数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(3):307–324
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0023

Clean-正合和 Clean-导出范畴*

李瑞婷[1] 杨 刚[2] 王小青[1]

摘要 在交换环 R 上, 引入了 Clean-正合以及 Clean-导出范畴的概念, 分别给出了 Clean-短正合列和 Clean-正合复形的等价刻画, 研究了 Clean-导出范畴的性质. 特别地, 证明了有界 Clean-导出范畴可以实现为特殊的同伦范畴.

关键词 Clean-正合复形, Clean-投射模, Clean-内射模, Clean-导出范畴
MR (2000) 主题分类 18E10, 18E30, 18G25, 18G35
中图法分类 O154.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)03-0307-18

1 引言及准备知识

导出范畴于 20 世纪 60 年代由 Grothendieck 引进, 导出范畴是三角范畴中自然且重要的范畴, 它是使得拟同构变成同构的 "最小" 加法范畴, 或等价地, 是使得正合复形成为零对象的 "最小" 加法范畴. 在过去的几十年里, 导出范畴的理论及应用得到了极大的发展. 例如, 导出范畴和导出函子被应用在代数几何中 (参见文 [1]). 近几年, 国内外的许多学者对导出范畴进行了深入广泛的研究 (参见文 [2–5]). 2016 年, Emmanouil 在文 [6] 中研究了纯正合复形, 给出了纯正合复形的许多等价刻画. 例如, 令 R 是环, 则 (左)R-模的复形 F 是纯正合的当且仅当任意链映射 $f: P \to F$ 是零伦的, 其中 P 是纯投射 (左)R-模的复形. 2016 年, 郑跃飞和黄兆泳在文 [7] 中定义了纯导出范畴

$$\mathbf{D}_{\mathrm{pur}}(R) = \mathbf{K}(R)/\mathbf{K}_{\mathrm{p}\varepsilon}(R),$$

其中 $\mathbf{K}_{\mathrm{p}\varepsilon}(R)$ 是纯正合范畴, 并且将有界纯导出范畴实现为纯投射 (或纯内射) 模的复形的全子范畴的同伦范畴, 即存在三角等价

$$\mathbf{K}^{-,\mathrm{pb}}(\mathcal{PP}) \simeq \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{pur}}(R) \simeq \mathbf{K}^{+,\mathrm{pb}}(\mathcal{PI}),$$

其中 $\mathbf{K}^{-,\mathrm{pb}}(\mathcal{PP}) = \{X \in \mathbf{K}^{-}(\mathcal{PP}) \mid \mathrm{inf}_{\mathbf{P}}X \text{ 有限 }\}$, $\mathbf{K}^{+,\mathrm{pb}}(\mathcal{PI}) = \{X \in \mathbf{K}^{+}(\mathcal{PI}) \mid \mathrm{sup}_{\mathbf{P}}X$ 有限 $\}$, 这里 $\mathcal{PP}$ 和 $\mathcal{PI}$ 分别表示纯投射模和纯内射模的类.

受以上文献的启发, 我们在交换环 R 上通过 Clean-短正合列引入了 Clean-正合复形的概念, 给出了它的等价刻画, 即复形 X 是 Clean-正合的当且仅当对于任意的超有限表现 R-模 F, $\mathrm{Hom}_R(F, X)$ 是正合的; 当且仅当对于任意的超有限表现 R-模 M, $M \otimes_R X$ 是

本文 2017 年 6 月 2 日收到, 2018 年 9 月 12 日收到修改稿.
[1]兰州交通大学数理学院, 兰州 730070. E-mail: liruiting1993@163.com; wxq647982@163.com
[2]通信作者. 兰州交通大学数理学院, 兰州 730070. E-mail: yanggang@mail.lzjtu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11561039, No. 11761045) 和甘肃省自然科学基金 (No. 17JR5RA091) 的资助.

正合的; 当且仅当对于任意的 Clean-投射模 P, $\mathrm{Hom}_R(P,X)$ 是正合的; 当且仅当对于任意的 Clean-内射模 I, $\mathrm{Hom}_R(X,I)$ 是正合的. 定义 Clean-导出范畴为

$$\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)=\mathbf{K}(R)/\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R),$$

其中 $\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$ 是 Clean-正合范畴. 在交换环 R 上将有界 Clean-导出范畴实现为 Clean-投射 (或 Clean-内射) 模的复形的全子范畴的同伦范畴, 即存在三角等价

$$\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})\simeq\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R)\simeq\mathbf{K}^{+,\mathrm{cb}}(\mathcal{CI}),$$

其中 $\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})=\{X\in\mathbf{K}^{-}(\mathcal{CP})\mid \inf_{\mathbf{c}}X$ 有限 $\}$, $\mathbf{K}^{+,\mathrm{cb}}(\mathcal{CI})=\{X\in\mathbf{K}^{+}(\mathcal{CI})\mid \sup_{\mathbf{c}}X$ 有限 $\}$; 这里 $\mathcal{CP}$ 和 $\mathcal{CI}$ 分别表示 Clean-投射模和 Clean-内射模的类.

首先回顾一些基本概念和事实.

本文中 R 表示具有单位元的交换环, R-Mod 表示 R-模范畴, R-模 M 的示性模记为 $M^{+}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

定义 1.1[8] 称 R-模 M 是超有限表现 (或 FP_∞ 型) 的, 如果 M 有投射分解

$$\cdots\longrightarrow P_n\longrightarrow P_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow M\longrightarrow 0,$$

其中每一个 P_i 都是有限生成投射 R-模.

显然, R-模 M 是超有限表现的, 当且仅当存在正合列

$$\cdots\longrightarrow F_n\longrightarrow F_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0\longrightarrow M\longrightarrow 0,$$

使得每一个 F_i 都是有限生成自由 R-模, 并且超有限表现 R-模是有限表现 R-模, 但是有限表现 R-模不一定是超有限表现 R.

例 1.1[9] 设 k 是域, $R=k[x_1,x_2,x_3,\cdots]/(x_ix_j)_{i,j\geqslant 1}$ 是多项式环. 则 $R/(x_1)$ 是有限表现 R-模, 但不是超有限表现 R-模.

定义 1.2[10] 称 R-模的短正合列

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{\ f\ }Y\xrightarrow{\ g\ }Z\longrightarrow 0$$

是 Clean-正合的, 如果对任意的超有限表现 R-模 M, 有正合列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M,X)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M,Y)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M,Z)\longrightarrow 0.$$

此时, 也称 f 是 Clean-单的, g 是 Clean-满的.

显然, 纯短正合列是 Clean-短正合列, 但是 Clean-短正合列不一定是纯短正合列.

例 1.2 设 k 是域, E 是无限维的 k-向量空间. 若环 $R:=k\alpha E$ 是 k 通过 E 的扩张, 则由文 [11, 例2.8] 知, 存在 R-模 M 是弱内射的 (即对任意的超有限表现模 F, $\mathrm{Ext}^1_R(F,M)=0$), 但不是 FP- 内射的. 于是有正合列

$$0\longrightarrow M\longrightarrow I\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

是 Clean-正合的但不是纯正合的, 其中 I 是内射模, $C=\mathrm{Coker}(M\to I)$.

引理 1.1 设

$$\eta:0\longrightarrow B'\xrightarrow{\ \lambda\ }B\longrightarrow B''\longrightarrow 0$$

是 R-模的短正合列. 则对任意的超有限表现 R-模 A, $A\otimes_R\eta$ 是正合的当且仅当对于任意满足如下交换图的有限生成投射 R-模 P_1, P_0, 存在映射 $P_0\to B'$, 使得图中的左上三角交换, 其中 $\mathrm{Coker}(P_1\to P_0)$ 是超有限表现 R- 模.

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & P_0 \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "h"'] & & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\lambda"] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

注　“仅当” 的部分等价于: 若 $b_1',\cdots,b_n'\in B'$ 且 $\lambda b_j'=\sum\limits_i r_{ji}b_i$, $\forall j$, 其中 $b_1,\cdots,b_m\in B$, $r_{ji}\in R$, 则存在 $h_i'\in B'$, 使得 $b_j'=\sum\limits_i r_{ji}h_i'$, $\forall j$.

证　必要性: 设 $b_1',\cdots,b_n'\in B'$, 且 $\lambda b_j'=\sum\limits_i r_{ji}b_i$, $\forall j$, $b_1,\cdots,b_m\in B$, $r_{ji}\in R$, P_0 是有限生成投射 R-模, 生成元为 $\{x_1,\cdots,x_n\}$. 令 $A=P_0/K$, 其中 $K\leqslant P_0$ 且 K 是由 m 个 $\sum\limits_j x_jr_{ji}$ 生成的超有限表现 R-模. 则 A 是超有限表现 R-模, 且 A 由 $\{a_i=x_i+K, i=1,\cdots,m\}$ 生成. 于是 $(1\otimes_R\lambda)\big(\sum\limits_j a_j\otimes_R b_j'\big)=\sum\limits_j a_j\otimes_R\lambda b_j'=\sum\limits_j a_j\otimes_R\big(\sum\limits_i r_{ji}b_i\big)=\sum\limits_i\big(\sum\limits_j a_jr_{ji}\otimes_R b_i\big)=\sum\limits_i\sum\limits_j(x_j+K)r_{ji}\otimes_R b_i=\sum\limits_i\big(\sum\limits_j x_jr_{ji}+K\big)\otimes_R b_i=0$. 由条件知, $1\otimes_R\lambda: A\otimes_R B'\to A\otimes_R B$ 是单射, 从而 $\sum\limits_j a_j\otimes_R b_j'=0$. 再由超有限表现 R- 模是有限表现 R-模和文 [12, 定理 3.68] 知, 存在 $h_i'\in B'$, 使得 $b_j'=\sum\limits_i r_{ji}h_i'$, $\forall j$.

充分性: 由文 [12, 定理 3.69] 可得.

定理 1.1 设

$$\eta: 0\longrightarrow B'\xrightarrow{\ i\ }B\xrightarrow{\ p\ }B''\longrightarrow 0$$

是 R-模的短正合列. 则 η 是 Clean-正合的, 当且仅当对于任意的超有限表现 R-模 M, $M\otimes_R\eta$ 是正合的.

证　必要性: 设 M 是超有限表现 R-模. 则存在正合列

$$P_1\xrightarrow{\ f\ }P_0\xrightarrow{\ g\ }M\longrightarrow 0,$$

其中 P_1, P_0 都是有限生成投射 R-模. 由 η 是 Clean-正合的知, 存在正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,B')\xrightarrow{\ i_*\ }\mathrm{Hom}_R(M,B)\xrightarrow{\ p_*\ }\mathrm{Hom}_R(M,B'')\longrightarrow 0,$$

其中 $(-)_*=\mathrm{Hom}_R(M,-)$. 对任意的 $\alpha\in\mathrm{Hom}_R(M,B'')$, 由 p_* 是满射知, 存在 $s_1\in\mathrm{Hom}_R(M,B)$, 使得 $p_*s_1=ps_1=\alpha$. 考虑行正合的图:

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "\beta"'] & P_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, dotted, "h"'] \arrow[dl, dotted, "s_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, "s_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "p"] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由 P_0 是投射 R-模知, 存在 $h: P_0 \to B$, 使得 $ph = \alpha g$. 又由图追踪知, 存在 $\beta: P_1 \to B'$, 使得 $hf = i\beta$. 用函子 $\mathrm{Hom}_R(P_0, -)$ 作用正合列

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \longrightarrow 0,$$

再由 P_0 是投射 R-模, 可得正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_0, B') \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_R(P_0, B) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_R(P_0, B'') \longrightarrow 0,$$

其中 $(-)_* = \mathrm{Hom}_R(P_0, -)$. 因为 $p_*(h - s_1 g) = p(h - s_1 g) = ph - ps_1 g = ph - \alpha g = 0$, 所以 $h - s_1 g \in \mathrm{Ker}\, p_* = \mathrm{Im}\, i_*$, 于是存在 $s_0: P_0 \to B'$, 使得 $h - s_1 g = is_0$. 故 $i\beta = hf = (s_1 g + is_0)f = is_0 f$, 又因为 i 是单射, 所以 $\beta = s_0 f$, 即为上图中左边第一个方框的上三角交换. 从而由引理 1.1 知, $M \otimes_R \eta$ 是正合的.

充分性: 设 M 是超有限表现 R-模, $M \otimes_R \eta$ 是正合的. 则存在正合列

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0,$$

其中 P_1, P_0 都是有限生成投射 R- 模. 只需证 $\mathrm{Hom}_R(M, p) = p_*: \mathrm{Hom}_R(M, B) \to \mathrm{Hom}_R(M, B'')$ 是满射即可. 对任意的 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, B'')$, 考虑行正合的图:

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "\sigma"'] & P_0 \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dotted, "t_0"'] \arrow[d, dotted, "\tau"'] & M \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "t"'] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "p"] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由 P_0 是投射 R-模知, 存在 $\tau: P_0 \to B$, 使得 $p\tau = \varphi g$. 因为 $p\tau f = \varphi g f = 0$, 所以 $\mathrm{Im}\, \tau f \subseteq \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, i = B'$. 令 $\sigma = \tau f: P_1 \to B'$, 则 $i\sigma = \sigma = \tau f$. 由引理 1.1 知, 存在 $t_0: P_0 \to B'$, 使得 $t_0 f = \sigma$. 又因为 $it_0 f = i\sigma = \tau f$, 所以 $(\tau - it_0)f = 0$. 于是 $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}(\tau - it_0)$, 而 $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$, 故 $\mathrm{Ker}\, g \subseteq \mathrm{Ker}(\tau - it_0)$. 由同态基本定理知, 存在 $t: M \to B$, 使得 $\tau - it_0 = tg$. 因为 $ptg = p(\tau - it_0) = p\tau = \varphi g$, 而 g 是满射, 所以 $p_* t = pt = \varphi$. 因此 p_* 是满射.

定义 1.3 称 R-模 P 是 Clean-投射的, 如果对于任意 Clean-短正合列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, Z) \longrightarrow 0.$$

对偶地, 可定义 Clean-内射 R-模.

注 1.1 (1) 投射模和超有限表现模都是 Clean-投射模; Clean-投射模是纯投射模, 但纯投射模不一定是 Clean-投射模 (因为存在是 Clean-正合但不是纯正合的短正合列).

(2) 内射模是 Clean-内射模, Clean-内射模是纯内射模, 但纯内射模不一定是 Clean-内射模.

以下用 $\mathcal{CP}$ 和 $\mathcal{CI}$ 分别表示 Clean-投射模和 Clean-内射模的类.

命题 1.1 对于任意的超有限表现 R-模 M, $M^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是 Clean-内射 R-模.

证　设 R-模的短正合列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

是 Clean-正合的. 对于任意的超有限表现 R-模 M, 由定理 1.1 可得正合列

$$0 \longrightarrow M \otimes_R X \longrightarrow M \otimes_R Y \longrightarrow M \otimes_R Z \longrightarrow 0.$$

于是有正合列

$$0 \longrightarrow (M \otimes_R Z)^+ \longrightarrow (M \otimes_R Y)^+ \longrightarrow (M \otimes_R X)^+ \longrightarrow 0.$$

再由伴随同构, 可得正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Z, M^+) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Y, M^+) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, M^+) \longrightarrow 0.$$

故 M^+ 是 Clean-内射的.

定义 1.4[13]　设 $\mathcal{L}$ 是一个 R-模类, M 是 R- 模. 称态射 $f: L \to M$ 是 M 的一个 $\mathcal{L}$-预覆盖, 其中 $L \in \mathcal{L}$, 如果对于任意的 $L' \in \mathcal{L}$, $\mathrm{Hom}_R(L', f): \mathrm{Hom}_R(L', L) \to \mathrm{Hom}_R(L', M)$ 是满射; 称 $\mathcal{L}$-预覆盖 $f: L \to M$ 是 M 的一个 $\mathcal{L}$-覆盖, 如果对于满足条件 $fg = f$ 的每一个自同态 $g: L \to L$, 有 g 是同构. 对偶地, 可以定义 $\mathcal{L}$-预包络和 $\mathcal{L}$-包络.

以下用 $\mathcal{M}_{FP_\infty}$ 表示超有限表现 R-模的类.

引理 1.2　设 R 是交换环, $\mathcal{M}_{FP_\infty}$ 是超有限表现 R-模的类. 则以下成立:

(1) 每一个 R-模都有一个 Clean-投射预覆盖.

(2) 每一个 R-模都有一个 Clean-内射预包络.

证　(1) 设 M 是 R-模. 由超有限表现 R-模的定义知, 存在集合 $X \subset \mathcal{M}_{FP_\infty}$, 使得对每个 $F \in \mathcal{M}_{FP_\infty}$, 都存在 $G \in X$, 有 $F \cong G$. 对每个 $F \in X$, 令 $X_F = \mathrm{Hom}_R(F, M)$. 定义态射 $F^{(X_F)} \to M$, $(\varphi_f)_{X_F} \mapsto \Sigma f(\varphi_f)$, 则任何 R-同态 $F \to M$ 都可通过 $F^{(X_F)} \to M$ 分解. 对任意的 $F' \in \mathcal{M}_{FP_\infty}$, 则存在 $G' \in X$, 使得 $F' \cong G'$. 于是有正合列

$$\mathrm{Hom}_R(F', \bigoplus_{F \in X} F^{(X_F)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F', M) \longrightarrow 0.$$

取 $F' = R$, 则有正合列

$$\bigoplus_{F \in X} F^{(X_F)} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

因此正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \bigoplus_{F \in X} F^{(X_F)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

是 Clean-正合的. 注意到 $\bigoplus\limits_{F \in X} F^{(X_F)}$ 是 Clean-投射 R-模, 故 $\bigoplus\limits_{F \in X} F^{(X_F)} \to M$ 是 M 的 Clean-投射预覆盖.

(2) 设 M 是 R-模. 则由 (1) 知存在 Clean-正合序列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} F_i \longrightarrow M^+ \longrightarrow 0,$$

使得 $\bigoplus\limits_{i\in I} F_i \to M^+$ 是 M^+ 的一个 Clean-投射预覆盖, 其中 $F_i \in \mathcal{M}_{FP_\infty}$, $\forall i \in I$. 从而得到 Clean-正合序列

$$0 \longrightarrow M^{++} \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i^+ \longrightarrow K^+ \longrightarrow 0.$$

考虑推出图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & M \arrow[r, equal] \arrow[d] & M \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M^{++} \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{i\in I} F_i^+ \arrow[r] \arrow[d] & K^+ \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^{++}/M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & K^+ \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

注意到 $M \to M^{++}$ 是纯单的, 故

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M^{++} \longrightarrow M^{++}/M \longrightarrow 0$$

是 Clean-正合的. 从而

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i^+ \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

是 Clean-正合的. 因此 $M \to \prod\limits_{i\in I} F_i^+$ 是 M 的 Clean-内射预包络.

由引理 1.2 不难得到以下结论.

推论 1.1 (1) M 是 Clean-投射的, 当且仅当 M 是 $\bigoplus\limits_{i\in I} F_i$ 的一个直和项, 其中 $F_i \in \mathcal{M}_{FP_\infty}$, $\forall i \in I$.

(2) N 是 Clean-内射的, 当且仅当 N 是 $\prod\limits_{i\in I} F_i^+$ 的一个直和项, 其中 $F_i \in \mathcal{M}_{FP_\infty}$, $\forall i \in I$.

(3)

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

是 Clean-正合的, 当且仅当对任意的 $F \in \mathcal{CP}$, 序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F, N) \longrightarrow 0$$

是 Clean-正合的; 也当且仅当对任意的 $E \in \mathcal{CI}$, 序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, E) \longrightarrow 0$$

是 Clean-正合的.

Enochs 和 Jenda 在文 [13] 中提到的定义 6.6.2–6.6.3 对下面的定理有很大的作用, 即如下定义.

定义 1.5[13] 设 $\mathcal{F}$ 是一个 R-模类, $\mathcal{S}$ 是一个 R-同态类. 称 $(\mathcal{S},\mathcal{F})$ 是 R-Mod 上的一个内射结构, 如果满足以下条件:

(1) $F\in\mathcal{F}$ 当且仅当对 $\mathcal{S}$ 中的任意态射 $M\to N$, 序列

$$\mathrm{Hom}_R(N,F)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,F)\longrightarrow 0$$

是正合的.

(2) 态射 $M\to N$ 在 $\mathcal{S}$ 中, 当且仅当对任意的 $F\in\mathcal{F}$, 序列

$$\mathrm{Hom}_R(N,F)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,F)\longrightarrow 0$$

是正合的.

(3) 每一个 R-模 M 都有一个 $\mathcal{F}$-预包络 $M\to F$.

定义 1.6[13] 设 $\mathcal{G}$ 是一个 R-模类. 称 $(\mathcal{S},\mathcal{F})$ 是由 $\mathcal{G}$ 决定的, 如果态射 $M\to N$ 在 $\mathcal{S}$ 中当且仅当对任意的 $G\in\mathcal{G}$, 序列 $0\to G\otimes_R M\to G\otimes_R N$ 是正合的.

定理 1.2 每一个 R-模都有一个 Clean-内射包络.

证 令 $\mathcal{S}=\{M\to N\mid 0\to M\to N\to M/N\to 0$ 是 Clean-正合的 $\}$, $\mathcal{F}=\mathcal{CI}$, 则 $(\mathcal{S},\mathcal{F})$ 是由 $\mathcal{G}=\mathcal{M}_{FP_\infty}$ 决定的. 由文 [13, 定理 6.6.4] 和引理 1.2 知, 每一个 R-模都有一个 Clean-内射包络.

2 Clean-正合复形

用 $\mathbf{C}(R)$ 和 $\mathbf{K}(R)$ 分别表示 R-模的复形范畴和 R-模的同伦范畴, 对于任意的 $X\in\mathbf{C}(R)$, 即

$$X:=\ \cdots\longrightarrow X^{i-1}\xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i\xrightarrow{d_X^i} X^{i+1}\xrightarrow{d_X^{i+1}}\cdots,$$

使得 $d_X^{i+1}d_X^i=0$, $\forall i\in\mathbb{Z}$. 将 R-模 M 看成是零次轴复形, 即

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow M\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots,$$

使得 M 在第零层次, 其他层次都为零. 对于正整数 n, 复形 $X[n]$ 表示复形 X 向左平移了 n 个单位, 即 $X[n]^m=X^{n+m}$, $d^m_{X[n]}=(-1)^n d_X^{n+m}$; 复形 $X[-n]$ 表示复形 X 向右平移了 n 个单位, 即 $X[-n]^m=X^{m-n}$, $d^m_{X[-n]}=(-1)^n d_X^{m-n}$. 复形 $X=(X,d_X^n)$ 到复形 $Y=(Y,d_Y^n)$ 的一个复形态射 $f:X\to Y$ 是指 $f=(f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, 满足 $f^{n+1}d_X^n=d_Y^n f^n$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, 其中 $f^n:X^n\to Y^n$ 是 R-模同态, $\forall n\in\mathbb{Z}$, 即有交换图:

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\ Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \end{tikzcd}$$

复形态射 $f:X\to Y$ 的映射锥 $\mathrm{Cone}(f)$ 定义为如下复形: 其第 n 层次分支为

$$(\mathrm{Cone}(f))^n=X^{n+1}\oplus Y^n,\quad \forall n\in\mathbb{Z},$$

其第 n 次微分为

$$d^n_{\mathrm{Cone}(f)} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} : X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+2} \oplus Y^{n+1}.$$

设 $(X, \partial_X), (Y, \partial_Y) \in \mathbf{C}(R)$. 定义全复形 $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ 为如下 $\mathbb{Z}$-模复形:

$$\cdots \longrightarrow \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(X^p, Y^{p+n}) \xrightarrow{d^n} \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(X^p, Y^{p+n+1}) \longrightarrow \cdots,$$

其中 $\mathbb{Z}$ 是整数加群, 第 n 次齐次分支为

$$\mathrm{Hom}(X, Y)^n := \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(X^p, Y^{p+n}), \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

对于任意的 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)^n$, $d^n(f) = (\partial_Y^{n+p} f^p - (-1)^n f^{p+1} \partial_X^p)_{p\in\mathbb{Z}}$.

定义 2.1[14] 设 $X \in \mathbf{C}(R)$.

(1) 称 X 是上有界的 (或右有界的), 如果当 $i \gg 0$ 时, $X^i = 0$.

(2) 称 X 是下有界的 (或左有界的), 如果当 $i \ll 0$ 时, $X^i = 0$.

(3) 称 X 是有界的, 如果 X 既是上有界的又是下有界的.

定义 2.2[14] 设 $f : X \to Y$ 是 $\mathbf{C}(R)$ 中的链映射.

(1) 称 $f : X \to Y$ 是拟同构, 如果 $\mathrm{H}^n(f) : \mathrm{H}^n(X) \cong \mathrm{H}^n(Y), \forall n \in \mathbb{Z}$.

(2) 称 $f : X \to Y$ 是同伦等价, 如果存在链映射 $g : Y \to X$, 使得 $fg \sim \mathrm{Id}_Y, gf \sim \mathrm{Id}_X$.

定义 2.3 设 X 是正合复形, $n \in \mathbb{Z}$. 称 X 在 n 处是 Clean-正合的, 如果正合列

$$0 \longrightarrow K^n \longrightarrow X^n \longrightarrow C^{n-1} \longrightarrow 0$$

是 Clean-正合的, 其中 $K^n = \mathrm{Ker}\, d_X^n$, $C^{n-1} = \mathrm{Coker}\, d_X^{n-1}$. 称 X 是 Clean-正合的, 如果它在所有 n 处都是 Clean-正合的.

注 2.1 (1) 复形 X 是 Clean-正合的, 当且仅当对于任意的超有限表现模 F, $\mathrm{Hom}_R(F, X)$ 是正合的; 也当且仅当对于任意的超有限表现 R-模 M, $M \otimes_R X$ 是正合的.

(2) 复形 X 是 Clean-正合的, 当且仅当对于任意的 Clean-投射模 P, $\mathrm{Hom}_R(P, X)$ 是正合的; 也当且仅当对于任意的 Clean-内射模 I, $\mathrm{Hom}_R(X, I)$ 是正合的.

(3) 纯正合复形是 Clean-正合复形.

定义 2.4 设 X, $Y \in \mathbf{C}(R)$. 称链映射 $f : X \to Y$ 是 Clean-拟同构, 如果映射锥 $\mathrm{Cone}(f)$ 是 Clean-正合复形.

注 2.2 (1) $\mathbf{C}(R)$ 中的链映射 $f : X \to Y$ 是 Clean-拟同构, 当且仅当对任意的超有限表现 R-模 M, $M \otimes_R f : M \otimes_R X \to M \otimes_R Y$ 是拟同构.

(2) $\mathbf{C}(R)$ 中的链映射 $f : X \to Y$ 是 Clean-拟同构, 当且仅当对于任意的 Clean-投射模 P, $\mathrm{Hom}_R(P, f) : \mathrm{Hom}_R(P, X) \to \mathrm{Hom}_R(P, Y)$ 是拟同构; 也当且仅当对于任意的 Clean-内射模 I, $\mathrm{Hom}_R(f, I) : \mathrm{Hom}_R(Y, I) \to \mathrm{Hom}_R(X, I)$ 是拟同构.

(3) 纯拟同构是 Clean-拟同构.

分别用 $\mathbf{K}(\mathcal{CP})$ 和 $\mathbf{K}(\mathcal{CI})$ 表示 Clean-投射模的复形和 Clean-内射模的复形的同伦范

畴, 分别用 $\mathbf{K}^-(\mathcal{CP})$ 和 $\mathbf{K}^+(\mathcal{CI})$ 表示上有界 Clean-投射模的复形和下有界 Clean-内射模的复形的同伦范畴.

命题 2.1 (1) 复形 X 是 Clean-正合的, 当且仅当对于任意的 $P \in \mathbf{K}^-(\mathcal{CP})$, $\mathrm{Hom}_R(P, X)$ 是正合的; 也当且仅当对于任意的 $I \in \mathbf{K}^+(\mathcal{CI})$, $\mathrm{Hom}_R(X, I)$ 是正合的.

(2) 复形范畴 $\mathbf{C}(R)$ 中的链映射 $f : X \to Y$ 是 Clean-拟同构, 当且仅当对于任意的 $P \in \mathbf{K}^-(\mathcal{CP})$, $\mathrm{Hom}_R(P, f) : \mathrm{Hom}_R(P, X) \to \mathrm{Hom}_R(P, Y)$ 是拟同构; 也当且仅当对于任意的 $I \in \mathbf{K}^+(\mathcal{CI})$, $\mathrm{Hom}_R(f, I) : \mathrm{Hom}_R(Y, I) \to \mathrm{Hom}_R(X, I)$ 是拟同构.

证 (1) 由注 2.1 和文 [15, 引理 2.4 和引理 2.5] 可得结论.

(2) 由注 2.2 和文 [15, 命题 2.6 和命题 2.7] 可得结论.

命题 2.2 (1) 设 $f : X \to P$ 是 Clean-拟同构, $P \in \mathbf{K}^-(\mathcal{CP})$. 则存在 Clean-拟同构 $g : P \to X$, 使得 $fg \sim \mathrm{Id}_P$.

(2) 设 $f : E \to X$ 是 Clean-拟同构, $E \in \mathbf{K}^+(\mathcal{CI})$. 则存在 Clean-拟同构 $g : X \to E$, 使得 $gf \sim \mathrm{Id}_E$.

证 (1) 因为 $P \in \mathbf{K}^-(\mathcal{CP})$, 所以由命题 2.1 知, 存在拟同构 $\mathrm{Hom}_R(P, f) : \mathrm{Hom}_R(P, X) \to \mathrm{Hom}_R(P, P)$. 于是有同构 $\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, f)) : \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, X)) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, P))$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. 令 $n = 0$, 则存在 $\mathbf{K}(R)$ 中的链映射 $g : P \to X$, 使得 $fg \sim \mathrm{Id}_P$. 下证 $g : P \to X$ 是 Clean-拟同构. 显然 Id_P 是 Clean-拟同构. 由关键公式知, 存在同构 $\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Id}_P)) : \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, P)) \cong \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, P))$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, 即 $\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Id}_P)) = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P,P))}$. 由于

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Id}_P)) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, fg)) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, f)) \circ \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, g)), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

故

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P,P))} = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, f)) \circ \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P, g)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

从而 g 也是 Clean-拟同构.

对偶以上方法可证明 (2).

引理 2.1 (1) 设链映射 $f : X \to Y$ 是 $\mathbf{C}(R)$ 中的 Clean-拟同构, X, $Y \in \mathbf{K}^-(\mathcal{CP})$. 则 f 是同伦等价.

(2) 设链映射 $f : X \to Y$ 是 $\mathbf{C}(R)$ 中的 Clean-拟同构, X, $Y \in \mathbf{K}^+(\mathcal{CI})$. 则 f 是同伦等价.

证 (1) 由 $Y \in \mathbf{K}^-(\mathcal{CP})$ 和命题 2.2 知, 存在 Clean-拟同构 $g : Y \to X$, 使得 $fg \sim \mathrm{Id}_Y$. 再由 $X \in \mathbf{K}^-(\mathcal{CP})$ 和命题 2.2 知, 存在 Clean-拟同构 $h : X \to Y$, 使得 $gh \sim \mathrm{Id}_X$. 因为 $f \sim f \circ \mathrm{Id}_X \sim fgh \sim \mathrm{Id}_Y \circ h \sim h$, 所以 $gf \sim gh \sim \mathrm{Id}_X$. 从而 f 是同伦等价.

对偶以上方法可证明 (2).

引理 2.2 (1) 设链映射 $Y \to X$ 是 $\mathbf{C}(R)$ 中的 Clean-拟同构, $X \in \mathbf{K}^b(R)$, $Y \in \mathbf{K}^+(R)$. 则存在 Clean-拟同构 $X' \to Y$, 使得 $X' \in \mathbf{K}^b(R)$.

(2) 设链映射 $X \to Y$ 是 $\mathbf{C}(R)$ 中的 Clean-拟同构, $X \in \mathbf{K}^+(R)$, $Y \in \mathbf{K}(R)$. 则存在 Clean-拟同构 $Y \to X'$, 使得 $X' \in \mathbf{K}^+(R)$.

证 (1) 设 $Y^n=0$, $\forall n<0$; $X^n=0$, $\forall n>m$; $n,\ m\in\mathbb{Z}$. 则对任意的 $P\in\mathcal{CP}$, 有 $\mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(P,Y))=\mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(P,X))=0$, $\forall i\geqslant m+1$. 定义 $\alpha:X'\to Y$ 如下:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "\alpha"'] & := \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & Y^0 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{Y^0}"'] & \cdots \arrow[r] & Y^{m-1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{Y^{m-1}}"'] & \mathrm{Ker}\, d_Y^m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
Y & := \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Y^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y^{m-1} \arrow[r, "d_Y^{m-1}"] & Y^m \arrow[r] & Y^{m+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

注意到 $\mathrm{H}^m(X')=\mathrm{Ker}\, d_Y^m/\mathrm{Im}\, d_Y^{m-1}=\mathrm{H}^m(Y)$. 因为对于任意的 $P\in\mathcal{CP}$, $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ 保持核, 所以链映射 α 是 Clean-拟同构.

(2) 设 $X^n=0$, $\forall n<0$. 则 $\mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(P,Y))=\mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(P,X))=0$, $\forall i<0$, $\forall P\in\mathcal{CP}$. 定义 $\beta:Y\to X'$ 如下:

$$\begin{tikzcd}
Y: \arrow[d, "\beta"'] & = \cdots \arrow[r] & Y^{-2} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & Y^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & Y^0 \arrow[r] \arrow[d] & Y^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{Y^1}"'] & Y^2 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{Y^2}"'] & \cdots \\
X': & = \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, d_Y^{-1} \arrow[r] & Y^1 \arrow[r] & Y^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

注意到 $\mathrm{H}^0(X')=\mathrm{Ker}\, d_Y^0/\mathrm{Im}\, d_Y^{-1}=\mathrm{H}^0(Y)$. 因为对于任意的超有限表现 R-模 M, $M\otimes_R$-保持余核, 所以链映射 β 是 Clean-拟同构.

3 Clean-导出范畴

令 $\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)=\{X\in\mathbf{K}(R)\mid X$ 是 Clean-正合复形 $\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)=\{f\mid f:X\to Y$ 是 Clean-拟同构 $\}$. 则称 $\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$ 是 Clean-正合范畴. 显然 $\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$ 是 $\mathbf{K}(R)$ 的全子范畴, 进一步 $\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$ 也是 $\mathbf{K}(R)$ 的三角子范畴.

命题 3.1 $\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$ 是 $\mathbf{K}(R)$ 的厚子范畴.

证 (1) 由 $\mathbf{K}(R)$ 是三角范畴和 $\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$ 的定义可得结论.

(2) 设 $X_1,\ X_2\in\mathbf{K}(R)$, $X_1\oplus X_2\in\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$. 则对任意的 $P\in\mathcal{CP}$, 有 $\mathrm{Hom}_R(P,X_1\oplus X_2)$ 是正合的, 即 $\mathrm{Hom}_R(P,X_1)\oplus\mathrm{Hom}_R(P,X_2)$ 是正合的. 于是 $0=\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P,X_1)\oplus\mathrm{Hom}_R(P,X_2))=\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P,X_1))\oplus\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P,X_2))$, $\forall n\in\mathbb{Z}$. 故 $\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P,X_i))=0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $i=1,2$. 由注 2.1 知, X_i 是 Clean-正合的, $i=1,2$. 从而 $\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$ 对直和项封闭. 由文 [14, 命题 3.5.2] 知, $\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$ 是 $\mathbf{K}(R)$ 的厚子范畴.

定义 R-模范畴的 Clean-导出范畴为 Verdier 商 $\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)=\mathbf{K}(R)/\mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$. 因此, Clean-导出范畴 $\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)$ 的对象仍是 R-模的复形, 而 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)}(X,Y)$ 是 X 到 Y 的右分式的所有等价类作成的加法群 (或 X 到 Y 的左分式的所有等价类作成的加法群). 类似地, 定义 R-模范畴的有界 Clean-导出范畴为 Verdier 商 $\mathbf{D}^{\mathbf{b}}_{\mathcal{C}}(R)=\mathbf{K}^{\mathbf{b}}(R)/\mathbf{K}^{\mathbf{b}}_{\mathcal{CE}}(R)$. 定义 R-模范畴的上有界 Clean-导出范畴为 Verdier 商 $\mathbf{D}^{-}_{\mathcal{C}}(R)=\mathbf{K}^{-}(R)/\mathbf{K}^{-}_{\mathcal{CE}}(R)$. 定义 R-模范畴的下有界 Clean-导出范畴为 Verdier 商 $\mathbf{D}^{+}_{\mathcal{C}}(R)=\mathbf{K}^{+}(R)/\mathbf{K}^{+}_{\mathcal{CE}}(R)$.

记 $*=\{$空$,b,-,+\}$, 一般地, 在 $\mathbf{D}^{*}_{\mathcal{C}}(R)$ 中, 从 X 到 Y 的右分式是指态射图 $X\overset{s}{\Longleftarrow}\cdot\overset{a}{\longrightarrow}Y$, 其中 s 是 Clean-拟同构; 从 X 到 Y 的左分式是指态射图 $X\overset{b}{\longrightarrow}\cdot\overset{t}{\Longleftarrow}Y$, 其中 t 是 Clean-拟同构. 从 X 到 Y 的两个右分式 $X\overset{s}{\Longleftarrow}\cdot\overset{a}{\longrightarrow}Y$ 和 $X\overset{s'}{\Longleftarrow}\cdot\overset{a'}{\longrightarrow}Y$ 等价是指存

在交换图:

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "f"'] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & Y \\
 & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "s'"] \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}
$$

其中 f 是 Clean-拟同构. X 和 Y 等价是指存在态射图 $X \overset{s}{\Longleftarrow} \cdot \overset{a}{\Longrightarrow} Y$, 其中 s 和 a 都是 Clean-拟同构.

从而有局部化函子 $F^*: \mathbf{K}^*(R) \to \mathbf{D}^*_{\mathcal{C}}(R)$, 将 $\mathbf{K}^*(R)$ 中的任意链映射 $f: X \to Y$ 映到 $\mathbf{D}^*_{\mathcal{C}}(R)$ 中的态射 $F^*(f) = f/\mathrm{Id}_X$, 且 $F^*(f)$ 是 $\mathbf{D}^*_{\mathcal{C}}(R)$ 中的同构当且仅当 f 是 Clean-拟同构; 而 $F^*(f)$ 是 $\mathbf{D}^*_{\mathcal{C}}(R)$ 中的零态射, 当且仅当存在 Clean-拟同构 $g: X' \to X$, 使得 fg 同伦于零 (利用右分式), 当且仅当存在 Clean-拟同构 $h: Y \to Y'$, 使得 hf 同伦于零 (利用左分式). 复形 X 是 $\mathbf{D}^*_{\mathcal{C}}(R)$ 中的零对象, 当且仅当 X 是 $\mathbf{K}^*(R)$ 中的 Clean-正合复形.

下面的结论使得 $\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)$ 中的态射可以更好地被理解.

命题 3.2 (1) 设 $X \in \mathbf{K}^-(\mathcal{CP})$, $Y \in \mathbf{K}(R)$. 则局部化函子 F 诱导了同构

$$F: \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)}(X, Y), \quad f \mapsto f/\mathrm{Id}_X.$$

(2) 设 $X \in \mathbf{K}(R)$, $Y \in \mathbf{K}^+(\mathcal{CI})$. 则局部化函子 F 诱导了同构

$$F: \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)}(X, Y), \quad f \mapsto \mathrm{Id}_Y \setminus f.$$

证 (1) 设 $f/\mathrm{Id}_X = 0$. 则存在 Clean-拟同构 $g: Z \to X$, 使得 $fg \sim 0$. 由 $X \in \mathbf{K}^-(\mathcal{CP})$ 和命题 2.2 知, 存在 Clean-拟同构 $h: X \to Z$, 使得 $gh \sim \mathrm{Id}_X$. 故 $f \sim 0$, 即 F 是单射. 再设 $a/s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)}(X, Y)$. 再由命题 2.2 知, 存在 Clean-拟同构 $t: X \to Z$, 使得 $st \sim \mathrm{Id}_X$. 故 $a/s = at/st = at/\mathrm{Id}_X = F(at)$, 即 F 是满射. 从而 F 是同构.

对偶以上方法可证明 (2).

引理 3.1[2] 设 $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ 是三角范畴 $\mathcal{C}$ 的三角子范畴. 如果能满足以下条件之一:

(1) 任意态射 $X \to B$, 其中 $B \in \mathcal{B}$, $X \in \mathcal{D}$, 有因子分解 $X \to B' \to B$, 其中 $B' \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}$;

(2) 任意态射 $B \to Y$, 其中 $B \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{D}$, 有因子分解 $B \to B' \to Y$, 其中 $B' \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}$.

那么典范函子 $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cap \mathcal{B} \to \mathcal{C}/\mathcal{B}$ 是满忠实的, 即 $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cap \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 的全子范畴.

命题 3.3 设 R 是交换环. 则以下成立:

(1) $\mathbf{D}^+_{\mathcal{C}}(R)$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)$ 的全子范畴, $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R)$ 是 $\mathbf{D}^+_{\mathcal{C}}(R)$ 的全子范畴.

(2) $\mathbf{D}^-_{\mathcal{C}}(R)$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)$ 的全子范畴, $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R)$ 是 $\mathbf{D}^-_{\mathcal{C}}(R)$ 的全子范畴.

(3) $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R) = \mathbf{D}^-_{\mathcal{C}}(R) \bigcap \mathbf{D}^+_{\mathcal{C}}(R)$.

证 只证 $\mathbf{D}^+_{\mathcal{C}}(R)$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)$ 的全子范畴. 设 $f: B \to Y$ 是链映射, 其中 $B \in \mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$,

$Y \in \mathbf{K}^{+}(R)$. 令 $Y^i = 0, \forall i < 0$. 则 f 有以下自然的因子分解:

$$\begin{tikzcd}
B: \arrow[d] & = \cdots \arrow[r] & B^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] \arrow[d, "0"] & B^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "\widetilde{d^{-1}}"] & B^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, equal] & B^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, equal] & B^2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
B': \arrow[d] & = \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \operatorname{Im} d^{-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "0"] & B^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & B^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] & B^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"] & \cdots \\
Y & := \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Y^0 \arrow[r] & Y^1 \arrow[r] & Y^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中 $\widetilde{d^{-1}} : B^{-1} \to \operatorname{Im} d^{-1}$ 是由 d^{-1} 诱导的, 且 $d^{-1} = i\widetilde{d^{-1}}$. 由引理 3.1 知, 只需证明 B' 是 Clean-正合复形即可. 即证对任意的 $E \in \mathcal{CI}$, 有正合列

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(B^1, E) \xrightarrow{(d^0)^*} \operatorname{Hom}_R(B^0, E) \xrightarrow{i^*} \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Im} d^{-1}, E) \longrightarrow 0, \quad (3.1)$$

其中 $(-)^* = \operatorname{Hom}_R(-, E)$. 因为 $B \in \mathbf{K}_{\mathcal{CE}}(R)$, 所以有正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Im} d^{-1}, E) \xrightarrow{(\widetilde{d^{-1}})^*} \operatorname{Hom}_R(B^{-1}, E) \xrightarrow{(d^{-2})^*} \operatorname{Hom}_R(B^{-2}, E) \longrightarrow \cdots,$$

其中 $(-)^* = \operatorname{Hom}_R(-, E)$. 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {[B^1, E]} \arrow[r, "(d^0)^*"] & {[B^0, E]} \arrow[rr, "(d^{-1})^*"] \arrow[dr, "i^*"'] & & {[B^{-1}, E]} \arrow[r, "(d^{-2})^*"] & {[B^{-2}, E]} \arrow[r] & \cdots, \\
& & & {[\operatorname{Im} d^{-1}, E]} \arrow[ur, "(\widetilde{d^{-1}})^*"'] & & &
\end{tikzcd}$$

其中 $[-, E] = \operatorname{Hom}_R(-, E)$. 因为 $(d^{-1})^* = (\widetilde{d^{-1}})^* i^*$, $(\widetilde{d^{-1}})^*$ 是单射, 所以 $\operatorname{Ker} i^* = \operatorname{Ker}(d^{-1})^* = \operatorname{Im}(d^0)^*$, $\operatorname{Im} i^* \cong \operatorname{Im}(d^{-1})^* = \operatorname{Ker}(d^{-2})^* \cong \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Im} d^{-1}, E)$. 故 (3.1) 是正合的. 因此 $\mathbf{D}^{+}_{\mathcal{C}}(R)$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)$ 的全子范畴. 对偶以上方法可证明 $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R)$ 是 $\mathbf{D}^{+}_{\mathcal{C}}(R)$ 的全子范畴. 类似地可证明 (2). (3) 由 (1) 和 (2) 可得.

定理 3.1 设 R 是交换环. 则 F: R-Mod$\to \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R)$ 是嵌入函子, 即 F 是满忠实函子.

证 对任意的 X, $Y \in R$-模, 下证函子 F 诱导了同构

$$F : \operatorname{Hom}_R(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R)}(X, Y).$$

设 $f \in \operatorname{Hom}_R(X, Y)$, $F(f) = 0$, 则存在 Clean-拟同构 $s : Z \to X$, 使得 $fs \sim 0$. 于是 $\mathrm{H}^0(f)\mathrm{H}^0(s) = 0$. 因为 $\mathrm{H}^0(s)$ 是同构, 所以 $f = 0$. 从而 F 是单射. 再设 $a/s \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R)}(X, Y)$, 则有态射图 $X \overset{s}{\Longleftarrow} \cdot \overset{a}{\longrightarrow} Y$, 其中 s 是 Clean-拟同构. 于是 $\mathrm{H}^0(s) \in \operatorname{Hom}_R(\mathrm{H}^0(Z), X)$ 是 R-模中的同构. 令 $f = \mathrm{H}^0(a)\mathrm{H}^0(s)^{-1} \in \operatorname{Hom}_R(X, Y)$. 考虑 Z 的左温和截断

$$U := \ \cdots \longrightarrow Z^{-2} \xrightarrow{d_Z^{-2}} Z^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_Z^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

以及行为复形的交换图:

$$
\begin{tikzcd}
U: \arrow[d, "i"] & = \cdots \arrow[r] & Z^{-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z^{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Ker} d_Z^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
Z: \arrow[d, "s"] & = \cdots \arrow[r] & Z^{-2} \arrow[r] \arrow[d] & Z^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & Z^0 \arrow[r] \arrow[d] & Z^1 \arrow[r] \arrow[d] & Z^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
X & := \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

因为 s 是 Clean-拟同构, 所以对于任意的 $P \in \mathcal{CP}$, $\operatorname{Hom}_R(P,s) : \operatorname{Hom}_R(P,Z) \to \operatorname{Hom}_R(P,X)$ 是拟同构. 于是 $\mathrm{H}^i(\operatorname{Hom}_R(P,Z)) = \mathrm{H}^i(\operatorname{Hom}_R(P,X)) = 0$, $\forall i \geqslant 1$. 注意到 $\mathrm{H}^0(U) = \operatorname{Ker} d_Z^0/\operatorname{Im} d_Z^{-1} = \mathrm{H}^0(Z)$, 且 $\operatorname{Hom}_R(P,-)$ 保持核, 故 $i : U \to Z$ 是 Clean-拟同构. 从而 si 是 Clean-拟同构. 因此 $fsi = \mathrm{H}^0(a)H^0(s)^{-1}si = ai$, 即有如下交换图:

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X & U \arrow[l, Rightarrow, "si"'] \arrow[u, "i"] \arrow[r, "ai"] \arrow[d, "si"] & Y \\
 & X \arrow[ul, Rightarrow, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

于是 $F(f) = f/\mathrm{Id}_X = a/s$, 即 F 是满的. 因此 F 是同构.

对于任意的 $X \in \mathbf{C}(R)$, 令 $\inf_{\mathbf{c}}X := \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid X$ 在 n 处不是 Clean-正合的 $\}$, $\sup_{\mathbf{c}}X := \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid X$ 在 n 处不是 Clean-正合的 $\}$. 如果存在 $n \in \mathbb{Z}$, 使得 $\inf_{\mathbf{c}}X = n$ (或 $\sup_{\mathbf{c}}X = n$), 那么 X 在小于等于 $n-1$ 处是 Clean-正合的 (或 X 在大于等于 $n+1$ 处是 Clean-正合的). 于是, 如果 X 不是 Clean-正合复形, 那么 $\inf_{\mathbf{c}}X = -\infty$, $\sup_{\mathbf{c}}X = \infty$; 如果 X 是 Clean-正合复形, 那么 $\inf_{\mathbf{c}}X = \infty$, $\sup_{\mathbf{c}}X = -\infty$. 再令 $\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP}) := \{X \in \mathbf{K}^{-}(\mathcal{CP}) \mid \inf_{\mathbf{c}}X$ 有限 $\}$, $\mathbf{K}^{+,\mathrm{cb}}(\mathcal{CI}) := \{X \in \mathbf{K}^{+}(\mathcal{CI}) \mid \sup_{\mathbf{c}}X$ 有限 $\}$.

命题 3.4 设 X, $Y \in \mathbf{C}(R)$. 则以下成立:

(1) X 在大于等于 n 处是 Clean-正合的, 当且仅当对于任意的 $P \in \mathcal{CP}$, $\operatorname{Hom}_R(P,X)$ 在大于等于 n 处是正合的.

(2) X 在小于等于 n 处是 Clean-正合的, 当且仅当对于任意的超有限表现 R-模 M, $M \otimes_R X$ 在小于等于 n 处是正合的.

(3) 若链映射 $f : X \to Y$ 是 Clean-拟同构, 则 $\inf_{\mathbf{c}}X = \inf_{\mathbf{c}}Y$, $\sup_{\mathbf{c}}X = \sup_{\mathbf{c}}Y$.

(4) $\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$ 和 $\mathbf{K}^{+,\mathrm{cb}}(\mathcal{CI})$ 分别是 $\mathbf{K}^{-}(\mathcal{CP})$ 和 $\mathbf{K}^{+}(\mathcal{CI})$ 的三角子范畴.

证 (1) 和 (2) 分别由注 2.1 和定理 1.1 可得结论.

(3) 设链映射 $f : X \to Y$ 是 Clean-拟同构, $\inf_{\mathbf{c}}X = n$, $n \in \mathbb{Z}$. 则 X 在小于等于 $n-1$ 处是 Clean-正合的. 由 (2) 知, X 在小于等于 $n-1$ 处是 Clean-正合的当且仅当对任意的超有限表现 R-模 M, $M \otimes_R X$ 在小于等于 $n-1$ 处是正合的. 因为链映射 $f : X \to Y$ 是 Clean-拟同构, 所以 $\mathrm{H}^i(M \otimes_R Y) \cong \mathrm{H}^i(M \otimes_R X) = 0$, $\forall i \leqslant n-1$. 故 Y 在小于等于 $n-1$ 处是 Clean-正合的. 从而 $\inf_{\mathbf{c}}Y = n$. 类似地可证明 $\sup_{\mathbf{c}}X = \sup_{\mathbf{c}}Y$.

(4) 下证 $\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$ 是 $\mathbf{K}^{-}(\mathcal{CP})$ 的三角子范畴. 显然 $\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$ 对同构和平移封闭,

只需证 $\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$ 对扩张封闭即可. 设

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

是 $\mathbf{K}^{-}(\mathcal{CP})$ 中的好三角, $X,\ Z \in \mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$. 则对任意的超有限表现 R-模 M, 有 $\mathbf{K}(R)$ 中的三角

$$M \otimes_R X \longrightarrow M \otimes_R Y \longrightarrow M \otimes_R Z \longrightarrow M \otimes_R X[1]\ .$$

令 $n = \min\{\inf_{\mathbf{c}} X,\ \inf_{\mathbf{c}} Z\}$, 则 $X,\ Z$ 在小于等于 $n-1$ 处是 Clean-正合的. 从而 $\mathrm{H}^i(M \otimes_R X) = 0$, $\mathrm{H}^i(M \otimes_R Z) = 0$, $\forall i \leqslant n-1$. 由文 [14, 定理 2.4.1] 知, $\mathrm{H}^i(M \otimes_R Y) = 0$, $\forall i \leqslant n-1$. 故 $Y \in \mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$. 因此 $\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$ 是 $\mathbf{K}^{-}(\mathcal{CP})$ 的三角子范畴. 类似地可证明 $\mathbf{K}^{+,\mathrm{cb}}(\mathcal{CI})$ 也是 $\mathbf{K}^{+}(\mathcal{CI})$ 的三角子范畴.

命题 3.5 (1) 存在加法函子 $\rho : \mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R) \to \mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$ 右伴随于嵌入函子 $i : \mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP}) \to \mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)$, 使得对任意的 $X \in \mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)$, 存在 Clean-拟同构 $f_X : \rho X \to X$; 并且对任意的 $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)}(X, Y)$, 有同伦交换图:

$$\begin{array}{ccc}
\rho X & \xrightarrow{\rho f'} & \rho Y \\
{\scriptstyle f_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_Y} \\
X & \xrightarrow{f'} & Y
\end{array}$$

(2) 上述函子 ρ 是三角函子.

证 (1) 对于任意的 $X \in \mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)$, 令 $\omega(X) = \{i \in \mathbb{Z} \mid X^i \neq 0\}$. 对 $\omega(X)$ 用数学归纳. 当 $\omega(X) = 1$ 时, X 是 R-模, 由引理 1.2(1) 知, 每一个 R-模都有一个 Clean-投射预覆盖, 故可得结论. 假设 $< n$ 时, 结论成立. 考虑 $n (n \geqslant 2)$ 的情况, 设 $X^j \neq 0$, $X^i = 0$, $\forall i < j$. 则复形

$$X: \quad = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^j \longrightarrow X^{j+1} \longrightarrow X^{j+2} \longrightarrow \cdots .$$

令复形 $X_1 = X^j[-j-1]$, $X_2 = X^{>j}$. 考虑交换图:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
X_1: & = \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^j & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle u} & & & \| & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
X_2: & = \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^{j+1} & \longrightarrow & X^{j+2} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & & \| & & \downarrow & & \| & & \| & & \\
X & := \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^j & \longrightarrow & X^{j+1} & \longrightarrow & X^{j+2} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & & \| & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
X_1[1]: & = \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^j & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

则 $X_2 \to X \to X_1[1]$ 是复形的链可裂短正合列. 于是有 $\mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)$ 中的好三角

$$X_2 \longrightarrow X \longrightarrow X_1[1] \xrightarrow{-u[1]} X_2[1],$$

将其按逆时针旋转可得 $\mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)$ 中的好三角

$$X_1 \xrightarrow{u} X_2 \longrightarrow X \longrightarrow X_1[1].$$

故由归纳假设知, 存在 Clean-拟同构 $f_{X_1}:\rho X_1\to X_1$, $f_{X_2}:\rho X_2\to X_2$, 其中 ρX_1, $\rho X_2\in\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$. 从而由命题 2.1 知有同构 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho X_1,\rho X_2)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho X_1,X_2)$. 于是存在 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho X_1,\rho X_2)$, 使得 $f_{X_2}f=uf_{X_1}$. 从而有 $\mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)$ 中的好三角

$$\rho X_1\xrightarrow{f}\rho X_2\longrightarrow\mathrm{Cone}(f)\longrightarrow\rho X_1[1].$$

注意到 ρX_1, $\rho X_2\in\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$, 故由命题 3.4 知, $\mathrm{Cone}(f)\in\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$. 考虑行为好三角的图:

$$\begin{tikzcd}
\rho X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_{X_1}"'] & \rho X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_{X_2}"'] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \rho X_1[1] \arrow[d, "f_{X_1}[1]"'] \\
X_1 \arrow[r, "u"] & X_2 \arrow[r] & X \arrow[r] & X_1[1]
\end{tikzcd}$$

由左边第一个方块交换和文 [14, 定义 1.1.1(TR3)] 知, 存在 $f_X:\mathrm{Cone}(f)\to X$, 使得上图交换, 其中 $\mathrm{Cone}(f)\in\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$. 于是对于任意的 $P\in\mathcal{CP}$, 有交换图:

$$\begin{tikzcd}
{[P,\rho X_1]} \arrow[r] \arrow[d, "(f_{X_1})_*"'] & {[P,\rho X_2]} \arrow[r] \arrow[d, "(f_{X_2})_*"'] & {[P,\mathrm{Cone}(f)]} \arrow[r] \arrow[d, "(f_X)_*"'] & {[P,\rho X_1[1]]} \arrow[d, "(f_{X_1}[1])_*"'] \\
{[P,X_1]} \arrow[r] & {[P,X_2]} \arrow[r] & {[P,X]} \arrow[r] & {[P,X_1[1]]}
\end{tikzcd}$$

其中 $[P,-]=\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(P,-)$, $(-)_*=\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(P,-)$. 因为 f_{X_1}, f_{X_2} 都是 Clean-拟同构, 所以由注 2.2 和文 [14, 定理 2.4.1] 及五引理知, f_X 是 Clean-拟同构. 令 $\rho X=\mathrm{Cone}(f)$. 于是可得 Clean-拟同构 $f_X:\rho X\to X$, 其中 $\rho X\in\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$. 再设 X, $Y\in\mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)$, $f':X\to Y$ 是链映射, 则有 Clean-拟同构 $f_X:\rho X\to X$, $f_Y:\rho Y\to Y$, 其中 ρX, $\rho Y\in\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$. 由命题 2.1 知, 存在同构 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho X,\rho Y)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho X,Y)$. 于是存在 $\rho f'\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho X,\rho Y)$, 使得 $f_Y\rho f'=f'f_X$, 即有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
\rho X \arrow[r, "\rho f'"] \arrow[d, "f_X"'] & \rho Y \arrow[d, "f_Y"'] \\
X \arrow[r, "f'"] & Y
\end{tikzcd}$$

(2) 设

$$X\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\beta}Z\xrightarrow{\gamma}X[1]$$

是 $\mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)$ 中的好三角. 下证

$$\rho X\xrightarrow{\rho\alpha}\rho Y\xrightarrow{\rho\beta}\rho Z\xrightarrow{\rho\gamma}(\rho X)[1]$$

是 $\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$ 中的好三角. 考虑 $\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$ 中的好三角

$$\rho X\xrightarrow{\rho\alpha}\rho Y\xrightarrow{\nu}\mathrm{Cone}(\rho\alpha)\xrightarrow{\omega}(\rho X)[1]\ .$$

因为存在三角射 (f_X, f_Y, f):

$$\begin{tikzcd} \rho X \arrow[r, "\rho\alpha"] \arrow[d, "f_X"'] & \rho Y \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "f_Y"'] & \mathrm{Cone}(\rho\alpha) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "f"'] & (\rho X)[1] \arrow[d, "f_X[1]"'] \\ X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r, "\beta"] & Z \arrow[r, "\gamma"] & X[1] \end{tikzcd}$$

且 f_X, f_Y 都是 Clean-拟同构, 所以 f 也是 Clean-拟同构. 故可得同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho Z, f) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho Z, \mathrm{Cone}(\rho\alpha)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho Z, Z).$$

从而存在 $u : \rho Z \to \mathrm{Cone}(\rho\alpha)$, 使得 $f_Z \sim fu$. 注意到 f, f_Z 都是 Clean-拟同构, 其中 $f_Z : \rho Z \to Z$, 故 u 也是 Clean-拟同构. 而 $\mathrm{Cone}(\rho\alpha)$, $\rho Z \in \mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$, 于是由引理 2.1 知, u 是同伦等价. 考虑行为好三角的图:

$$\begin{tikzcd} \rho X \arrow[r, "\rho\alpha"] \arrow[d, equal] & \rho Y \arrow[r, "\rho\beta"] \arrow[d, equal] & \rho Z \arrow[r, "\rho\gamma"] \arrow[d, "u"'] & (\rho X)[1] \arrow[d, equal] \\ \rho X \arrow[r, "\rho\alpha"] & \rho Y \arrow[r, "\nu"] & \mathrm{Cone}(\rho\alpha) \arrow[r, "\omega"] & (\rho X)[1] \end{tikzcd}$$

由同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho Y, f) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho Y, \mathrm{Cone}(\rho\alpha)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(\rho Y, Z),$$

以及 $f\nu = \beta f_Y = f_Z(\rho\beta) = fu(\rho\beta)$ 知, $\nu = u(\rho\beta)$. 同理可证 $\rho\gamma = \omega u$. 故上图交换. 因此 ρ 是三角函子.

对偶地有以下结论.

命题 3.6 (1) 存在加法函子 $\sigma : \mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R) \to \mathbf{K}^{+,\mathrm{cb}}(\mathcal{CI})$ 左伴随于嵌入函子 $\varepsilon : \mathbf{K}^{+,\mathrm{cb}}(\mathcal{CI}) \to \mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)$, 使得对任意的 $X \in \mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)$, 存在 Clean-拟同构 $g_X : X \to \sigma X$; 并且对任意的 $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^{\mathrm{b}}(R)}(X, Y)$, 有同伦交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g_X"'] & Y \arrow[d, "g_Y"'] \\ \sigma X \arrow[r, "\sigma g'"] & \sigma Y \end{tikzcd}$$

(2) 上述函子 σ 是三角函子.

定理 3.2 设 R 是交换环. 则存在以下三角等价:
(1) $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R) \simeq \mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$.
(2) $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R) \simeq \mathbf{K}^{+,\mathrm{cb}}(\mathcal{CI})$.

证 (1) 考虑合成函子 $H : \mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP}) \hookrightarrow \mathbf{K}^{-}(R) \xrightarrow{F} \mathbf{D}^{-}_{\mathcal{C}}(R)$, 其中 F 是局部化函子. 对任意的 $X \in \mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$, 不妨设 $\inf_{\mathbf{c}} X = n$, $n \in \mathbb{Z}$, 则 X 在小于等于 $n-1$ 处是 Clean-正合的. 考虑 X 的右温和截断

$$V := \ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, d_X^{n-1} \longrightarrow X^{n+1} \longrightarrow X^{n+2} \longrightarrow \cdots,$$

以及行为复形的交换图:

$$
\begin{tikzcd}
X := \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{n} \arrow[r] \arrow[d] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
V := & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} d_X^{n-1} \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

因为对于任意的超有限表现 R-模 M, $M\otimes_R$-保持余核, 所以链映射 f 是 Clean-拟同构. 于是在 $\mathbf{D}_{\mathcal{C}}(R)$ 中有 $H(X)\cong V$. 事实上, $H(X)\in\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R)$. 由命题 3.2 和命题 3.5 知, 函子 H 是满忠实且稠密的. 故有三角等价 $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{C}}(R)\simeq\mathbf{K}^{-,\mathrm{cb}}(\mathcal{CP})$.

对偶以上方法可证明 (2).

参　考　文　献

[1] Hartshorne R. Residue and Duality [M]//Lecture Notes in Mathematics, Vol 20, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1966.

[2] Gao N, Zhang P. Gorenstein derived categories [J]. *Journal of Algebra*, 2010, 323(7):2041–2057.

[3] Ren W, Liu Z K, Yang G. Derived categories with respect to Ding modules [J]. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2013, 12(6):1350021 (14 pages).

[4] Di Z X, Zhang X X, Ren W. Relative derived categories with respect to subcategories [J]. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2016, 15(6):1650108 (17 pages).

[5] Gillespie J. The derived category with respect to a generator [J]. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 2016, 195(52):371–402.

[6] Emmanouil I. On pure acyclic complexes [J]. *Journal of Algebra*, 2016, 456:190–213.

[7] Zheng Y F, Huang Z Y. On pure derived categories [J]. *Journal of Algebra*, 2016, 454:252–272.

[8] Bravo D, Gillespie J, Hovey M. The stable module category of a general ring [J/OL]. arXiv:1405.5768v1, 2014.

[9] Bravo D, Perezb M A. Finiteness conditions and cotorsion pairs [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2017, 221(6):1249–1267.

[10] Bravo D, Gillespie J. Absolutely clean, level, and Gorenstein AC-injective complexes [J]. *Communications in Algebra*, 2016, 44(5):2213–2233.

[11] Gao Z H, Wang F G. Weak injective and weak flat modules [J]. *Communications in Algebra*, 2015, 43(9):3857–3868.

[12] Rotman J J. An Introduction to Homological Algebra [M]. 2nd edition, Universitext, New York: Springer-Verlag, 2009, 146–149.

[13] Enochs E E, Jenda O M G. Relative Homological Algebra [M]//de Gruyter Expositions in Mathematics, Vol 30, Berlin: Water de Gruyter and Co., 2000.

[14] 章璞. 三角范畴与导出范畴 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[15] Christensen L W, Frankid A, Holm H. On Gorenstein projective, injective and flat dimensions-a functorial description with applications [J]. *Journal of Algebra*, 2006, 302(1):231–279.

Clean Exactness and Derived Categories

LI Ruiting[1] YANG Gang[2] WANG Xiaoqing[1]

[1]School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China. E-mail: liruiting1993@163.com; wxq647982@163.com

[2]Corresponding author. School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China. E-mail: yanggang@mail.lzjtu.cn

Abstract Over a commutative ring, the notions of clean exactness and clean derived categories are introduced, the equivalent characterizations of clean exactness for short exact sequences and exact complexes are given, and the properties of clean derived categories are investigated. In particular, it is proved that bounded clean derived categories can be realized as certain homotopy categories.

Keywords Clean exact complexes, Clean projective modules, Clean injective modules, Clean derived categories

2010 MR Subject Classification 18E10, 18E30, 18G25, 18G35

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 3, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA