数 学 年 刊
2016, 37A(4):359–366
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2016.0030

有限偏差映射的加权 Grötzsch 问题*

冯小高[1] 吴 冲[2] 唐树安[3]

提要 考虑如下的极值问题：

$$\inf_{f\in\mathcal{F}}\iint_{Q_1}\varphi(K(z,f))\lambda(x)|\mathrm{d}z|^2,$$

其中 $\mathcal{F}$ 是从矩形 Q_1 到矩形 Q_2 并保持端点且具有有限线性偏差 $K(z,f)$ 的所有同胚映射 f 的集合， φ 是正的严格凸的递增函数，而 $\lambda(x)$ 是正的加权函数．作者在文“*Sci China Math*, 2016, 59(4):673–686”中证明了当 φ' 无界时，上述极值问题存在唯一的极值映射 $f_0(z)=u(x)+\mathrm{i}y$. 本文考虑 φ' 有界的情形，得到如下结果：当 $L<l$ 时，上述极值问题也存在唯一的极值映射；但当 $L>l$ 时，极值映射可能不存在．借助于 Martin 和 Jordens 的方法，构造了一族最小序列使得其极限达到最小值.

关键词 Grötzsch 问题，有限偏差映射，极值映射
MR (2000) 主题分类 30C62
中图法分类 O174.55
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2016)04-0359-08

1 引 言

极值拟共形映射理论在 Teichmüller 空间理论中有很重要的应用．近年来，极值拟共形映射理论已经被推广到有限偏差映射 [1−5]. 本文研究有限偏差映射的加权 Grötzsch 问题.

首先回顾一些相关定义．假设 Ω 和 Ω' 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的两个有界区域， $f:\Omega\to\Omega'$ 是 Sobolev 类 $\mathbb{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\Omega')$ 中的同胚映射．在不加说明的情况下，都假定同胚映射是保向的.

称映射 $f\in\mathbb{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\Omega')$ 是有限偏差的，如果存在一个可测函数 $1\leqslant K(z)<\infty$, 使得

$$|Df|^2\leqslant K(z)J(z,f)\tag{1.1}$$

并且 $J(z,f)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 其中 $|Df|$ 为算子范数

$$|Df|=|f_z|+|f_{\overline{z}}|,$$

$J(z,f)$ 为映射 f 的 Jacobi 行列式

$$J(z,f)=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2.$$

本文 2015 年 6 月 12 日收到， 2015 年 12 月 14 日收到修改稿.
[1]通讯作者．苏州大学数学科学学院，江苏 苏州 215006; 西华师范大学数学与信息学院，四川 南充 637002. E-mail: fengxiaogao603@163.com
[2]西南交通大学数学学院，成都 611756. E-mail: wuchong@amss.ac.cn
[3]贵州师范大学数学科学学院，贵阳 550001. E-mail: tsaflyhigher@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11601100, No. 11226097), 中央高校基本科研业务费专项资金 (No. 2682015CX057), 贵州师范大学博士启动基金 (No. 11904-05032130006) 和西华师范大学科研启动资助项目 (No. 13D017) 的资助.

记 $K(z,f)$ 为使得不等式 (1.1) 成立的最小的函数 $K(z)$, 并称之为函数 f 的线性偏差函数，即有如下定义：

$$K(z,f)=\begin{cases}\dfrac{|Df|^2}{J(z,f)}, & 若J(z,f)>0,\\ 1, & 否则.\end{cases} \tag{1.2}$$

定义 f 的偏差函数 $\mathbb{K}(z,f)$ 为

$$\mathbb{K}(z,f)=\begin{cases}\dfrac{\|Df\|^2}{J(z,f)}, & 若J(z,f)>0,\\ 1, & 否则,\end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\|Df\|$ 为正规化的 Hilbert-Schmidt 范数：

$$\|Df\|^2=|f_z|^2+|f_{\overline{z}}|^2.$$

线性偏差函数 $K(z,f)$ 与偏差函数 $\mathbb{K}(z,f)$ 之间有如下关系：

$$\mathbb{K}(z,f)=\frac{1}{2}\Big(K(z,f)+\frac{1}{K(z,f)}\Big). \tag{1.4}$$

记

$$Q_1=[0,l]\times[0,1],\quad Q_2=[0,L]\times[0,1].$$

经典的 Grötzsch 问题 [6] 研究如下极值问题：

$$\inf_{f\in\mathcal{F}}\|\mathbb{K}(z,f)\|_\infty,$$

其中 $\mathcal{F}$ 是从矩形 Q_1 到矩形 Q_2 并保持端点且具有有限线性偏差 $K(z,f)$ 的所有同胚映射的集合，这一极值问题的唯一极值映射是仿射同胚.

Astala, Iwaniec, Martin 和 Onninen[2] 研究了如下的极值问题：

$$\inf_{f\in\mathcal{F}}\iint_{Q_1}\mathbb{K}(z,f)|\mathrm{d}z|^2,$$

其中 $\mathcal{F}$ 为上述定义的映射类. 这一极值问题的唯一极值映射是仿射同胚. 同时他们证明

$$\inf_{f\in\mathcal{F}}\iint_{Q_1}K(z,f)|\mathrm{d}z|^2$$

有无穷个极值映射，其主要原因在于 $\mathbb{K}(z,f)$ 是 $K(z,f)$ 的凸函数.

更一般地，假设 $\varphi:[1,\infty)\to[0,\infty)$ 为一个正的凸的递增函数， $\lambda(x)$ 为正的加权函数. Martin 和 Jordens[7] 研究了如下极值问题：

$$\inf_{f\in\mathcal{F}}\iint_{Q_1}\varphi(\mathbb{K}(z,f))\lambda(x)|\mathrm{d}z|^2.$$

他们证明了当 $\varphi:[1,\infty)\to[0,\infty)$ 是一个凸的递增的光滑函数， $\lambda(x)$ 有正的下确界，并且当 $s\to\infty$ 时， $\varphi'(s)$ 无界，则该极值问题的极值映射存在且唯一；而当 φ' 有界时，具有有限偏差的极值同胚映射不存在.

最近我们与沈玉良[5] 研究了如下极值问题：

$$\inf_{f\in\mathcal{F}}\iint_{Q_1}\varphi(K(z,f))\lambda(x)|\mathrm{d}z|^2, \tag{1.5}$$

其中 $\mathcal{F}$ 是从矩形 Q_1 到矩形 Q_2 并保持端点且具有有限线性偏差 $K(z,f)$ 的所有同胚映射的集合，文中证明了以下结论.

定理 1.1[5]　设 $\lambda:[0,l]\to(0,+\infty)$ 为分段连续的有界且有正的下确界的函数，$\varphi:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为连续可微函数，且 $\varphi':[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ 为严格递增的满射，则极值问题 (1.5) 存在唯一的极值映射 $x+\mathrm{i}y\mapsto u(x)+\mathrm{i}y$, 其中 $u:[0,l]\to[0,L]$ 绝对连续，且当 $L>l$ 时 $u_x\geqslant 1$, 而当 $L<l$ 时 $0<u_x\leqslant 1$.

在定理 1.1 中要求 φ' 是无界的．本文研究 φ' 有界的情形．当 $l>L$ 时，得到与文 [5] 类似的结果；当 $l<L$ 时，极值问题可能无解，我们构造了一族最小序列使其极限达到最小值.

2　φ' 有界时的加权 Grötzsch 问题

首先，考虑下面的极值问题：

$$\inf_{f_0\in\mathbb{F}_0}\iint_{Q_1}\varphi(K(z,f_0))\lambda(x)|\mathrm{d}z|^2, \tag{2.1}$$

其中 $\mathbb{F}_0$ 为所有从矩形 Q_1 到矩形 Q_2 的具有如下形式的同胚映射：

$$f_0(z)=u(x)+\mathrm{i}y \tag{2.2}$$

构成的集合，其中 $u:[0,l]\to[0,L]$ 满足

$$u(0)=0,\quad u(l)=L.$$

考虑下面变分问题的 Euler-Lagrange 方程：

$$\iint_{Q_1}\varphi(K(z,f_0))\lambda(x)|\mathrm{d}z|^2,$$

其中函数 f_0 为 (2.2) 的形式．注意到

$$(f_0(z))_z=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f_0}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f_0}{\partial y}\Big)=\frac{1}{2}(u_x+1), \tag{2.3}$$

$$(f_0(z))_{\overline{z}}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f_0}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f_0}{\partial y}\Big)=\frac{1}{2}(u_x-1). \tag{2.4}$$

因此

$$K_0=K(z,f_0)=\frac{|(f_0)_z|+|(f_0)_{\overline{z}}|}{|(f_0)_z|-|(f_0)_{\overline{z}}|}=\frac{|u_x+1|+|u_x-1|}{|u_x+1|-|u_x-1|}, \tag{2.5}$$

$$|Df_0|=|(f_0)_z|+|(f_0)_{\overline{z}}|=\frac{1}{2}|u_x+1|+\frac{1}{2}|u_x-1|, \tag{2.6}$$

$$J_0=J(z,f_0)=|(f_0)_z|^2-|(f_0)_{\overline{z}}|^2=\frac{1}{4}(u_x+1)^2-\frac{1}{4}(u_x-1)^2=u_x, \tag{2.7}$$

从而变分问题 (2.1) 的 Euler-Lagrange 方程对 $u_x\geqslant 1$ 与 $u_x\leqslant 1$ 是不同的，所以需要对这两种情况分别讨论.

当 $L<l$ 时，此时 $0<u_x<1$. 由 (2.5)–(2.7) 得到

$$K_0=\frac{1}{u_x},\quad |Df_0|=1,\quad J_0=u_x. \tag{2.8}$$

于是 Euler-Lagrange 方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{\lambda(x)}{u_x^2}\varphi'\Big(\frac{1}{u_x}\Big)\Big]=0. \tag{2.9}$$

故存在正常数 α, 使得

$$\frac{\lambda(x)}{u_x^2}\varphi'\Big(\frac{1}{u_x}\Big)=\alpha. \tag{2.10}$$

由文 [5] 知，当 φ' 无界时，方程 (2.10) 有唯一解 $u(x)$, 使得 $u(l)=L$. 当 φ' 有界时，得到如下引理.

引理 2.1 设 $\lambda:[0,l]\to(0,+\infty)$ 为分段连续，有界且有正的下确界的加权函数，$\varphi:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为连续可微函数，且 $\varphi':[1,+\infty)\to(0,M)$ 为严格递增的满射，其中 M 为一个正数，则对任意的 $L<l$, 存在唯一的 $\alpha>0$, 使得 (2.10) 有唯一解 $u(x)$, 其中 $u(x)$ 在 $[0,l]$ 上绝对连续，严格递增，并且满足 $u(0)=0$, $u(l)=L$ 和 $0<u_x\leqslant 1$.

证 令 $F(s)=\frac{1}{s^2}\varphi'\big(\frac{1}{s}\big)$, 其中 $s\in(0,1)$. 由于 $\varphi:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续可微且 $\varphi':[1,+\infty)\to(0,M)$ 为严格递增的满射，可得

$$F'(s)=-\frac{2}{s^3}\varphi'\Big(\frac{1}{s}\Big)-\frac{1}{s^4}\varphi''\Big(\frac{1}{s}\Big)<0,$$

则 $F(s)$ 为 $(0,1)$ 上的递减函数，因此

$$\lim_{s\to0^+}F(s)=\lim_{s\to0^+}\frac{1}{s^2}\varphi'\Big(\frac{1}{s}\Big)=+\infty,\quad \lim_{s\to1^-}F(s)=\lim_{s\to1^-}\frac{1}{s^2}\varphi'\Big(\frac{1}{s}\Big)=0.$$

由中值定理得：对任意的 $x\in[0,l]$, $\alpha\in(0,+\infty)$, 存在唯一的 $s_x^\alpha\in(0,1)$, 使得

$$F(s_x^\alpha)=\frac{1}{(s_x^\alpha)^2}\varphi'\Big(\frac{1}{s_x^\alpha}\Big)=\frac{\alpha}{\lambda(x)}.$$

记 $u(x)=\int_0^x s_x^\alpha\mathrm{d}x$, 则 $u(x)$ 连续依赖于 α. 因此存在 $\alpha\in(0,+\infty)$, 使得 $u(l)=L$. 由于 $\lambda(x)$ 为分段连续函数，因此 $u(x)$ 绝对连续.

类似于定理 1.1 的证明，可得如下结论.

定理 2.1 设 $\lambda:[0,l]\to(0,+\infty)$ 为分段连续，有界且有正的下确界的加权函数，$\varphi:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为连续可微函数，且 $\varphi':[1,+\infty)\to(0,M)$ 为严格递增的满射，其中 M 为一个正数, 则极值问题 (1.5) 有唯一的极值映射, 且该映射形式为 $x+\mathrm{i}y\mapsto u(x)+\mathrm{i}y$, 其中 $u:[0,l]\mapsto[0,L]$ 绝对连续，并且当 $L<l$ 时 $0<u_x\leqslant 1$.

下面我们讨论另一种情形，当 $L>l$ 时，此时 $u_x\geqslant 1$. 由 (2.5)–(2.7) 可得

$$K_0=|Df_0|=J_0=u_x.$$

那么 Euler-Lagrange 方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi'(u_x)\lambda(x))=0.$$

因此

$$\lambda(x)\varphi'(u_x)=\alpha, \tag{2.11}$$

其中 α 为正的常数. 在文 [5] 中, (2.11) 存在解 $u(x)$ 满足 $u:[0,l]\to[0,L]$, $u_x\geqslant 1$, $u(0)=0$, $u(l)=L$. 在那里我们需要 $\varphi:[1,\infty)\mapsto[0,\infty)$ 光滑, 严格凸和单调递增, 且 $\lim\limits_{s\to 1^+}\varphi'(s)=0$, $\lim\limits_{s\to\infty}\varphi'(s)=\infty$. 而当 φ' 有界时, (2.11) 的解 $u(x)$ 可能满足情形 $u(l)=L_0<L$. 在这种情况下极值问题 (1.5) 没有解. 然而在下面的定理 2.2 中, 我们借助 Martin 和 Jordens[7] 的方法构造了一族最小序列, 使其极限达到最小值.

定理 2.2 设 $\lambda(x)$ 为分段连续, 有界且有正的下确界的函数, $\varphi:[1,\infty)\to[0,\infty)$ 为严格凸, 单调递增的光滑函数, 且 φ' 有界. 令 $u:[0,l]\to[0,L]$ 为 (2.11) 的解, 并满足 $u(0)=0$, $u(l)=L_0<L$. 令

$$f_0(z)=u(x)+\mathrm{i}y,\quad f_0:[0,l]\times[0,1]\to[0,L_0]\times[0,1].$$

假如不存在常数 α, 使得 $u(l)=L_0=L$, 则存在一列具有有限偏差的同胚映射 $f_j:[0,l]\times[0,1]\to[0,L]\times[0,1]$, 使得当 $j\to\infty$ 时, 有

$$\iint_{Q_1}\varphi(K(z,f_j))\lambda(x)|\mathrm{d}z|^2\to\iint_{Q_1}\varphi(K(z,f_0))\lambda(x)|\mathrm{d}z|^2. \tag{2.12}$$

特别地, 在这一情况下不存在极值映射.

证 第一步是对满足 (2.11) 的所有 α 和 $x\in(0,l)$, 找 α_0 使 $u_0(l)=u^{\alpha_0}(l)=L_0<L$ 为最大, 即 $f_0(z)=u_0(x)+\mathrm{i}y$ 为这种形式的映射中使其像域为最大的映射.

因为 φ 光滑, 严格凸且单调递增, 那么 φ' 为正的连续严格增函数. 由于 φ' 有界, 不妨假设 $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi'(t)=1$. 函数 $t\mapsto\varphi'(t)$ 在 $[1,\infty)$ 上严格单调递增, 令 t_x 满足 $\varphi'(t_x)=\frac{\alpha}{\lambda(x)}$, 从而根据 $u_x^\alpha=t_x$ 确定函数 u^α. 现在令

$$\alpha_0=\lambda(x_0)=\min_x\lambda(x).$$

对所有的 $\alpha<\alpha_0$, 函数 u_x^α 连续有界, 并且一致收敛

$$u_x^\alpha\to u_x^{\alpha_0},\quad 当\ \alpha\to\alpha_0\,时,$$

那么

$$u^\alpha(l)\to u^{\alpha_0}(l)=L_0<L,\quad 当\ \alpha\to\alpha_0\,时,$$

因此当 $\alpha\leqslant\alpha_0$ 时, 函数族 $u^\alpha\in\mathbb{W}^{1,1}([0,l])$ 一致有界. 函数 $u_0(x)=u^{\alpha_0}(x)$ 严格单调递增, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}u_x^{\alpha_0}=\infty$. 因此 $f_0(z)=u_0(x)+\mathrm{i}y$ 为该类映射中使其像域为最大的映射.

下一步是找最小序列 f_j. 令

$$g_0(w)=v_0(a)+\mathrm{i}b,\quad v_0=u_0^{-1},$$

则 $(v_0)_a(a)=\frac{1}{(u_0)_x(x)}$, 其中 $u_0(x)=a\in[0,L_0]$. 记 $u_0(x_0)=a_0$, 则 $(v_0)_{a_0}=0$. 现在定义新的函数 $g:[0,L]\times[0,1]\to[0,l]\times[0,1]$, $g(w)=v(a)+\mathrm{i}b$ 在 a_0 附近为常数，其中

$$v(a)=\begin{cases}v_0(a), & 若\ a\leqslant a_0,\\ v_0(a_0), & 若\ a_0\leqslant a\leqslant a_0+L-L_0,\\ v_0(a+L_0-L), & 若\ a_0+L-L_0\leqslant a\leqslant L,\end{cases}\tag{2.13}$$

则 v_a 是连续非负的 L^1 函数，值域为 $[0,1]$, 在区间 $[a_0,a_0+L-L_0]$ 上取值为 0, 并且 $\|v_a\|_1=l$. 记

$$v_a^j(a)=\frac{1}{1+\frac{1}{j}}\Big(v_a(a)+\frac{\frac{l}{L}}{j}\Big).\tag{2.14}$$

则 $\|v_a^j\|_1=l$. 令 $v^j(a)=\int_0^a v_a^j\mathrm{d}a$, 考虑有限偏差同胚 $g^j(w)=v^j(a)+\mathrm{i}b$. 注意不仅 g^j 在 $\mathbb{W}^{1,1}([0,L]\times[0,1])$ 一致地收敛于 g, 而且其导数也是一致收敛，因此

$$\varphi\Big(\frac{1}{v_a^j}\Big)\lambda(v^j(a))v_a^j(a)\ \ 一致收敛到\ \ \varphi\Big(\frac{1}{v_a}\Big)\lambda(v(a))v_a(a).$$

记

$$f^j=(g^j)^{-1}:[0,l]\times[0,1]\to[0,L]\times[0,1],$$

则映射 f^j 为有限偏差的微分同胚. 作变量代换 $g^j(w)=z$, 可得

$$\begin{aligned}\iint_{Q_1}\varphi(K(z,f^j)\lambda(z)\mathrm{d}z&=\iint_{Q_2}\varphi\Big(\frac{|Df^j(g^j)|}{J(g^j,f^j)}\Big)\lambda(g^j(w))J(w,g^j)\mathrm{d}w\\&=\iint_{Q_2}\varphi\Big(\frac{1}{v_a^j(a)}\Big)\lambda(v^j(a))v_a^j(a)\mathrm{d}a.\end{aligned}$$

令 $j\to\infty$, 可得

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\iint_{Q_1}\varphi(K(z,f^j)\lambda(z)\mathrm{d}z&=\iint_{Q_2}\varphi\Big(\frac{1}{v_a(a)}\Big)\lambda(v(a))v_a(a)\mathrm{d}a\\&=\iint_{[0,L_0]\times[0,1]}\varphi\Big(\frac{1}{(v_0)_a(a)}\Big)\lambda(v_0(a))(v_0)_a(a)\mathrm{d}a\\&=\iint_{[0,l]\times[0,1]}\varphi((u_0)_x(x))\lambda(x)\mathrm{d}x\\&=\iint_{Q_1}\varphi(K(z,f_0))\lambda(z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

致谢 作者感谢沈玉良教授的帮助.

参 考 文 献

[1] Astala K, Iwaniec T, Martin G J. Deformations of annuli with smallest mean distortion [J]. *Arch Ratinal Mech Anal*, 2010, 195:899–921.

[2] Astala K, Iwaniec T, Martin G J, Onninen J. Extremal mappings of finite distortion [J]. *Proc Lond Math Soc*, 2005, 91:655–702.

[3] Martin G J. The Teichmüller problem for mean distortion [J]. *Ann Acad Sic Fenn*, 2009, 34:233–247.

[4] Iwaniec T, Martin G J, Onninen J. On minimiser of L^P-mean distortion [J]. *Comput Methods Funct Theory*, 2014.

[5] Feng X G, Tang S, Wu C, Shen Y L. A unified approach to the weighted Grötzsch and Nitsche problems for mappings of finite distortion [J]. *Sci China Math*, 2016, 59(4):673–686.

[6] Grötzsch H. Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Sates [J]. *Ber Verh Sächs Akad Wiss Leipzig*, 1928, 80:503–507.

[7] Martin G J, Jordens M. Deformation with smallest weighted L^p average distortion and Nitsche-type phenomena [J]. *J Lond Math Soc*, 2012, 85:282–300.

Weighted Grötzsch Problem for Finite Distortion Mappings

FENG Xiaogao[1] WU Chong[2] TANG Shu'an[3]

[1]Corresponding author. School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou 215006, Jiangsu, China; College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637002, Sichuan, China.
E-mail: fengxiaogao603@163.com

[2]School of Mathematical Sciences, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China. E-mail: wuchong@amss.ac.cn

[3]School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China. E-mail: tsaflyhigher@163.com

Abstract This paper deals with the following extremal problem:

$$\inf_{f\in\mathcal{F}}\iint_{Q_1}\varphi(K(z,f))\lambda(x)|\mathrm{d}z|^2,$$

where $\mathcal{F}$ denotes the set of all homeomorphims f with finite linear distortion $K(z,f)$ between two rectangles Q_1 and Q_2 taking vertices into vertices, φ is a strictly convex increasing positive function and $\lambda(x)$ is a positive weighted function. In "*Sci China Math*, 2016, vol. 59, no. 4, pp. 673–686", the authors proved that when φ' is unbounded the extremal problem exists uniquely an extremal mapping with the form of $f_0(z) = u(x) + \mathrm{i}y$. In this paper, the authors consider the case that φ' is bounded. It is obtained that when $L < l$, there also exists uniquely an extremal mapping, while, when $L > l$, there is no solution for the minimization problem. By the method of Martin and Jordens, a minimizing sequence which attains the minimization in the limit is constructed.

Keywords Grötzsch problem, Finite distortion mapping, Extremal mapping
2000 MR Subject Classification 30C62

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 37 No. 4, 2016

by ALLERTON PRESS, INC., USA