p}{2}}+2^{3p-2}c_pL_1^p(aB^{\frac{p}{2}}+C_D^{\frac{p}{2}})<1, \tag{3.12}$$

其中 c_p 和 a 是 Burkholder 不等式和 Kolmogorov 引理中出现的常数, B 是估计式 (3.9) 中 Green 函数 K_n 的常数, $C_D:=\sup\limits_{x\in D}\int_D|K_n(x,y)|^2\mathrm{d}y$. 那么, 方程 (3.3) 有唯一解 $(\mathbf{u}^n,\overline{\eta}^n)$.

我们将在第 5 节再证明引理 3.2.

对于 $n\in\mathbb{N}^*$, 由 u^n 在 D_n 上的值, 通过线性插值, 可以得到连续的近似解 $\widetilde{u}^n$. 比如对于定义在点集 $\{t_i:=i/n:i=0,1,2,\cdots,n\}$ 上的函数 ψ, 可以通过线性插值获得 $[0,1]$ 上其他点的函数值, 即对 $t\in[t_i,t_{i+1}),\ i=0,1,\cdots,n-1$ 定义 $\psi(t):=\psi(t_i)+n(t-t_i)(\psi(t_{i+1})-\psi(t_i))$. 令 $\{u^n(x):x\in D_n\}$ 由 (3.11) 定义. 通过对每个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_d$ 依次进行线性插值, 得到近似解 $\widetilde{u}^n(x_1,x_2,\cdots,x_d)$, 那么对任意的 $x\in D$, 有

$$\begin{aligned}\widetilde{u}^n(x)=&\int_D K^n(x,y)f(\underline{k}_n(y),u^n(\underline{k}_n(y)))\mathrm{d}y+\int_D K^n(x,y)\eta^n(\underline{k}_n(y))\mathrm{d}y\\&+\int_D K^n(x,y)\sigma(\underline{k}_n(y),u^n(\underline{k}_n(y)))\mathrm{d}W(y).\end{aligned} \tag{3.13}$$

接下来是本章的主要结论.

定理 3.1 假设 1, 2 和 3 成立, 且存在 $p>\frac{d}{2\gamma(d,\varepsilon)}$, 使得 L_1 满足

$$2^{3p-2}L_1^p(\widetilde{C}_D)^{\frac{p}{2}}+2^{4p-3}c_pL_1^p(aB^{\frac{p}{2}}+\widetilde{C}_D^{\frac{p}{2}})<1, \tag{3.14}$$

其中 c_p 和 a 是 Burkholder 不等式和 Kolmogorov 引理中出现的常数, B 是估计式 (3.9) 中 Green 函数 K^n 的常数, $\widetilde{C}_D:=\sup\limits_{x\in D}\int_D|K^n(x,y)|^2\mathrm{d}y$. 那么

$$\lim_{n\to\infty}E\Big[\sup_{x\in D}|\widetilde{u}^n(x)-u(x)|^p\Big]=0. \tag{3.15}$$

4 确定的椭圆障碍问题的离散逼近

对于 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, 记 $a\geqslant b$ 表示 $a_i\geqslant b_i,1\leqslant i\leqslant n\in\mathbb{N}^*$. 不妨设 $v(x)\in C(D)$ 且 $v|_{\partial D}=0$, 考虑如下确定的椭圆障碍问题:

$$\begin{cases}-\Delta z(x)=\eta(x), & x\in D\,;\\ z(x)\geqslant -v(x), & x\in D\,;\\ z|_{\partial D}=0\,.\end{cases} \tag{4.1}$$

方程 (4.1) 解的严格定义如下 (见 [3, 定义3.1]).

定义 4.1 (z,η) 被称为方程 (4.1) 的解, 如果

(i) z 是 D 上的连续函数, 满足 $z(x)\geqslant -v(x)$, $z|_{\partial D}=0$;

(ii) $\eta(\mathrm{d}x)$ 是一个 D 上的测度, 使得对所有紧子集 $K \subset D$, 有 $\eta(K) < \infty$;

(iii) 对所有 $\phi \in C_0^\infty([0,1])$, 有

$$-(z, \Delta\phi) = \int_D \phi(x)\eta(\mathrm{d}x);$$

(iv) $\int_D (z(x)+v(x))\eta(\mathrm{d}x) = 0$.

方程 (4.1) 解的存在唯一性证明可参见文 [1, 定理2.2] 和文 [3, 定理3.1], 其中后者利用惩罚方法证明了带上下障碍的更一般情形.

接下来的引理来自文 [1, 引理3.1].

引理 4.1　若 z_1 和 z_2 分别是方程 (4.1) 中障碍函数取 v_1 和 v_2 时对应的解, 那么

$$\|z_1 - z_2\|_\infty \leqslant \|v_1 - v_2\|_\infty.$$

现在开始介绍确定的障碍问题 (4.1) 的离散格式. 选择 D_n 中所有网格点组成的点列 $x = (x_1, \cdots, x_{(n-1)^d})$ 并按照自然顺序排列. 对于 $n \in \mathbb{N}^*$, 定义

$$V^n := (V_i^n)_{1\leqslant i\leqslant (n-1)^d} = (v(x_i))_{1\leqslant i\leqslant (n-1)^d}.$$

考虑下面 $\mathbb{R}^{(n-1)^d}$ 中带约束的线性方程组:

$$\begin{cases} -n^2 A^n Z^n = \overline{\eta}^n, \\ Z^n \geqslant -V^n, \\ \langle Z^n + V^n, \overline{\eta}^n\rangle = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

其中 $\overline{\eta}^n|_{\partial D_n} = 0$, A^n 由方程 (3.3) 引入. 我们有如下结论.

定理 4.1　方程 (4.2) 有唯一解 $(Z^n, \overline{\eta}^n)$.

证　记 $B = (b_1, \cdots, b_{(n-1)^d})' := -n^2 A^n$. 由 B 是可逆阵, 我们有 $Z^n = B^{-1}\overline{\eta}^n$. 此外由方程的约束条件, 我们有 $Z^n \geqslant -V^n$, 即 $Z_1^n \geqslant -V_1^n$, $Z_2^n \geqslant -V_2^n, \cdots, Z_{(n-1)^d}^n \geqslant -V_{(n-1)^d}^n$; 还有 $\langle Z^n + V^n, \overline{\eta}^n\rangle = \sum_{k=1}^{(n-1)^d} (Z_k^n + V_k^n)\overline{\eta}_k^n = 0$, 其中 $\overline{\eta}_k^n \geqslant 0$. 则当 $b_i v^n \leqslant 0$ 时, 有 $\overline{\eta}_i^n = -b_i v^n$; 当 $b_i v^n > 0$ 时, 有 $\overline{\eta}_i^n = 0$. 因此, 对于给定的 V^n, 定理证毕.

引理 4.2　若 (Z^{n_i}, η^{n_i}), $i = 1, 2$ 分别是方程 (4.2) 中约束取 V^{n_i} 时对应的解, 那么

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d} |Z_k^{n_1} - Z_k^{n_2}| \leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d} |V_k^{n_1} - V_k^{n_2}|.$$

为了证明引理 4.2, 我们需要下面的结论 (见 [13, 引理3.1]).

引理 4.3　若 A^n 由 (3.3) 引入, 则 A^n 是负定阵, 且对所有 $b \in \mathbb{R}^{(n-1)^d}$, 满足 $\langle b^+, A^n b\rangle \leqslant 0$.

引理 4.2 的证明　记 $m := \sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d} |V_k^{n_1} - V_k^{n_2}|$, $M := (m, \cdots, m) \in \mathbb{R}^{(n-1)^d}$. 当 $(Z^{n_i}, \overline{\eta}^{n_i})$ 是方程 (4.2) 的唯一解时, 不难得到

$$-n^2 A^n (Z^{n_1} - Z^{n_2} - M) - n^2 A^n M = \overline{\eta}^{n_1} - \overline{\eta}^{n_2}.$$

对上式两边作用上 $(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M)^+$, 得到

$$\begin{aligned}&\langle -n^2A^n(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M),(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M)^+\rangle\\=&\langle n^2A^nM,(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M)^+\rangle+\langle\overline{\eta}^{n_1},(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M)^+\rangle\\&-\langle\overline{\eta}^{n_2},(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M)^+\rangle.\end{aligned}$$

下面分别对上式等号右边的 3 项进行估计: 首先由定义, A^n 是一个主对角占优的矩阵. 特别地, 当 $d=1$ 时, $A^{n,1}M=(-m,0,\cdots,0,-m)$, 那么

$$\begin{aligned}&\langle n^2A^{n,1}M,(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M)^+\rangle\\=&-n^2m(Z_1^{n_1}-Z_1^{n_2}-m)^+-n^2m(Z_{n-1}^{n_1}-Z_{n-1}^{n_2}-m)^+\leqslant 0;\end{aligned}$$

当 $d=2,3$ 时, 简记 $A^n=A^{n,d}$, 同样有

$$\langle n^2A^nM,(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M)^+\rangle\leqslant 0.$$

其次, 由 m 的定义, 有如下的包含关系

$$\{k;Z_k^{n_1}-Z_k^{n_2}>m\}\subset\{k;Z_k^{n_1}>-V_k^{n_2}+m\}\subset\{k;Z_k^{n_1}>-V_k^{n_1}\}.$$

由此得到

$$\langle\overline{\eta}^{n_1},(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M)^+\rangle\leqslant\sum_{k=1}^{(n-1)^d}(Z_k^{n_1}-Z_k^{n_2}-m)^+1_{\{Z_k^{n_1}>-V_k^{n_1}\}}\overline{\eta}_k^{n_1}=0.$$

此外, 显然有 $\langle\overline{\eta}^{n_2},(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M)^+\rangle\geqslant 0$. 因此

$$\langle -n^2A^n(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M),(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M)^+\rangle\leqslant 0.$$

又由引理 4.3, 我们得出

$$|(Z^{n_1}-Z^{n_2}-M)^+|^2=0,$$

这意味着 $Z^{n_1}-Z^{n_2}\leqslant M$. 引理证毕.

下面通过对离散格式进行线性插值得到原解的近似解. 首先选取 D_n 中所有网格点组成的序列并按照自然顺序排列得到 $y=(y_1,\cdots,y_{(n-1)^d})$. 对于 $n\in\mathbb{N}^*$, 定义连续函数 z^n, 使得在网格点上取值 $z^n(y_k)=Z_k^n,\ 1\leqslant k\leqslant(n-1)^d$; 之后对每个分量 $x_1,\cdots,x_d$ 依次做线性插值, 得到区域内连续的近似解. 事实上, 当 $d=3$ 时, 对于某个点 $(x_1,x_2,x_3)\in\big[\frac{k_1}{n},\frac{k_1+1}{n}\big)\times\big[\frac{k_2}{n},\frac{k_2+1}{n}\big)\times\big[\frac{k_3}{n},\frac{k_3+1}{n}\big)$, 我们可以按照如下方法定义其上的函数值:

$$\begin{aligned}&z^n\Big(x_1,\frac{k_2}{n},\frac{k_3}{n}\Big)=z^n\Big(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n},\frac{k_3}{n}\Big)+n\Big(x_1-\frac{k_1}{n}\Big)\Big(z^n\Big(\frac{k_1+1}{n},\frac{k_2}{n},\frac{k_3}{n}\Big)-z^n\Big(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n},\frac{k_3}{n}\Big)\Big),\\&z^n\Big(x_1,x_2,\frac{k_3}{n}\Big)=z^n\Big(x_1,\frac{k_2}{n},\frac{k_3}{n}\Big)+n\Big(x_2-\frac{k_2}{n}\Big)\Big(z^n\Big(x_1,\frac{k_2+1}{n},\frac{k_3}{n}\Big)-z^n\Big(x_1,\frac{k_2}{n},\frac{k_3}{n}\Big)\Big),\\&z^n(x_1,x_2,x_3)=z^n\Big(x_1,x_2,\frac{k_3}{n}\Big)+n\Big(x_3-\frac{k_3}{n}\Big)\Big(z^n(x_1,x_2,\frac{k_3+1}{n})-z^n\Big(x_1,x_2,\frac{k_3}{n}\Big)\Big).\end{aligned}$$

类似地, 通过选取 $\eta^n(y_k)=\overline{\eta}_k^n,1\leqslant k\leqslant(n-1)^d$, 并利用网格点 D_n 上的 η^n 的函数值线性插值, 可以定义连续的近似解 $\eta^n(x),\ x\in D$.

定理 4.2　令 z 是 (4.1) 的解, 近似解 z^n 由上述线性插值得到, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|z^n(x)-z(x)|=0.$$

证　我们将证明分成两部分.

(I) 假设 $v\in C^2(D)$, 我们有

$$Z^n=B^{-1}\overline{\eta}^n.$$

利用 (3.5) 中定义的 K^n, 易得

$$z^n(x)=\int_D K^n(x,y)\eta^n(\underline{k}_n(y))\mathrm{d}y.$$

接着计算 η^n 的 L^2-估计. 对于 $k=1,\cdots,(n-1)^d$, 要么 $\overline{\eta}_k^n=0$, 要么当 $\overline{\eta}_k^n>0$ 时, $Z_k^n=-V_k^n$. 利用 $V^n|_{\partial D_n}=0$, 有

$$\begin{aligned}|\eta^n(x)|&\leqslant\sum_{j=1}^d n^2\Big|v\Big(x+\frac{1}{n}e_j\Big)-2v(x)+v\Big(x-\frac{1}{n}e_j\Big)\Big|\\&=\sum_{j=1}^d n^2\Big|\int_{x_j}^{x_j+\frac{1}{n}}\mathrm{d}y\int_{x_j}^{y}\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z_j^2}\mathrm{d}z_j+\int_{x_j-\frac{1}{n}}^{x_j}\mathrm{d}y\int_{y}^{x_j}\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z_j^2}\mathrm{d}z_j\Big|\\&\leqslant 2d\|v\|_2,\quad x\in D_n.\end{aligned}\tag{4.3}$$

因此, 由 (4.3), 有

$$\int_D|\eta^n(\underline{k}_n(y))|^2\mathrm{d}y\leqslant\sup_{x\in D_n}|\eta^n(x)|\leqslant 2d\|v\|_2.\tag{4.4}$$

根据 (3.9) 和 (4.4), 利用 Hölder 不等式, 我们得出存在一个仅依赖于 $(\|v\|_2,d,B)$ 的常数 C_2, 使得对 $\forall\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}|z^n(x)-z^n(z)|^2&\leqslant\Big|\int_D(K^n(x,y)-K^n(z,y))\eta^n(\underline{k}^n(y))\mathrm{d}y\Big|^2\\&\leqslant\Big(\int_D|K^n(x,y)-K^n(z,y)|^2\mathrm{d}y\Big)\Big(\int_D|\eta^n(\underline{k}_n(y))|^2\mathrm{d}y\Big)\\&\leqslant C_2|x-z|^{4\gamma(d,\varepsilon)},\quad x,z\in D.\end{aligned}\tag{4.5}$$

由 Arzela-Ascoli 定理, 我们知道 $\{z^n(x),n\geqslant 1\}$ 是相对紧的. 另一方面, $\{\eta^n(\underline{k}_n(\cdot)),n\geqslant 1\}$ 在弱拓扑意义下在 $L^2(D)$ 中相对紧. 不妨设当选择一列子列时, $z^n(\cdot)$ 在 $C(D)$ 中一致收敛到 $z(\cdot)$, 且 $\eta^n(\underline{k}_n(\cdot))$ 在 $L^2(D)$ 弱收敛到 $\eta(\cdot)$. 最后为了完成 (I) 的证明, 还需要证明 (z,η) 是方程组 (4.1) 的解.

选取 D_n 中所有网格点组成的序列, 并按照自然顺序排列得到 $x=(x_1,\cdots,x_{(n-1)^d})$. 对于 $\phi\in C_0^\infty(D)$, 记 $\phi^n:=(\phi(x_1),\cdots,\phi(x_{(n-1)^d}))$. 由 A^n 的对称性, 有

$$-\langle n^2A^n\phi^n,Z^n\rangle=\langle\phi^n,\overline{\eta}^n\rangle.$$

在上式两边乘上 n^{-d}, 可以得到

$$-\int_D\Delta_n\phi(\underline{k}_n(y))z^n(\underline{k}_n(y))\mathrm{d}y=\int_D\phi(\underline{k}_n(y))\eta^n(\underline{k}_n(y))\mathrm{d}y.$$

令 $n\to\infty$, 由 $\phi(k_n(y))$ 的强收敛性, 有

$$-\int_D \Delta\phi(y)z(y)\mathrm{d}y=\int_D \phi(y)\eta(y)\mathrm{d}y.$$

另一方面, 由线性方程 (4.2), 可知

$$\int_0^1 (z^n(k_n(y))+v(k_n(y)))\eta^n(k_n(y))\mathrm{d}y=0. \tag{4.6}$$

利用 (4.5) 和控制收敛定理, 存在不依赖于 n 的常数 N, 使得

$$\begin{aligned}
&\int_D (z^n(\underline{k}_n(y))+v(\underline{k}_n(y))-z(y)-v(y))^2\mathrm{d}y\\
&\leqslant N\int_D (z^n(\underline{k}_n(y))-z^n(y))^2+(z^n(y)-z(y))^2+(v(\underline{k}_n(y))-v(y))^2\mathrm{d}y\\
&\leqslant N\Big(\frac{1}{n}\Big)^{4\gamma(d,\varepsilon)}+N\int_D (z^n(y)-z(y))^2\mathrm{d}y+N\int_D (v(\underline{k}_n(y))-v(y))^2\mathrm{d}y\\
&\to 0,\quad n\to\infty.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

再令 (4.6) 中的 $n\to\infty$, 由 η^n 的弱收敛和估计式 (4.7), 可以得到

$$\int_D (z(y)+v(y))\eta(y)\mathrm{d}y=0.$$

因此, (z,η) 是 (4.1) 的解.

(II) 对于一般情形 $v\in C(D)$, 选取序列 $v^m\in C^2(D), m\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $m\to\infty$ 时, 有 $\sup\limits_{x\in D}|v^m(x)-v(x)|\to 0$. 选取 D_n 所有网格点组成的序列, 并按照自然顺序排列得到 $x=(x_1,\cdots,x_{(n-1)^d})$. 对于 $n\in\mathbb{N}^*$, 定义

$$V^{m,n}:=(v^m(x_i))_{1\leqslant i\leqslant (n-1)^d}.$$

在 $\mathbb{R}^{(n-1)^d}$ 中带约束的线性方程组:

$$\begin{cases}-n^2A^nZ^{m,n}=\overline{\eta}^{m,n};\\ Z^{m,n}\geqslant -V^{m,n};\\ \langle Z^{m,n}+V^{m,n},\overline{\eta}^{m,n}\rangle=0\end{cases}$$

有唯一解 $(Z^{m,n},\eta^{m,n})$.

模仿连续近似解 z^n 的构造方法, 我们可以引入连续近似解 $z^{m,n}$: 通过在网格点 D_n 取 $z^{m,n}(x_k)=Z_k^{m,n}$, $1\leqslant k\leqslant (n-1)^d$, 再利用线性插值从网格点 D_n 上 $z^{m,n}$ 的函数值得到 D 上的连续近似解 $z^{m,n}$. 根据第一步中证明的结果, 对于 $m\in\mathbb{N}^*$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|z^{m,n}(x)-z^{(m)}(x)|=0, \tag{4.8}$$

其中 $z^{(m)}(x)$ 是下面椭圆障碍问题

$$\begin{cases}-\Delta z^{(m)}(x)=\eta^{(m)}(x),\quad x\in D;\\ z^{(m)}(x)\geqslant -v^m(x),\quad x\in D;\\ z^{(m)}|_{\partial D}=0\end{cases} \tag{4.9}$$

的解.

由 $z^{m,n}$ 和 z^n 的定义, 在点 $x \in D$ 上函数 $z^{m,n}$ 和 z^n 的差值可以被邻近的最多 2^d 个网格点上的函数差值决定. 比如, 当 $d=1$, $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ 时, 有

$$\begin{aligned}|z^{m,n}(x) - z^n(x)| &= \left|(Z_k^{m,n} - Z_k^n) + \Big(x - \frac{k}{n}\Big)\frac{(Z_{k+1}^{m,n} - Z_{k+1}^n) - (Z_k^{m,n} - Z_k^n)}{\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}}\right| \\ &\leqslant |(Z_k^{m,n} - Z_k^n) \vee (Z_{k+1}^{m,n} - Z_{k+1}^n)|.\end{aligned}$$

因此

$$\sup_{x\in D} |z^{m,n}(x) - z^n(x)| = \sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d} |Z_k^{m,n} - Z_k^n|. \tag{4.10}$$

那么, 由引理 4.2, 有

$$\begin{aligned}\sup_{x\in D} |z^{m,n}(x) - z^n(x)| &= \sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d} |Z_k^{m,n} - Z_k^n| \leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d} |V_k^{m,n} - V_k^n| \\ &= \sup_{x\in D_n} |v^m(x) - v(x)| \leqslant \sup_{x\in D} |v^m(x) - v(x)|.\end{aligned} \tag{4.11}$$

由引理 4.1 和估计式 (4.11), 得到

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in D} |z^n(x) - z(x)| \\ \leqslant\ & \sup_{x\in D} |z^n(x) - z^{(m)}(x)| + \sup_{x\in D} |z^{(m)}(x) - z(x)| \\ \leqslant\ & \sup_{x\in D} |z^n(x) - z^{m,n}(x)| + \sup_{x\in D} |z^{m,n}(x) - z^{(m)}(x)| + \sup_{x\in D} |v^m(x) - v(x)| \\ \leqslant\ & 2\sup_{x\in D} |v^m(x) - v(x)| + \sup_{x\in D} |z^{m,n}(x) - z^{(m)}(x)|.\end{aligned} \tag{4.12}$$

对于 $\varepsilon > 0$, 可以选取 m 充分大, 使得

$$\sup_{x\in D} |v^m(x) - v(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.13}$$

对于固定的 m, 由 (4.8) 推出, 存在一个整数 N, 使得对任意 $n \geqslant N$,

$$\sup_{x\in D} |z^{m,n}(x) - z^{(m)}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.14}$$

结合 (4.12)–(4.14), 我们得到对 $n \geqslant N$, 有

$$\sup_{x\in D} |z^n(x) - z(x)| \leqslant \varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 定理证毕.

5　离散格式的收敛性证明

在证明引理 3.2 前, 介绍一个随机积分的矩估计. 下面的引理可以利用 Kolmogrov 引理和 BDG 不等式证明得到 (见 [3], 第 159–160 页).

引理 5.1　记 ψ 是 D 上的连续随机场, 定义连续函数 $\widehat{G}(x,y)$, 满足对任意的 $x, x' \in D$,

$$\|\widehat{G}(x,y) - \widehat{G}(x',y)\|_{L^2(D)}^2 \leqslant B|x - x'|^{4\gamma(d,\varepsilon)},$$

$$\widehat{C}_D := \sup_{x\in D}\int_D |\widehat{G}(x,y)|^2 \mathrm{d}y < \infty,$$

其中 $\gamma(d,\varepsilon)$ 由 (3.10) 定义. 记

$$I(x) := \int_D \widehat{G}(x,y)\psi(y)\mathrm{d}W(y),$$

那么对任意的 $p > \frac{d}{2\gamma(d,\varepsilon)}$,

$$E\Big[\sup_{x\in D}|I(x)|^p\Big] \leqslant 2^{p-1}c_p(aB^{\frac{p}{2}} + \widehat{C}_D^{\frac{p}{2}})E[\|\psi\|_\infty^p]$$

成立, 其中 a 是 Kolmogorov 不等式中出现的常数, c_p 是 BDG 不等式中出现的仅依赖于 p 的常数.

引理 3.2 的证明 考虑如下迭代方法: 对于给定 $n\in\mathbb{N}^*$, 记 $\mathbf{u}^{n,0}=0$,

$$\begin{cases} -n^2A^nV^{n,1} = f^n(0) + n^d\sigma^n(0)\Delta W^n, \\ -n^2A^nZ^{n,1} = \overline{\eta}^{n,1}, \\ Z^{n,1} \geqslant -V^{n,1}, \\ \langle Z^{n,1}+V^{n,1}, \overline{\eta}^{n,1}\rangle = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

因为 $-n^2A^n$ 可逆, 随机线性方程有唯一的解 $V^{n,1}$; 又由确定的障碍问题的结论 (见定理 4.1), 我们知道对几乎所有的 ω, $(Z^{n,1},\overline{\eta}^{n,1})$ 存在且唯一. 因此 $(\mathbf{u}^{n,1} := Z^{n,1}+V^{n,1}, \overline{\eta}^{n,1})$ 是 (5.1) 的唯一解.

接着进行迭代. 假设对于 $m\geqslant 2$, 已经定义了 $\mathbf{u}^{n,m-1}$, 且 $\mathbf{u}^{n,m} := Z^{n,m}+V^{n,m}$ 满足下列方程:

$$\begin{cases} -n^2A^nV^{n,m} = f^n(\mathbf{u}^{n,m-1}) + n^d\sigma^n(\mathbf{u}^{n,m-1})\Delta W^n, \\ -n^2A^nZ^{n,m} = \overline{\eta}^{n,m}, \\ Z^{n,m} \geqslant -V^{n,m}, \\ \langle Z^{n,m}+V^{n,m}, \overline{\eta}^{n,m}\rangle = 0, \end{cases}$$

那么 $(\mathbf{u}^{n,m} := Z^{n,m}+V^{n,m}, \overline{\eta}^{n,m})$ 存在且唯一.

由引理 4.2, 有

$$\begin{aligned} \sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|\mathbf{u}_k^{n,m}-\mathbf{u}_k^{n,m-1}| &\leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|(V_k^{n,m}-V_k^{n,m-1}) + (Z_k^{n,m}-Z_k^{n,m-1})| \\ &\leqslant 2\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|(V_k^{n,m}-V_k^{n,m-1})|. \end{aligned}$$

也就是说

$$E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|\mathbf{u}_k^{n,m}-\mathbf{u}_k^{n,m-1}|^p\Big] \leqslant 2^pE\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|V_k^{n,m}-V_k^{n,m-1}|^p\Big].$$

选取包含 D_n 中所有网格点且按照自然顺序排列的序列 $x=(x_1,\cdots,x_{(n-1)^d})$. 定义一个离散的随机场 $u^{n,r}(y),\ r\geqslant 0,\ y\in D_n$, 使得 $u^{n,r}(x_i)=\mathbf{u}_i^{n,r},\ 1\leqslant i\leqslant (n-1)^d$. 定义一个离散的随机场 $v^{n,r}(y),\ r\geqslant 0,\ y\in D_n$, 使得 $v^{n,r}(x_i)=V_i^{n,r},\ 1\leqslant i\leqslant (n-1)^d$. 对于 $x\in D_n$,

$$v^{n,m}(x) = \int_D K_n(x,y)f(\underline{k}_n(y), u^{n,m-1}(\underline{k}_n(y)))\mathrm{d}y$$

$$+\int_D K_n(x,y)\sigma(\underline{k}_n(y),u^{n,m-1}(\underline{k}_n(y)))\mathrm{d}W(y).$$

记

$$I(k):=V_k^{n,m}-V_k^{n,m-1}=v^{n,m}(x_k)-v^{n,m-1}(x_k),\quad 1\leqslant k\leqslant (n-1)^d,$$
$$I_1(x_k):=\int_D K_n(x_k,y)[f(\underline{k}_n(y),u^{n,m-1}(\underline{k}_n(y)))-f(\underline{k}_n(y),u^{n,m-2}(\underline{k}_n(y)))]\mathrm{d}y,$$
$$I_2(x_k):=\int_D K_n(x_k,y)[\sigma(\underline{k}_n(y),u^{n,m-1}(\underline{k}_n(y)))-\sigma(\underline{k}_n(y),u^{n,m-2}(\underline{k}_n(y)))]\mathrm{d}W(y),$$

那么

$$I(k)=I_1(x_k)+I_2(x_k).$$

经过简单计算, 由假设 1, 有

$$E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|I_1(x_k)|^p\Big]\leqslant L_1^pC_D^{\frac{p}{2}}E\Big[\sup_{y\in D}|(u^{n,m-1}-u^{n,m-2})(\underline{k}_n(y))|^p\Big].\tag{5.2}$$

由引理 5.1、估计式 (3.9) 和假设 1, 可以得到

$$\begin{aligned}&E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|I_2(x_k)|^p\Big]\\&\leqslant 2^{p-1}c_pL_1^p(aB^{\frac{p}{2}}+C_D^{\frac{p}{2}})E\Big[\sup_{y\in D}|(u^{n,m-1}-u^{n,m-2})(\underline{k}_n(y))|^p\Big].\end{aligned}\tag{5.3}$$

进一步, 由估计式 (5.2) 和 (5.3), 有

$$\begin{aligned}&E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|I(k)|^p\Big]\\&\leqslant 2^{p-1}E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|I_1(x_k)|^p\Big]+2^{p-1}E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|I_2(x_k)|^p\Big]\\&\leqslant [2^{p-1}L_1^pC_D^{\frac{p}{2}}+2^{2p-2}c_pL_1^p(aB^{\frac{p}{2}}+C_D^{\frac{p}{2}})]\cdot E\Big[\sup_{y\in D}|(u^{n,m-1}-u^{n,m-2})(\underline{k}_n(y))|^p\Big].\end{aligned}$$

所以, 令 $\widetilde{C}:=2^{2p-1}L_1^pC_D^{\frac{p}{2}}+2^{3p-2}c_pL_1^p(aB^{\frac{p}{2}}+C_D^{\frac{p}{2}})$, 有

$$\begin{aligned}E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|\mathbf{u}_k^{n,m}-\mathbf{u}_k^{n,m-1}|^p\Big]&\leqslant \widetilde{C}E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|\mathbf{u}_k^{n,m-1}-\mathbf{u}_k^{n,m-2}|^p\Big]\\&\leqslant\cdots\leqslant \widetilde{C}^{m-1}E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|\mathbf{u}_k^{n,1}-\mathbf{u}_k^{n,0}|^p\Big].\end{aligned}$$

由条件 (3.12), 存在 p, 使得 $\widetilde{C}<1$, 则存在一个 $\mathbf{u}^n$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|\mathbf{u}_k^{n,m}-\mathbf{u}_k^{n}|^p\Big]=0.$$

类似地, 可以证明 V^n 的存在性,

$$\lim_{m\to\infty}E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|V_k^{n,m}-V_k^{n}|^p\Big]=0.$$

因此由引理 4.2, 我们得到存在一个随机向量 Z^n, 使得

$$\lim_{m\to\infty}E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant (n-1)^d}|Z_k^{n,m}-Z_k^{n}|^p\Big]=0.$$

又因为 $\overline{\eta}^{n,m}$ 是一个 $(n-1)^d$-维向量, 当 $m\to\infty$, 由于 $Z^{n,m}\to Z^n$, 我们有 $\overline{\eta}^{n,m}\to\overline{\eta}^n$. 此外, 还有 $\langle Z^n+V^n,\overline{\eta}^n\rangle=0$. 记 $\mathbf{u}^n=Z^n+V^n$, 那么 $(\mathbf{u}^n,\overline{\eta}^n)$ 是 (3.3) 的解, 存在性得证.

现在继续研究唯一性. 假设 $(\mathbf{u}_1^n,\overline{\eta}_1^n)$ 和 $(\mathbf{u}_2^n,\overline{\eta}_2^n)$ 是方程 (3.3) 的两个解. 从上面计算中知道

$$\begin{aligned}E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant(n-1)^d}|\mathbf{u}_{1,k}^n-\mathbf{u}_{2,k}^n|^p\Big]&\leqslant 2^pE\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant(n-1)^d}|V_{1,k}^n-V_{2,k}^n|^p\Big]\\&\leqslant\widetilde{C}E\Big[\sup_{1\leqslant k\leqslant(n-1)^d}|\mathbf{u}_{1,k}^n-\mathbf{u}_{2,k}^n|^p\Big].\end{aligned}$$

因为存在某个 p, 使得 $\widetilde{C}<1$, 那么 $\mathbf{u}_1^n=\mathbf{u}_2^n$, a.s..

另一方面, 选取 D_n 中所有网格点并按照自然顺序排列, 得到序列 $x=(x_1,\cdots,x_{(n-1)^d})$. 对于 $\phi^n\in C^\infty$, 有

$$\sum_{k=1}^{(n-1)^d}\phi^n(x_k)((\overline{\eta}_1^n)_k-(\overline{\eta}_2^n)_k)=0,$$

这意味着 $\overline{\eta}_1^n=\overline{\eta}_2^n$, a.s., 引理得证.

令 V^n 是下列随机方程

$$-n^2A^nV^n=f^n(\mathbf{u}^n)+n^d\sigma^n(\mathbf{u}^n)\Delta W^n \tag{5.4}$$

的解, 并且 $(\mathbf{u}^n,\overline{\eta}^n)$ 满足方程 (3.3), 那么 $(Z^n:=\mathbf{u}^n-V^n,\overline{\eta}^n)$ 是下面方程

$$\begin{cases}-n^2A^nZ^n=\overline{\eta}^n;\\Z^n\geqslant -V^n;\\\langle Z^n+V^n,\overline{\eta}^n\rangle=0\end{cases} \tag{5.5}$$

的解.

回忆 (3.13) 中关于连续随机场 $\widetilde{u}^n(x)$ 的定义, 选取 D_n 上所有网格点按照自然顺序排序后得到的序列 $z=(z_1,\cdots,z_{(n-1)^d})$. 按照如下方式定义连续随机场 $\eta^n(x)$(或 $v^n(x)$): 当点落在网格上时, 对于 $1\leqslant k\leqslant(n-1)^d$, 定义 $\eta^n(z_k)=\overline{\eta}_k^n$(或 $v^n(z_k)=V_k^n$), 对于网格之外的点 $x\in D\backslash D_n$, 由网格 D_n 上 η^n(或 v^n) 的取值利用线性插值可以得到, 其中边界处假定 $\eta^n|_{\partial D}=0$(或 $v^n|_{\partial D}=0$). 令核 $K^n(x,y)$ 由表达式 (3.5) 定义, 容易验证 v^n 满足:

$$\begin{aligned}v^n(x)=&\int_DK^n(x,y)f(\underline{k}_n(y),u^n(\underline{k}_n(y)))\mathrm{d}y\\&+\int_DK^n(x,y)\sigma(\underline{k}_n(y),u^n(\underline{k}_n(y)))W(\mathrm{d}y).\end{aligned} \tag{5.6}$$

定理 3.1 的证明 由文 [15, 引理 2.3] 知道, (2.1) 还可以等价地表示成如下积分形式. 由 Green 函数 K 的定义, 有

$$u(x)=\int_DK(x,y)f(y,u(y))\mathrm{d}y+\int_DK(x,y)\sigma(y,u(y))W(\mathrm{d}y)+\int_DK(x,y)\eta(\mathrm{d}y).$$

记上式右端前两项为

$$\overline{v}(x):=\int_DK(x,y)f(y,u(y))\mathrm{d}y+\int_DK(x,y)\sigma(y,u(y))W(\mathrm{d}y).$$

记 $\overline{z} := u - \overline{v}$, 则随机椭圆障碍问题

$$\begin{cases} -\Delta\overline{z}(x) = \eta(x), \\ \overline{z}(x) \geqslant -\overline{v}(x), \quad x \in D, \\ \int_D (\overline{z}(x) + \overline{v}(x))\eta(\mathrm{d}x) = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

有唯一解 $(\overline{z}(x), \eta(x))$. 选取 D_n 中所有网格点, 并按照自然顺序排列得到序列 $y = (y_1, \cdots, y_{(n-1)^d})$. 对于 $n \in \mathbb{N}^*$, 定义

$$\overline{V}^n := (\overline{V}_i^n)_{1\leqslant i\leqslant (n-1)^d} = (\overline{v}(y_i))_{1\leqslant i\leqslant (n-1)^d}.$$

进一步考虑 $\mathbb{R}^{(n-1)^d}$ 中带约束的随机线性方程组:

$$\begin{cases} -n^2 A^n \overline{Z}^n = \overline{\eta}^n, \\ \overline{Z}^n \geqslant -\overline{V}^n, \\ \langle \overline{Z}^n + \overline{V}^n, \overline{\eta}^n \rangle = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

引入连续随机场 $\overline{z}^n(x)$: 先在网格上取值 $\overline{z}^n(y_k) = \overline{Z}_k^n$, $1 \leqslant k \leqslant (n-1)^d$, 在边界上取值 $\overline{z}^n|_{\partial D_n} = 0$, 再利用线性插值得到剩下点的函数值. 由定理 4.2, 有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |\overline{z}^n(x) - \overline{z}(x)| = 0, \quad \text{a.s.}. \tag{5.9}$$

引入连续随机场 $\overline{v}^n(x)$: 先在网格上取值 $\overline{v}^n(y_k) = \overline{V}_k^n$, $1 \leqslant k \leqslant (n-1)^d$, 在边界上取值 $\overline{v}^n|_{\partial D_n} = 0$, 再利用线性插值得到剩下点的函数值. 由定义 (3.7), 有

$$\overline{v}^n(x) = \int_D K'(x,y) f(y, u(y))\mathrm{d}y + \int_D K'(x,y)\sigma(y,u(y))W(\mathrm{d}y), \quad x \in D.$$

由文 [3, 定理4.1] 知道, $E(\|u\|_\infty^p) < \infty$; 由文 [5, 引理3.2] 知道, $|\varphi_\alpha^n(x) - \varphi_\alpha(x)| \leqslant \frac{2^d|\alpha|}{n}$, 那么存在 $p \geqslant 1$, 有

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[\sup_{x\in D} |\overline{v}^n(x) - \overline{v}(x)|^p\Big] = 0. \tag{5.10}$$

事实上, 由文 [16, 定理2.2] 知道, 要证明 (5.10), 只需要证明以下两个小论断: 存在 $p \geqslant 1$ 和常数 C_3, 使得对任意的 $x, y \in D$, 有

(i) $E[|\overline{v}^n(x) - \overline{v}^n(y)|^p + |\overline{v}(x) - \overline{v}(y)|^p] \leqslant C_3 |x-y|^{2p\gamma(d,\varepsilon)}$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} E[|\overline{v}^n(x) - \overline{v}(x)|^p] = 0$.

由估计式 (3.9), 假设 1 和 2, 对于任意的 $x, z \in D$, 有

$$\begin{aligned} & E[|\overline{v}(x) - \overline{v}(z)|^p] \\ & \leqslant 2^{p-1}(1+c_p)C(L_1,L_2)E[(1+\|u\|_\infty^2)^{\frac{p}{2}}]\Big(\int_D |K(x,y) - K(z,y)|^2\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{2}} \\ & \leqslant 2^{p-1}(1+c_p)C(L_1,L_2)E[(1+\|u\|_\infty^2)^{\frac{p}{2}}]B^{\frac{p}{2}}|x-z|^{2p\gamma(d,\varepsilon)}. \end{aligned}$$

将上述估计式中 $\overline{v}$ 换成 $\overline{v}^n$, 结论仍成立. 论断 (i) 证毕.

又由文 [5, 引理3.2], 可知

$$\sup_{x\in D} \int_D (K'(x,y) - K(x,y))^2 \mathrm{d}y \leqslant C(d)\Big(\frac{1}{n}\Big)^{4\gamma(d,\varepsilon)}. \tag{5.11}$$

因此, 有

$$\begin{aligned}&E[|\overline{v}^n(x)-\overline{v}(x)|^p]\\ \leqslant{}& C_pE\Big[\Big(\int_D|K'(x,y)-K(x,y)|^2f^2(y,u(y))\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\ &+c_pE\Big[\Big(\int_D|K'(x,y)-K(x,y)|^2\sigma^2(y,u(y))\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\ \leqslant{}& C(p,L_1,L_2)\Big(\frac{1}{n}\Big)^{2p\gamma(d,\varepsilon)}[1+E(\|u\|_\infty^p)].\end{aligned}$$

再令上式中 $n\to\infty$, 论断 (ii) 证毕.

记 $\overline{u}^n(x):=\overline{v}^n(x)+\overline{z}^n(x)$. 因为 $u(x)=\overline{v}(x)+\overline{z}(x)$, 利用 (5.9) 和 (5.10), 有

$$\lim_{n\to\infty}E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{u}^n(x)-u(x)|^p\Big]=0. \tag{5.12}$$

因此, 为了证明定理, 还需要证明

$$\lim_{n\to\infty}E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{u}^n(x)-\widetilde{u}^n(x)|^p\Big]=0. \tag{5.13}$$

对于方程 (5.5) 和 (5.8), 利用引理 4.2, 有

$$\begin{aligned}\sup_{x\in D}|\overline{u}^n(x)-\widetilde{u}^n(x)|&=\sup_{0\leqslant k\leqslant(n-1)^d}|\overline{V}_k^n-V_k^n+\overline{Z}_k^n-Z_k^n|\\ &\leqslant 2\sup_{0\leqslant k\leqslant(n-1)^d}|\overline{V}_k^n-V_k^n|\leqslant 2\sup_{x\in D}|\overline{v}^n(x)-v^n(x)|.\end{aligned}\tag{5.14}$$

为了计算方便, 引入新的随机场:

$$\begin{aligned}\widehat{v}^n(x):={}&\int_D K^n(x,y)f(\underline{k}_n(y),\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))\mathrm{d}y\\ &+\int_D K^n(x,y)\sigma(\underline{k}_n(y),\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))W(\mathrm{d}y).\end{aligned}\tag{5.15}$$

下文在不产生混淆时, 简记 $f(u(x)):=f(x,u(x))$, 那么由 $\widehat{v}^n$ 的定义 (5.15), 要计算 $\overline{v}^n-v^n$, 相当于计算 $\overline{v}^n-\widehat{v}^n$ 和 $\widehat{v}^n-v^n$. 首先, 由 v^n 的表达式 (5.6), 有

$$\begin{aligned}\widehat{v}^n(x)-v^n(x)={}&\int_D K^n(x,y)[f(\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))-f(u^n(\underline{k}_n(y)))]\mathrm{d}y\\ &+\int_D K^n(x,y)[\sigma(\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))-\sigma(u^n(\underline{k}_n(y)))]W(\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

由估计式 (3.8) 和引理 5.1, 容易得到

$$\begin{aligned}&E\Big[\sup_{x\in D}|\widehat{v}^n(x)-v^n(x)|^p\Big]\\ \leqslant{}&2^{p-1}E\Big[\sup_{x\in D}\Big|\int_D K^n(x,y)(f(\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))-f(u^n(\underline{k}_n(y))))\mathrm{d}y\Big|^p\Big]\\ &+2^{p-1}E\Big[\sup_{x\in D}\Big|\int_D K^n(x,y)(\sigma(\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))-\sigma(u^n(\underline{k}_n(y))))W(\mathrm{d}y)\Big|^p\Big]\\ \leqslant{}&[2^{p-1}L_1^p(\widetilde{C}_D)^{\frac{p}{2}}+2^{2p-2}c_pL_1^p(aB^{\frac{p}{2}}+\widetilde{C}_D^{\frac{p}{2}})]E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{u}^n(x)-u^n(x)|^p\Big].\end{aligned}\tag{5.16}$$

结合 (5.14) 和 (5.16), 记 $\widetilde{C}' := 2^{3p-2}L_1^p(\widetilde{C}_D)^{\frac{p}{2}} + 2^{4p-3}c_pL_1^p(aB^{\frac{p}{2}} + \widetilde{C}_D^{\frac{p}{2}})$, 有

$$\begin{aligned}
&E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{u}^n(x)-u^n(x)|^p\Big]\\
&\leqslant 2^pE\Big[\sup_{x\in D}|\overline{v}^n(x)-v^n(x)|^p\Big]\\
&\leqslant 2^{2p-1}E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{v}^n(x)-\widehat{v}^n(x)|^p\Big]+2^{2p-1}E\Big[\sup_{x\in D}|\widehat{v}^n(x)-v^n(x)|^p\Big]\\
&\leqslant 2^{2p-1}E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{v}^n(x)-\widehat{v}^n(x)|^p\Big]+\widetilde{C}'E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{u}^n(x)-u^n(x)|^p\Big].
\end{aligned}$$

由 $\widetilde{C}' < 1$, 则存在一个常数 c'', 使得

$$E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{u}^n(x)-u^n(x)|^p\Big]\leqslant c''E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{v}^n(x)-\widehat{v}^n(x)|^p\Big].$$

最后, 将问题归结于估计 $\overline{v}^n-\widehat{v}^n$. 由 $\widehat{v}^n$ 和 $\overline{v}^n$ 的积分形式, 有

$$\begin{aligned}
\widehat{v}^n(x)-\overline{v}^n(x)=&\int_D(K^n(x,y)-K'(x,y))f(\underline{k}_n(y),\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))\mathrm{d}y\\
&+\int_D(K^n(x,y)-K'(x,y))\sigma(\underline{k}_n(y),\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))W(\mathrm{d}y)\\
&+\int_D K'(x,y)(f(\underline{k}_n(y),\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))-f(y,u(y)))\mathrm{d}y\\
&+\int_D K'(x,y)(\sigma(\underline{k}_n(y),\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))-\sigma(y,u(y)))W(\mathrm{d}y)\\
:=&B_1^n(x)+B_2^n(x)+B_3^n(x)+B_4^n(x).
\end{aligned}\tag{5.17}$$

我们将证明当 $n\to 0$ 时, 这 4 项都趋于 0. 由估计式 (5.11), 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\int_D(K(x,y)-K'(x,y))^2\mathrm{d}y=0.$$

由文 [5, 引理3.5], 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在常数 $C(d,\varepsilon)$, 使得对于 $x\in D$ 和 $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_D|K(x,y)-K^n(x,y)|^2\mathrm{d}y\leqslant C(d,\varepsilon)n^{-2\sigma(d,\varepsilon)},\tag{5.18}$$

其中

$$\sigma(d,\varepsilon)=\begin{cases}1-\varepsilon, & 当\ d=1;\\ \dfrac{1}{2}-\varepsilon, & 当\ d=2;\\ \dfrac{1}{5}-\varepsilon, & 当\ d=3.\end{cases}$$

此外, 还需要关于 $\overline{u}^n$ 的估计. 由引理 4.2, 有

$$E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{u}^n(x)|^p\Big]\leqslant E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{v}^n(x)|^p+\sup_{x\in D}|\overline{z}^n(x)|^p\Big]\leqslant 2E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{v}^n(x)|^p\Big].$$

又由引理 5.1、估计式 (3.8) 和 (3.9), 存在常数 C_4, 使得

$$\begin{aligned}
E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{v}^n(x)|^p\Big]\leqslant& C_4E\Big[\sup_{x\in D}\Big|\int_D K'(x,y)f(y,u(y))\mathrm{d}y\Big|^p\Big]\\
&+C_4E\Big[\sup_{x\in D}\Big|\int_D K'(x,y)\sigma(y,u(y))W(\mathrm{d}y)\Big|^p\Big]
\end{aligned}$$

$$\leqslant C_4 E\Big[\sup_{x\in D}(1+|u(x)|^2)^{\frac{p}{2}}\Big]<\infty,$$

则有

$$E\Big[\sup_{x\in D}|\overline{u}^n(x)|^p\Big]<\infty. \tag{5.19}$$

由估计式 (5.11), (5.18) 和 (5.19), 有

$$\begin{aligned}&E\Big[\sup_{x\in D}|B_1^n(x)|^p\Big]\\ &\leqslant \Big[\sup_{x\in D}\Big(\int_D|K^n(x,y)-K'(x,y)|^2\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\cdot E\Big[\sup_{y\in D}|f(\underline{k}_n(y),\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))|^p\Big]\\ &\leqslant C\Big[\sup_{x\in D}\Big(\int_D|K^n(x,y)-K'(x,y)|^2\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\cdot\Big[1+E\Big(\sup_{y\in D}|\overline{u}^n(\underline{k}_n(y))|^p\Big)\Big]\\ &\leqslant C\Big[\sup_{x\in D}\Big(\int_D|K^n(x,y)-K'(x,y)|^2\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\to 0,\quad 当\ n\to\infty.\end{aligned} \tag{5.20}$$

类似估计式 (5.10) 的证明, 只需证

$$\lim_{n\to\infty}E[|B_2^n(x)|^p]=0.$$

事实上, 有

$$\begin{aligned}&E[|B_2^n(x)|^p]\\ &\leqslant c_pE\Big[\Big(\int_D|K^n(x,y)-K'(x,y)|^2|\sigma(\underline{k}_n(y),\overline{u}^n(\underline{k}_n(y)))|^2\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\ &\leqslant CE\Big[\Big(\int_D|K^n(x,y)-K'(x,y)|^2(1+|\overline{u}^n(\underline{k}_n(y))|^2)\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\\ &\leqslant C\Big[1+E\Big(\sup_{y\in D}|\overline{u}^n(\underline{k}_n(y))|^p\Big)\Big]\cdot\Big[\int_D|K^n(x,y)-K'(x,y)|^2\mathrm{d}y\Big]^{\frac{p}{2}}\\ &\to\ 0,\quad 当\ n\to\infty.\end{aligned} \tag{5.21}$$

同理可得

$$\lim_{n\to\infty}E(|B_3^n(x)|^p+|B_4^n(x)|^p)=0. \tag{5.22}$$

结合 (5.20)–(5.22), 得到

$$\lim_{n\to\infty}E\Big[\sup_{x\in D}|\widehat{v}^n(x)-\overline{v}^n(x)|^p\Big]=0. \tag{5.23}$$

因此完成 (5.13) 的证明. 定理证毕.

致谢 感谢导师汤善健教授和 Ralf Kornhuber 教授在本文撰写过程中的指导和建议. 同时感谢审稿人对本文初稿提出的宝贵的修改意见.

参 考 文 献

[1] Nualart D, Tindel S. Quasilinear stochastic elliptic equations with reflection [J]. *Stochastic Process Appl*, 1995, 57:73–82.

[2] Bensoussan A, Lions J L. Applications of variational inequalities in stochastic control [M]. Amsterdam: North-Holland Pub Co, 1982.

[3] Yue W, Zhang T. Elliptic stochastic partial differential equations with two reflecting walls [J]. *Infinite Dimensional Analysis Quatum Probability & Relate Topics*, 2014, 17(04):149–164.

[4] Funaki T, Olla S. Fluctuations for $\nabla\phi$ interface model on a wall [J]. *Stochastic Process Appl*, 2001, 94(1):1–27.

[5] Gyöngy I, Martinez T. On numerical solution of stochastic partial differential equations of elliptic type [J]. *Stochastic: An International Journal of Probability and Stochastics Processes*, 2006, 78(04):213–231.

[6] Martinez T, Sanz-Solè M. A lattice scheme for stochastic partial differential equations of elliptic type in dimension $d \geqslant 4$ [J]. *Appl Math Optim*, 2006, 54(03):343–368.

[7] Nualart D, Pardoux E. White noise driven quasilinear SPDEs with reflection [J]. *Probab Theory Rel Fields*, 1992, 93:77–89.

[8] Donati-Martin C, Pardoux E. White noise driven SPDEs with reflection [J]. *Probab Theory Rel Fields*, 1993, 95:1–24.

[9] Xu T, Zhang T. White noise driven SPDEs with reflection: existence, uniqueness and large deviation principles [J]. *Stochastic Process Appl*, 2009, 119:3453–3470.

[10] Denis L, Matoussi A, Zhang J. The obstacle problem for quasilinear stochastic PDEs: Analytical approach [J]. *Ann Probab*, 2014, 42:865–905.

[11] Gyöngy I. Lattice approximations for stochastic quasi-linear parabolic partial differential equations driven by space-time white noise I [J]. *Potential Analysis*, 1998, 9:1–25.

[12] Gyöngy I. Lattice approximations for stochastic quasi-linear parabolic partial differential equations driven by space-time white noise II [J]. *Potential Analysis*, 1999, 11:1–37.

[13] Zhang T. Lattice approximations of reflected stochastic partial differential equations driven by space-time white noise [J]. *Annals of Applied Probability An Official Journal of Institute of Mathematical Statistics*, 2005, 26:3602–3629.

[14] Greenbaum A, Chartier T P. Numerical methods: design, analysis, and computer implementation of algorithms [M]. New Jersey: Princeton University Press, 2012.

[15] Buckdahn R, Pardoux E. Monotonicity methods for white noise driven quasi-linear SPDEs [J]. *Diffusion Processes and Related Problems in Analysis*,1990, 1:219–233.

[16] Zhang T. Strong convergence of Wong-Zakai approximations of reflected sdes in a multidimensional general domain [J]. *Potential Analysis*, 2014, 41(3):783–815.

Lattice Approximations of Semilinear Stochastic Elliptic Equations with Reflection

DAI Jun[1] ZHANG Jing[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China.
E-mail: 13110180052@fudan.edu.cn; zhang_jing@fudan.edu.cn

Abstract This paper deals with lattice approximations of reflected stochastic elliptic equations driven by white noise on a bounded domain in $\mathbb{R}^d$, $d=1,2,3$. The convergence of the scheme is established.

Keywords Stochastic partial differential equations, Obstacle problem, White noise, Lattice approximation

2000 MR Subject Classification 60H15, 76M20

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 3, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA