数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(3):325–334
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0024

一类无穷下级整函数的 Julia 集的径向分布*

邱 玲[1] 玄祖兴[2] 赵 岩[1]

提要 主要研究方程 $f''(z)+A(z)f'(z)+B(z)f(z)=0$ ($A(z),B(z)$ 为整函数) 的解、解的多项式或微分多项式这些具有无穷下级的整函数的 Julia 集的径向分布问题.

关键词 极限方向, Julia 集, 下级
MR (2000) 主题分类 30D35, 34M05, 37F10
中图法分类 O153.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)03-0325-10

1 引 言

在本文中, 亚纯函数表示在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上亚纯. 假定读者熟悉 Nevanlinna 值分布理论的常用记号和基本定理[1−3]. 对于一个亚纯函数 $f(z)$, 我们用 $\rho(f)$ 和 $\mu(f)$ 分别表示它的级和下级, $\delta(a,f)$ 表示 f 在点 a 的亏值.

下面给出亚纯函数动力系统的一些简单介绍[4−5]. 用 $f^n, n\in\mathbb{N}$ 表示 f 的 n 次迭代, 即 $f^1=f,\cdots,f^n=f\circ(f^{n-1})$. f 的 Fatou 集 $F(f)$ 是满足 $\{f^n\}$ 在点 z 有定义且正规的点 z 的集合. $F(f)$ 是开集, 且在 f 的作用下是完全不变的. 集合 $J(f)=\mathbb{C}\setminus F(f)$ 称为 f 的 Julia 集.

设 $0<\alpha<\beta<2\pi$, 记 $\Omega(\alpha,\beta)=\{z\in\mathbb{C}\mid \arg z\in(\alpha,\beta)\}$. 给定 $\theta\in[0,2\pi)$, 对任意 $\varepsilon>0$, 若 $\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)\cap J(f)$ 是无界的, 则称 $\arg z=\theta$ 是 $J(f)$ 的极限方向. 定义

$$\Delta(f)=\{\theta\in[0,2\pi):\ \arg z=\theta\ \text{是}J(f)\text{的极限方向}\}.$$

$\Delta(f)$ 是闭集, 因此它是可测的. 我们用 $\operatorname{mes}\Delta(f)$ 表示 $\Delta(f)$ 的线测度.

近年来, 大量学者对微分方程亚纯解的性质进行了研究[6−10]. 1994 年, 乔建永[11]证明了下级 $\mu<\infty$ 的超越整函数 f, 其极限方向的集合 $\Delta(f)$, 满足 $\operatorname{mes}\Delta(f)\geqslant\frac{\pi}{\max\{\frac{1}{2},\mu\}}$. 郑建华[12]、邱玲和伍胜健[13]对于下级小于无穷的超越亚纯函数的 Julia 集的径向分布得到了类似的结论. 在他们的证明中需要用到一个重要的结果, 就是亚纯函数值分布论中的展布关系的特殊情形, 所以要求下级小于无穷. 那么, 对于下级为无穷的超越整函数, 其极限方向的集合的测度又是如何估计呢?

本文 2017 年 5 月 31 日收到, 2018 年 7 月 24 日收到修改稿.
[1]北京工业大学应用数理学院, 北京 100124. E-mail: qiuling1978@bjut.edu.cn
[2]通信作者. 北京联合大学基础部 北京市信息服务工程重点实验室 高铁经济研究院, 北京 100101.
E-mail: zuxingxuan@163.com
*本文受到北京市优秀人才培养资助青年拔尖个人项目、北京市属高校高水平教师队伍建设支持计划项目 (IDHT20170511) 和北京联合大学人才强校优选计划 (BPHR2018CZ09) 的资助.

最近, 黄志刚和王珺[6−8]考虑了具有无穷下级的亚纯函数的径向分布, 他们的结果如下.

定理 A [6] 假设 $A_i(z)(z=0,1,\cdots,n-1)$ 是具有有限下级的整函数, 其中 A_0 是超越的, 如果 $m(r,A_i)=o(m(r,A_0))$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$, 那么对于方程

$$f^{(n)}+A_{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+A_0f=0 \tag{1.1}$$

的任意解 $f\not\equiv 0$, 有 $\operatorname{mes}\Delta(f)\geqslant\min\left\{2\pi,\frac{\pi}{\mu(A_0)}\right\}$.

定理 B [7] 令 $0<c<1$ 为一个常数, 那么对于方程

$$f''(z)+\mathrm{e}^{cz}f'(z)+\mathrm{e}^{z}f(z)=0 \tag{1.2}$$

的每一个解 $f\not\equiv 0$, 有 $\operatorname{mes}\Delta(f)\geqslant\pi$.

定理 A 研究了具有一个控制系数的线性微分方程解的 Julia 集的径向分布情况. 定理 B 给出了当系数具有同样的等于 1 的级时解的相关性质. 这样, 便产生了问题: 当控制系数不止一个时, 方程解的 Julia 集的径向分布如何? 当线性微分方程方程系数的级相同但比 1 大时, 解的 Julia 集的径向分布又是什么样的呢?

定理 C [8] 假设 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 为方程

$$f^{(n)}+A(z)f=0,\quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2 \tag{1.3}$$

的一个基解, 那么

$$\operatorname{mes}\Delta(E)\geqslant\left\{2\pi,\frac{\pi}{\rho(A)}\right\},$$

其中 $E=f_1f_2\cdots f_n$.

定理 C 证明了方程 (1.3) 的线性无关解的乘积的 Julia 集的极限方向的集合具有一个正的下确界. 那么我们想知道: 该方程解的多项式或微分多项式的 Julia 集的径向分布又是如何呢？

本文将给出以上问题的答案及证明. 我们将考虑以下方程:

$$f''(z)+A(z)f'(z)+B(z)f(z)=0. \tag{1.4}$$

在陈述结论之前, 我们回想一下 $h(z)$, ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 以及 $H(z)$ 的定义[11−12].

$$\begin{aligned}h={}&2(d_1d_2'-d_2d_1')^2B+(d_2^2d_1'd_1''+d_1^2d_2'd_2''-d_1d_2d_1'd_2''-d_1d_2d_2'd_1'')A-2(d_1d_2'-d_2d_1')^2A'\\&+2d_1d_2d_1'd_2'''+2d_1d_2d_2'd_1'''-6d_1d_2d_1''d_2''-6d_1d_1'd_2'd_2''-6d_2d_1'd_2'd_1''+6d_1(d_1')^2d_2''\\&-2d_2^2d_1'd_1'''-2d_1^2d_2'd_2'''+3d_1^2(d_2'')^2+3d_2^2(d_1'')^2,\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}\phi_0={}&\frac{1}{h}[(d_1d_2'd_2''-3d_2d_2'd_1''+2d_2d_1'd_2'')A+(4d_1(d_2')^2+3d_2^2d_1''-3d_1d_2d_2''-4d_2d_1'd_2')B\\&+2(d_1d_2d_2'-d_2^2d_1')B'+6(d_2')^2d_1''-2d_1d_2'd_2'''+2d_2d_1'd_2'''-3d_2d_1''d_2''-6d_1'd_2'd_2''\\&+3d_1(d_2'')^2],\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\phi_1=\frac{1}{h}[6d_2(d_1'd_2''-d_2'd_1'')+2d_2(d_1d_2'-d_2d_1')B+2d_2(d_1d_2'-d_2d_1')A'$$

$$+ 3d_2(d_2d_1'' - d_1d_2'')A], \tag{1.7}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{h}[2(d_1d_2d_2' - d_2^2d_1')A - 3d_1d_2d_2'' + 3d_2^2d_1''], \tag{1.8}$$

其中 d_1, d_2 为两个有穷级的整函数.

$$H = -k_2^2B^2 - k_0k_2A^2 + (-k_2k_1 + k_1'k_2 + 2k_0k_2 - k_1^2)B + (k_2'k_0 - k_2k_0' + k_0k_1)A + k_1k_2AB$$
$$- k_1k_2B' + k_0k_2A' + k_2^2B'A - k_2^2BA' + k_0'k_1 - k_0k_1' - k_0^2, \tag{1.9}$$

其中 $k_j(j = 1, 2, 3)$ 是有穷级整函数.

本文的主要结果如下.

定理 1.1 令 $A(z) = \mathrm{e}^{cz^2+dz}$, $B(z) = \mathrm{e}^{z^2+z}$, 其中 $0 < c < 1$ 和 $-\infty < d < +\infty$ 为两个常数. 那么方程 (1.4) 的每一个非平凡解 f 满足 $\mathrm{mes}\Delta(f) \geqslant \frac{\pi}{2}$.

定理 1.2 假设 $A(z), B(z), d_j(z)$ $(j = 1, 2)$ 是有限级整函数, $B(z)$ 为超越的, $d_j(z)$ $(j = 1, 2)$ 不恒为零, 且 $\rho = \max\{\rho(A), \rho(d_1), \rho(d_2)\} < \rho(B)$. 如果 f_1 和 f_2 为方程 (1.4) 的两个非平凡的线性无关的解, 那么解的多项式 $w = d_1f_1 + d_2f_2$ 满足: $\mu(w) = \infty$ 和 $\mathrm{mes}\,\Delta(w) \geqslant \min\left\{2\pi, \frac{\pi}{\mu(B)}\right\}$.

定理 1.3 令 $A(z), B(z), k_j(z)$ $(j = 0, 1, 2)$ 为有限级整函数且 $B(z)$ 是超越的, $k_j(z)$ $(j = 0, 1, 2)$ 不恒为零, $\max\{\rho(k_j) : j = 0, 1, 2\} < \rho(A) < \rho(B)$. 如果 f 是方程 (1.4) 的一个非平凡解, 那么微分多项式 $g_f = k_2f'' + k_1f' + k_0f$ 满足: $\mu(g_f) = \infty$ 和 $\mathrm{mes}\,\Delta(g_f) \geqslant \min\{2\pi, \frac{\pi}{\mu(B)}\}$.

2 预备知识

本部分将给出后续证明过程中需要的几个引理.

引理 2.1 [4,8] 设 $f : \Omega^*(r_0, \theta_1, \theta_2) \to U$ 是解析的, 其中 U 是双曲的. 如果存在一个点 $a \in \partial U \setminus \infty$, 使得 $C_U(a) > 0$, 那么一定存在一个常数 $d > 0$, 使得对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$|f(z)| = O(|z|^d), \quad z \to \infty,\ z \in \Omega^*(r_0, \theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon).$$

引理 2.2 [7] 假设 $z = r\exp(\mathrm{i}\phi)$, $r_0 + 1 < r$, $\alpha \leqslant \phi \leqslant \beta$, 其中 $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$. 令 $n \geqslant 2$ 是一个整数, $f(z)$ 在 $\Omega(r_0, \alpha, \beta)$ 上解析, 且 $\sigma_{\alpha,\beta}(f) < \infty$. 设 $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, 那么对于每一个 $\varepsilon_j \in (0, \frac{\beta_j - \alpha_j}{2}(j = 1, 2, \cdots, n-1))$, 其中 $\alpha_j = \alpha + \sum\limits_{\beta=1}^{j-1}\varepsilon_s$, $\beta_j = \beta - \sum\limits_{s=1}^{j-1}\varepsilon_s$, 存在只依赖于 $f, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 和 $\Omega(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$, 但不依赖于 z 的两个常数 $K > 0$ 和 $M > 0$, 使得除去一个线性测度为零的集合后,

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant Kr^M\Big(\sin k(\phi - \alpha)\prod_{j=1}^{n-1}\sin k_{\varepsilon_j}(\phi - a_j)\Big)^{-2}$$

成立, 其中 $\sigma_{\alpha,\beta}$ 表示 Nevanlinna 特征函数在角域中的级, $k = \frac{\pi}{\beta - \alpha}$ 且 $k_{\varepsilon_j} = \frac{\pi}{(\beta_j - \alpha_j)}$ $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$.

引理 2.3 [1] 令 $f(z)$ 是一个具有正级和有限下级的超越亚纯函数, 且有一个亏值 $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. 那么对于级为 $\sigma>0$, $\mu(f)\leqslant\sigma\leqslant\rho(f)$ 的 Pólya 峰 r_n 和任何正函数 $\Gamma(r)\to0(r_n\to\infty)$, 有

$$\liminf_{r_n\to\infty}\operatorname{mes}D_\Gamma(r_n,a)\geqslant\min\Big\{2\pi,\frac{4}{\sigma}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}}\Big\},$$

其中

$$D_\Gamma(r,a)=\Big\{\theta\in[-\pi,\pi):\log^+\frac{1}{|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-a|}>\Gamma(r)T(r,f)\Big\},\quad a\in\mathbb{C},$$
$$D_\Gamma(r,\infty)=\{\theta\in[-\pi,\pi):\log^+|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|>\Gamma(r)T(r,f)\}.$$

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 已经知道方程 (1.4) 的每一个非平凡解都是具有无穷下级的整函数[7].

现在, 假设 $\operatorname{mes}\Delta(f)<\frac{\pi}{2}$. 因此 $\zeta=\frac{\pi}{2}-\operatorname{mes}\Delta(f)>0$. 因为 $\Delta(f)$ 是闭的, 所以 $S=(0,2\pi)\setminus\Delta(f)$ 为开的, 这样它是由至多可数多个开区间组成的. 我们可以选择有限多个开区间 $I_i=(\alpha_i,\beta_i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 满足 $[\alpha_i,\beta_i]\subset S$ 和 $\operatorname{mes}\Big(S\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i\Big)<\frac{\zeta}{8}$. 对于角域 $\Omega(\alpha_i,\beta_i)$, 当 r 充分大时, 易知

$$(\alpha_i,\beta_i)\cap\Delta(f)=\emptyset,\quad \Omega^*(r,\alpha_i,\beta_i)\cap J(f)=\emptyset.$$

这就意味着, 对于每一个 $i=1,2,\cdots,m$, 都存在相对应的 r_i 和 $F(f)$ 的无界分支 U_i, 使得 $\Omega^*(r,\alpha_i,\beta_i)\subset U_i$ 成立. 接下来, 取 ∂U_i 的一个无界的连通分支 J_i, 那么, 映射 $f:\Omega^*(r,\alpha_i,\beta_i)\to\mathbb{C}\setminus J_i$ 是解析的. 因为 $\mathbb{C}\setminus J_i$ 是单连通的, 所以对于任意的 $a\in J_i\setminus\{\infty\}$, 我们有 $C_{\mathbb{C}\setminus J_i}(a)\geqslant\frac12$. 在每一个 $\Omega^*(r,\alpha_i,\beta_i)$ 上对 w 应用引理 2.1, 存在一个正常数 d, 使得对于任何 $z\in\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Omega^*(r,\alpha_i+\varepsilon,\beta_i-\varepsilon)$, 有

$$|f(z)|=O(|z|^d),\quad |z|\to\infty,\tag{3.1}$$

其中 $0<\varepsilon<\min\big\{\frac{\zeta}{16m},\frac{\beta_i-\alpha_i}{8},i=1,2,\cdots,m\big\}$. 由 $S_{\alpha,\beta}(r,f)$ 的定义, 易见

$$S_{\alpha_i+\varepsilon,\beta_i-\varepsilon}(r,f)=O(1).\tag{3.2}$$

因此通过引理 2.2, 存在两个常数 $M>0$ 和 $K>0$, 使得

$$\Big|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\Big|\leqslant Kr^M,\quad s=1,2\tag{3.3}$$

对所有的 $z\in\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Omega(\alpha_i+2\varepsilon,\beta_i-2\varepsilon)\setminus H$ 成立, 这里 H 是一个 R 集. 因为 $B(z)$ 是一个整函数, 这样 $\delta(\infty,B)=1$. 通过引理 2.3, 对于级 $\mu(B)$ 的 Pólya 峰 $\{r_j\}$ $(r_j\notin|z|,z\in H)$, 有

$$\liminf_{r_j\to\infty}\operatorname{mes}(D_\Gamma(r_j,\infty))\geqslant\frac{\pi}{2},\tag{3.4}$$

其中 $\Gamma(r)=(\log r)^{-1}$. 那么对于充分大的 j, 有

$$\operatorname{mes}(D_\Gamma(r_j,\infty))>\frac{\pi}{2}-\frac{\zeta}{4}. \tag{3.5}$$

为方便起见, 下面使用 $D(r_j)$ 表示 $D_\Gamma(r_j,\infty)$. 很明显,

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}(D(r_j)\cap S)&=\operatorname{mes}(D(r_j)\setminus(\Delta(f)\cap D(r_j)))\\&\geqslant \operatorname{mes}(D(r_j))-\operatorname{mes}\Delta(f)>\frac{3\zeta}{4}>0.\end{aligned} \tag{3.6}$$

那么, 对于每一个 j, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{m}I_i\Big)\cap D(r_j)\Big)&=\operatorname{mes}(S\cap D(r_j))-\operatorname{mes}\Big(\Big(S\setminus\bigcup_{i=1}^{m}I_i\Big)\cap D(r_j)\Big)\\&>\frac{3\zeta}{4}-\frac{\zeta}{4}=\frac{\zeta}{2}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

这样, 存在一个开区间 $I_{i_0}=(\alpha,\beta)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i\subset S$, 使得对于无穷多的 j, 都有

$$\operatorname{mes}(D(r_j)\cap(\alpha,\beta))>\frac{\zeta}{2m}>0. \tag{3.8}$$

不失一般性, 假设 (3.8) 对所有的 j 都成立. 下面将使用符号

$$\begin{aligned}&T^+=\Big[0,\frac{\pi}{4}\Big)\cup\Big(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\Big)\cup\Big(\frac{7\pi}{4},2\pi\Big),\\&T^-=[0,2\pi)-T^+.\end{aligned}$$

令 $F_j=D(r_j)\cap(\alpha+2\varepsilon,\beta-2\varepsilon)$, $F_j^+=F_j\cap T^+$, $F_j^-=F_j\cap T^-$. 接下来分两种情况证明.

情况 1　当 $j\to\infty$ 时, $\operatorname{mes}(F_j^-)\to 0$. 因此当 $j\to\infty$ 时,

$$\int_{F_j}\log^+|\exp(r_j^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta\to r_j^2\int_{F_j^+}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta+r_j\int_{F_j}\cos\theta\mathrm{d}\theta. \tag{3.9}$$

从 (1.4) 和 (3.3) 中, 可以得到

$$\begin{aligned}&r_j^2\int_{F_j^+}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta+r_j\int_{F_j}\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&\leqslant\int_{F_j}\Big(\sum_{i=1}^{2}\log^+\Big|\frac{f^{(i)}(r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{f(r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\Big|+\log^+|\exp(cr_j^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+dr_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\Big)\mathrm{d}\theta+O(1)\\&\leqslant cr_j^2\int_{F_j^+}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta+dr_j\int_{F_j}\cos\theta\mathrm{d}\theta+O(\log r_j).\end{aligned} \tag{3.10}$$

由 (3.8), 有 $\operatorname{mes}(F_j^+)>\frac{\zeta}{2m}-4\varepsilon$, 那么当取 ε 充分小时,

$$\int_{F_j^+}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\geqslant 4\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\zeta}{8m}-\varepsilon}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=2\Big[1-\cos\Big(\frac{\zeta}{4m}-2\varepsilon\Big)\Big]>2\Big(1-\cos\frac{\zeta}{8m}\Big).$$

因为 $0<c<1$, (3.10) 产生矛盾.

情况 2　当 $j\to\infty$ 时, $\operatorname{mes}(F_j^-)\not\to 0$. 根据 $\mathbf{D}(r_j)$ 的定义, 有

$$\int_{F_j^-}\log^+|\exp(r_j^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta\geqslant\operatorname{mes}(F_j^-)\frac{r_j^2+r_j}{\pi}(\log r_j)^{-1}. \tag{3.11}$$

再由 (1.4) 和 (3.3), 有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mes}(F_j^-)\frac{r_j^2+r_j}{\pi}(\log r_j)^{-1}+r_j^2\int_{F_j^+}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta+r_j\int_{F_j}\cos\theta\mathrm{d}\theta\\
\leqslant&\int_{F_j}\log^+|B(r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta\\
\leqslant&\int_{F_j}\Big(\sum_{i=1}^{2}\log^+\Big|\frac{f^i(r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{f(r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\Big|+\log^+|A(r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\Big)\mathrm{d}\theta+O(1)\\
\leqslant&\, cr_j^2\int_{F_j^+}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta+dr_j\int_{F_j}\cos\theta\mathrm{d}\theta+O(\log r_j).
\end{aligned}\tag{3.12}$$

这便意味着

$$\operatorname{mes}(F_j^-)\frac{r_j^2+r_j}{\pi}(\log r_j)^{-1}\leqslant(c-1)r_j^2\int_{F_j^+}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta+(d-1)r_j\int_{F_j}\cos\theta\mathrm{d}\theta+O(\log r_j),$$

这样当 $j\to\infty$ 时, $\operatorname{mes}(F_j^-)\to 0$. 这是不可能的. 证毕.

定理 1.2 的证明 假设 f_1,f_2 是方程 (1.4) 的两个线性无关的解, 且

$$w=d_1f_1+d_2f_2.\tag{3.13}$$

我们已经知道 f_1 和 f_2 是两个具有无穷下级的整函数. 假设 $d_1=cd_2$, 其中 c 是一个复数. 那么由 (3.13), 可以得到 $w=(cf_1+f_2)d_2$, 因为 $f=cf_1+f_2$ 为 (1.4) 的一个解且 $\rho(d_2)<\rho(B)$, 这样 $\mu(w)=\mu(f)=\infty$. 现在假设 $d_1\not\equiv cd_2$, 由文 [10] 的结果, 有

$$f_1=2\frac{(d_1d_2d_2'-d_2^2d_1')}{h}w^{(3)}+\phi_2w''+\phi_1w'+\phi_0w,\tag{3.14}$$

其中 $h(z),\phi_j(z)$ $(j=0,1,2)$ 是有限级亚纯函数. 通过 (3.14), 得到 $\mu(w)=\mu(f_1)=\infty$.

不失一般性, 我们假设 $d_1\not\equiv cd_2$. 证明 $\operatorname{mes}\Delta(w)\geqslant\min\big\{2\pi,\frac{\pi}{\mu(B)}\big\}$. 首先假设 $\operatorname{mes}\Delta(w)<\sigma:=\min\big\{2\pi,\frac{\pi}{\mu(B)}\big\}$, 因此 $\zeta=\sigma-\operatorname{mes}\Delta(w)>0$. 通过使用与定理 1.1 相似的方法, 存在两个常数 $M>0$ 和 $K>0$, 使得

$$\Big|\frac{w^{(s)}(z)}{w(z)}\Big|\leqslant Kr^M,\quad s=1,2\tag{3.15}$$

对于所有的 $z\in\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Omega(\alpha_i+2\varepsilon,\beta_i-2\varepsilon)\setminus H$ 成立, 这里 H 是一个 R- 集, $0<\varepsilon<\min\big\{\frac{\zeta}{16m},\frac{\beta_i-\alpha_i}{8},i=1,2,\cdots,m\big\}$. 对 $B(z)$ 应用引理 2.3, 我们有级 $\mu(B)$ 的 Pólya 峰 $\{r_j\}$ $(r_j\notin|z|,z\in H)$. 因为 $B(z)$ 是整函数, $\delta(\infty,B)=1$. 对于 Pólya 峰 $\{r_j\}$, 有

$$\liminf_{r_j\to\infty}\operatorname{mes}(D_\Gamma(r_j,\infty))\geqslant\sigma,$$

其中函数 $\Gamma(r)$ 定义如下:

$$\Gamma(r)=\max\Big\{\sqrt{\frac{\log r}{m(r,B)}},\sqrt{\frac{m(r,A)}{m(r,B)}},\sqrt{\frac{m(r,d_1)}{m(r,B)}},\sqrt{\frac{m(r,d_2)}{m(r,B)}}\Big\}.$$

很明显, $\Gamma(r)$ 是正的且 $\lim\limits_{r\to\infty}\Gamma(r)=0$. 因此, 存在一个开区间 $I_{i_0}=(\alpha,\beta)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i\subset S$, 使得对于无穷多个 j, 有

$$\mathrm{mes}(D(r_j)\cap(\alpha,\beta))>\frac{\zeta}{2m}>0. \tag{3.16}$$

不失一般性, 假设对于所有的 j, (3.16) 都成立. 由 $D(r_j)$ 的定义和 (3.16) 得

$$\begin{aligned}\int_{F_j}\log^+|B(r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta&\geqslant(\mathrm{mes}(D(r_j)\cap(\alpha,\beta))-4\varepsilon)\Gamma(r_j)m(r_j,B)\\&\geqslant\frac{\zeta}{4m}\Gamma(r_j)m(r_j,B),\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 $F_j=D(r_j)\cap(\alpha+2\varepsilon,\beta-2\varepsilon)$.

另一方面, 因为 f_1 和 f_2 是方程 (1.4) 的两个解, 由 (1.4) 和 w 的定义, 有

$$d_1f_1''+d_1Af_1'+d_2f_2''+d_2Af_2'=-Bw. \tag{3.18}$$

由克拉默法则, 得到

$$f_2=2\frac{d_1d_2d_1'-d_1^2d_2'}{h}w^{(3)}+\psi_2w''+\psi_1w'+\psi_0w, \tag{3.19}$$

其中 ψ_0,ψ_1,ψ_2 的定义与 ϕ_0,ϕ_1,ϕ_2 相似. 对 $B(z)$ 应用引理 2.3, 有

$$|B(r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\geqslant\mathrm{e}^{\Gamma m(r_j,B)}\geqslant\mathrm{e}^{\sqrt{m(r_j,A)m(r_j,B)}}.$$

不失一般性, 假设 $\rho=\rho(A)$, 可以看出

$$|d_1d_2d_2'-d_2^2d_1'|<\mathrm{e}^{m(r_j,A)},$$

其中 $r_j\to\infty$. 这样结合 (1.5) 和 (1.6), 当 $\theta\in\mathbf{D}(r_j),r\to\infty$ 时,

$$\Big|\frac{d_1d_2d_2'-d_2^2d_1'}{h}\Big|\to0, \tag{3.20}$$

$$|\phi_0|\to\Big|\frac{(4d_1(d_2')^2+3d_2^2d_1''-3d_1d_2d_2''-4d_2d_1'd_2')+2(d_1d_2d_2'-d_2^2d_1')\frac{B'}{B}}{2(d_1d_2'-d_2d_1')^2}\Big|. \tag{3.21}$$

因为 $\rho(B)<\infty$, 通过对数导数引理, 有

$$\int_{F_j}\log^+|\phi_0|\mathrm{d}\theta\leqslant c_1m(r_j,d_1)+c_2m(r_j,d_2)+O(\log r_j),$$

其中 c_1,c_2 是常数. 对 (3.14) 和 (3.19) 的其他系数应用相似的结论, 结合 (3.18) 可以看出

$$\begin{aligned}\int_{F_j}\log^+|B(r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta&\leqslant c_3m(r_j,A)+c_4m(r_j,d_1)+c_5m(r_j,d_2)+O(\log r_j)\\&\leqslant c\Gamma^2(r_j)m(r_j,B),\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中 c,c_3,c_4,c_5 为正常数. 根据 (3.17) 和 (3.22), 有

$$\frac{\zeta}{4m}\Gamma(r_j)m(r_j,B)\leqslant c\Gamma^2(r_j)m(r_j,B),$$

这与当 $j\to\infty$ 时, $\Gamma(r_j)\to0$ 矛盾. 证毕.

定理 1.3 的证明　首先证明 $\mu(g_f)=\infty$. 既然 $f(z)$ 是一个下级为无穷的整函数, 由文 [10] 的结果可得

$$f=C_0g_f+C_1g_f', \tag{3.23}$$

其中 $C_0=\frac{\alpha_{1,1}}{H}$, $C_1=\frac{\alpha_{1,0}}{H}$, $\alpha_{1,0}=k_1-k_2A$, $\alpha_{1,1}=k_2A^2-(k_2A)'-k_1A-k_2B+k_0+k_1'$. 由定理的假设, 得到 C_0,C_1 是有限级的. 如果 $\mu(g_f)<\infty$, 由 (3.23), 有 $\mu(f)<\infty$, 产生矛盾. 因此 $\mu(g_f)=\infty$.

接下来, 证明 $\operatorname{mes}\Delta(g_f)\geqslant\sigma:=\min\left\{2\pi,\frac{\pi}{\mu(B)}\right\}$. 现在假设 $\operatorname{mes}\Delta(g_f)<\min\left\{2\pi,\frac{\pi}{\mu(B)}\right\}$. 因此 $\zeta=\sigma-\operatorname{mes}\Delta(g_f)>0$. 通过与定理 1.1 相似的方法, 可以得到

$$\Big|\frac{g_f^{(s)}}{g_f}\Big|\leqslant Kr^M,\quad s=1,2 \tag{3.24}$$

对所有的 $z\in\Omega(\alpha+2\varepsilon,\beta-2\varepsilon)\setminus H$ 成立, 这里 H 是一个 R- 集, $0<\varepsilon<\min\{\frac{\zeta}{16m},\frac{\beta_i-\alpha_i}{8},i=1,2,\cdots,m\}$. 因为 $\max\{\rho(k_j):j=0,1,2\}<\rho(A)<\rho(B)$, 令

$$\Gamma(r)=\max\Big\{\sqrt{\frac{\log r}{m(r,B)}},\sqrt{\frac{m(r,A)}{m(r,B)}}\Big\},$$

这样 (3.17) 对所有的 j 成立.

另一方面, 将 (3.23) 代入 (1.4), 得到

$$\begin{aligned}-BC_0g_f=&(C_0''+AC_0')g_f+(2C_0'+AC_0+AC_1'+C_1''+BC_1)g_f'\\&+(2C_1+AC_1)g_f''+C_1g_f^{(3)}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

(3.25) 除以 C_0g_f, 可得

$$\begin{aligned}-B=&\frac{(C_0''+AC_0')}{C_0}+\frac{(2C_0'+AC_0+AC_1'+C_1''+BC_1)}{C_0}\frac{g_f'}{g_f}\\&+\frac{(2C_1+AC_1)}{C_0}\frac{g_f''}{g_f}+\frac{C_1}{C_0}\frac{g_f^{(3)}}{g_f}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

通过对数导数引理, 对于充分大的 r_j, 有

$$m\Big(r_j,\frac{C_0^{(i)}}{C_0}\Big)=O(\log r_j), \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}\int_{F_j}\log^+\Big|\frac{C_1^{(i)}}{C_0}\Big|\mathrm{d}\theta&\leqslant\int_{F_j}\Big(\log^+\Big|\frac{C_1}{C_0}\Big|+\log^+\Big|\frac{C_1^{(i)}}{C_1}\Big|\Big)\mathrm{d}\theta\\&\leqslant\int_{F_j}\log^+\Big|\frac{C_1}{C_0}\Big|\mathrm{d}\theta+O(\log r_j),\end{aligned} \tag{3.28}$$

其中 $i=1,2$. 对 $\frac{C_1}{C_0}$ 和 $\frac{BC_1}{C_0}$ 应用与以上定理相同的方法, 当 $r_j\to\infty$ 时, 有

$$\Big|\frac{C_1}{C_0}\Big|\to0, \tag{3.29}$$

$$\Big|\frac{BC_1}{C_0}\Big|\to\Big|\frac{k_1-k_2A}{k_2}\Big|. \tag{3.30}$$

通过以上不等式和 (3.24), 能够得出

$$\begin{aligned}\int_{F_j}\log^+|B(re^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta&\leqslant c_6m(r_j,A)+c_7m(r_j,k_0)+c_8m(r_j,k_1)+c_9m(r_j,k_2)+O(\log r_j)\\&\leqslant c\Gamma^2m(r_j,B),\end{aligned} \tag{3.31}$$

其中 c, $\{c_i, i=6,7,8,9\}$ 是正常数. 比较 (3.17) 和 (3.31), 得到

$$\frac{\zeta}{4m}\Gamma(r_j)m(r_j,B)\leqslant c\Gamma^2 m(r_j,B),$$

这与当 $j\to\infty$ 时, $\Gamma(r_j)\to 0$ 矛盾. 证毕.

参　考　文　献

[1] Baernstein A. Proof of Edrei's spread conjecture [J]. *Proc Lond Math Soc*, 1973, 26:418–434.

[2] Edrei A. Meromorphic functions with three radially distributed values [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1955, 78:276–293.

[3] Edrei A, Fuchs W H J. Meromorphic functions with several deficient values [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1959, 93:292–328.

[4] Baker I N. The domains of normality of an entire function [J]. *Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math*, 1975, 1:177–183.

[5] Bergweiler W. Iteration of meromorphic functions [J]. *Bull Amer Math Soc*, 1993, 29:151–188.

[6] Huang Z G, Wang J. On limit directions of Julia sets of entire solutions of linear differential equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2014, 409:478–484.

[7] Huang Z G, Wang J. The radial oscillation of entire solutions of complex differential equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2015, 431:988–999.

[8] Huang Z G, Wang J. On the radial distribution of Julia sets of entire solutions of $f^{(k)}+A(z)f=0$ [J]. *J Math Anal Appl*, 2012, 387:1106–1113.

[9] Latreuch Z, Belaidi B. Growth and oscillation of some polynomials gemerated by solutions of complex differential equations [J]. *Opuscula Math*, 2015, 35:85–98.

[10] Latreuch Z, Belaidi B. Some results on the properties of differential polynomials generated by solutions of complex differential equations [J]. *Acta Univ Palacki Olomuc, Fac Rer Nat Mathematica*, 2015, 54:81–94.

[11] Qiao J Y. Stable domains in the iteration of entire functions [J]. *Acta Math Sin*, 1994, 37:702–708.

[12] Zheng J H. On multiply connected Fatou components in iteration of meromorphic functions [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, 313:24–37.

[13] Qiu L, Wu S J. Radial distributions of Julia set of meromrphic functions [J]. *J Aust Math Soc*, 2006, 81(3):363–368.

The Radial Distribution of Julia Sets of Some Entire Functions with Infinite Lower Order

QIU Ling[1] XUAN Zuxing[2] ZHAO Yan[1]

[1]College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China. E-mail: qiuling1978@bjut.edu.cn

[2]Corresponding author. Department of General Education, High-speed Railway Economic Research Institute, Beijing Key Laboratory of Information Service Engineering, Beijing Union University, Beijing 100101, China.
E-mail: zuxingxuan@163.com

Abstract This article investigates the radial distribution of Julia sets of some entire functions with infinite lower order which are solutions, the polynomial or differential polynomial of solutions of the equation $f''(z) + A(z)f'(z) + B(z)f(z) = 0$.

Keywords Limit direction, Julia set, Lower order
2000 MR Subject Classification 30D35, 34M05, 37F10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 3, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA