

可定向闭曲面上保定向的周期映射*

宋 帅¹

提要 讨论可定向闭曲面上保定向周期映射的共轭类分类问题. Kulkarni (1997) 指出: 亏格 g 大于 3 时, 曲面上任意周期大于或等于 $4g$ 的周期映射共轭于两类周期映射中某个映射的幂. 之后 Hirose (2010) 得到: 亏格 g 大于 12 时, 曲面上任意周期大于或等于 $3g$ 的周期映射共轭于 4 类周期映射中某个映射的幂. 本文在此基础上研究了周期大于或等于 $3(g-1)$ 的情形: 当亏格 g 大于 21 时, 得到了和 Hirose 相似的结论, 且找出了更多不能被包含在前面所讲的 4 类周期映射中的情形.

关键词 闭曲面, 可定向, 周期映射, 保定向, 共轭类

MR (2000) 主题分类 57N05, 57M60, 20F38

中图法分类 O189.2

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2016)04-0433-18

1 引 言

设 Σ_g 是亏格为 $g \geq 2$ 的可定向闭曲面. Nielsen-Thurston 理论将 Σ_g 上的保定向的微分同胚分为 3 类^[1]: (i) 周期的, (ii) 可约的, (iii) pseudo-Anosov.

周期映射的“周期”对于研究周期映射是重要的. 早在 19 世纪末, Wiman^[2] 证明了对于亏格 $g \geq 2$ 的可定向闭曲面, 其上的保定向的周期映射周期最大可能为 $4g+2$. 1966 年, Harvey^[3] 证明了这个最大的周期对每一个 g 都可以取到的. 1991 年, 文 [4] 确定了可定向和不可定向闭曲面上的保定向的和反定向的周期映射的最大周期, 并且这个最大周期取决于曲面亏格的奇偶性. 1993 年, 李力在文 [5] 中指出曲面的自同胚群的由保定向的周期自同胚生成的 $4g+2$ 阶循环子群在共轭意义下是唯一的.

Nielsen 给出了两个周期映射共轭的充要条件^[6]. 一个很自然的问题就是不同亏格的曲面上周期映射共轭类有哪些. 事实上, 当周期较大时, 周期映射的共轭类是明确的. 1997 年, Kulkarni 在文 [7] 中指出: 如果 $g > 3$, 曲面 Σ_g 上任意周期 $n \geq 4g$ 的周期映射共轭于 Σ_g 上某一周期为 $4g$ 或 $4g+2$ 的周期映射的幂. 2010 年, Hirose 在文 [8] 中对 Kulkarni 的结论有所推进: 当 $g > 12$ 时, Σ_g 上任意周期 $n \geq 3g$ 的周期映射共轭于 Σ_g 上某一周期为 $4g+2, 4g, 3g+3$ 或 $3g$ 的周期映射的幂.

本文在 Kulkarni 和 Hirose 的基础上研究了当周期更小一些, 即当 $n \geq 3(g-1)$ 时周期映射作用下的商曲面的拓扑性质以及周期映射共轭类的分类. 研究的方法是通过曲面到商曲面自然得到的分支复叠, 研究那些分支点的性质, 并构造商曲面去掉其上分支点得到的拓扑结构的一维同调群到 \mathbf{Z}_n 的同态映射, 从而得到刻画分支点的拓扑量. 进而结合 Harvey^[3] 给出的关于周期映射的性质和 Riemann-Hurwitz 公式^[9] 计算周期映射的各个量.

本文 2014 年 4 月 21 日收到, 2015 年 12 月 11 日收到修改稿.

¹首都师范大学数学科学学院, 北京 100048. E-mail: shuaizi-0317@163.com

*本文受到首都师范大学研究生学术创新基金的资助.

文章最后以 $g = 2$ 和 $g = 3$ 时为例, 给出求解此类问题的操作方法, 具体计算出了曲面所能允许的周期映射及其作用下的商曲面和周期映射共轭类.

2 预备知识

Σ_g 是亏格为 g 的可定向的闭曲面, 这里我们研究 Σ_g 上的保定向的自同胚. 首先给出周期映射的定义.

2.1 周期映射

定义 2.1 (周期映射) Σ_g 上保定向的自同胚 f 是周期为 $n (\in \mathbf{Z}^+)$ 的周期映射, 如果

$$f^n = \text{id}_{\Sigma_g}, \quad \forall i \in \mathbf{Z}^+, 1 \leq i < n, f^i \neq \text{id}_{\Sigma_g}.$$

根据定义 2.1, 对于周期为 n 的周期映射 f , 曲面 Σ_g 上的任意一点 x , 都有 $f^n(x) = x$, 而对于小于 n 的正整数 j , 也可能存在 Σ_g 上的点 x' , 满足 $f^j(x') = x'$, 记集合

$$M_j(f) = \{x \in \Sigma_g \mid f^j(x) = x, \forall i \in \mathbf{Z}^+, 1 \leq i < j, f^i(x) \neq x\}.$$

容易知道 j 整除 n . 若不然, $\exists s, q \in \mathbf{Z}^+$, 其中 $0 < q < j$, 使得 $n = sj + q$, 则对于 $x \in M_j$, 有 $x = f^n(x) = f^{sj+q}(x) = f^q f^{sj}(x) = f^q(x) \neq x$, 矛盾. Σ_g 上所有这些点的集合记作

$$M(f) = \bigcup_{j=1}^{n-1} M_j(f) = \{x \in \Sigma_g \mid \exists j, 1 \leq j < n, f^j(x) = x\},$$

称 $M(f)$ 为 f 的奇异点集.

在 Σ_g 上定义如下关系: 对于 $x_1, x_2 \in \Sigma_g$, $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \exists r \in \mathbf{Z}$, 使得 $f^r(x_1) = x_2$. 这个关系是等价关系, 因为 (i) 由定义 2.1 知 $f^n = \text{id}_{\Sigma_g}$, 从而 $\forall x \in \Sigma_g$, $f^n(x) = x$, 即 $x \sim x$; (ii) 若 $x_1 \sim x_2$, 则有 $r \in \mathbf{Z}$, 使得 $f^r(x_1) = x_2$, 于是 $f^{-r}(x_2) = x_1$, 即 $x_2 \sim x_1$; (iii) 若 $x_1 \sim x_2$, $x_2 \sim x_3$, 则有 $r_1, r_2 \in \mathbf{Z}$, 使得 $f^{r_1}(x_1) = x_2$, $f^{r_2}(x_2) = x_3$, 于是 $f^{r_1+r_2}(x_1) = f^{r_2} f^{r_1}(x_1) = x_3$, 即 $x_1 \sim x_3$.

定义 2.2 对于上述等价关系, $\forall x \in \Sigma_g$, x 所在的等价类是 $[x] = \{f^r(x) \mid r \in \mathbf{Z}\}$. 我们把每一个等价类 $[x] = \{f^r(x) \mid r \in \mathbf{Z}\}$ 叫作曲面 Σ_g 在周期映射 f 作用下的一个轨道.

这样曲面 Σ_g 分拆成一些轨道, 同一轨道中的元素可以通过 $f^r (\exists r \in \mathbf{Z})$ 的作用将其一个元素变为另一个元素, 而不同轨道中的两个元素则不可以这样做. 如果将同一轨道中的元素看作一个元素, 我们就得到了一个轨道空间 $\frac{\Sigma_g}{f}$, 轨道空间 $\frac{\Sigma_g}{f}$ 中一个元素是 Σ_g 的一个轨道. 我们有下面的命题.

命题 2.1^[10] 设 f 是可定向闭曲面 Σ_g 上保定向的周期映射, 则轨道空间 $\frac{\Sigma_g}{f}$ 是可定向的闭曲面.

自然地, 有商映射

$$p: \Sigma_g \rightarrow \frac{\Sigma_g}{f}, \quad x \mapsto [x].$$

注意到, $\forall x \in \Sigma_g - M(f)$, $[x]$ 有 n 个元素, 即 $p^{-1}([x])$ 有 n 个元素, 而 $x' \in M_j(f) \subset M(f)$, $[x']$ 有 j 个元素, 即 $p^{-1}([x'])$ 有 j 个元素. 记 $B_f = p(M(f))$, 则映射 $p|_{\Sigma_g - M(f)}$ 是 $\Sigma_g - M(f)$ 到 $\frac{\Sigma_g}{f} - B_f$ 的 n 重复叠映射. 因此 p 是 Σ_g 到 $\frac{\Sigma_g}{f}$ 以 B_f 为分支集的分支复叠. B_f 中的点叫作 f 的分支点.

2.2 分支点的刻画

本文中我们研究的周期映射是保定向的自同胚, 所以分支集 B_f 是有限集, 设 $B_f = \{x_1, \dots, x_k\}$, k 是分支点的个数. 下面对分支集 B_f 中的点进行刻画, 从这里开始 $\frac{\Sigma_g}{f}$ 中的点 $[x]$ 简记为 x . 选取 $x \in \frac{\Sigma_g}{f} - B_f$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, 定义映射

$$\Omega_{f,x} : \pi_1\left(\frac{\Sigma_g}{f} - B_f, x\right) \rightarrow \mathbf{Z}_n.$$

构造如下: 首先 $\Sigma_g, \frac{\Sigma_g}{f}$ 是闭曲面, 分支集 B_f 是有限集, 所以 $\Sigma_g, \frac{\Sigma_g}{f} - B_f$ 都是道路连通的. 设 l 是 $\frac{\Sigma_g}{f} - B_f$ 上以 x 为基点的闭路, $[l]$ 是 $\pi_1(\frac{\Sigma_g}{f} - B_f, x)$ 中 l 所在的同伦类. 设 \tilde{l} 是 l 在 Σ_g 上以 \tilde{x} 为起点的道路提升, 注意到 \tilde{l} 的终点也是 $p^{-1}(x)$ 中的点, 于是 $\exists r \in \mathbf{Z}^+$, $r \leq n$, 使得 $f^r(\tilde{x})$ 是 \tilde{l} 的终点. 于是我们定义 $\Omega_{f,x}([l]) = r \pmod{n}$.

命题 2.2 映射

$$\Omega_{f,x} : \pi_1\left(\frac{\Sigma_g}{f} - B_f, x\right) \rightarrow \mathbf{Z}_n, \quad [l] \mapsto r$$

是同态映射.

设 x, x' 是 $\frac{\Sigma_g}{f} - B_f$ 中不相同的两个点, $l : [I, 0, 1] \rightarrow [\frac{\Sigma_g}{f} - B_f, x, x]$, 因为 $\frac{\Sigma_g}{f} - B_f$ 是道路连通的, 于是存在道路 $\alpha : [I, 0, 1] \rightarrow [\frac{\Sigma_g}{f} - B_f, x', x]$. 因此 $\beta = \alpha * l * \alpha^{-1}$ 是以 x' 为基点的闭路. 由代数拓扑的知识我们知道 α 诱导出同构:

$$\alpha_{\#} : \pi_1\left(\frac{\Sigma_g}{f} - B_f, x\right) \rightarrow \pi_1\left(\frac{\Sigma_g}{f} - B_f, x'\right), \quad [l] \mapsto [\beta] = [\alpha] * [l] * [\alpha^{-1}].$$

命题 2.3 设 x, x' 是 $\frac{\Sigma_g}{f} - B_f$ 中不相同的两个点, 则下述图表示交换:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1\left(\frac{\Sigma_g}{f} - B_f, x\right) & \xrightarrow{\alpha_{\#}} & \pi_1\left(\frac{\Sigma_g}{f} - B_f, x'\right) \\ & \searrow \Omega_{f,x} & \swarrow \Omega_{f,x'} \\ & \mathbf{Z}_n & \end{array}$$

命题 2.2-2.3 的证明是简单的, 这里省去. 由命题 2.3 知道, 我们定义的映射在同构意义下是和基本群的基点选取无关的. 因此可以记为 $\Omega_f : \pi_1(\frac{\Sigma_g}{f} - B_f) \rightarrow \mathbf{Z}_n$.

因为 \mathbf{Z}_n 是交换群, 故 Ω_f 诱导出 $\pi_1(\frac{\Sigma_g}{f} - B_f)$ 的交换化 $H_1(\frac{\Sigma_g}{f} - B_f)$ 到 \mathbf{Z}_n 的同态 ω_f , 即

$$\omega_f : H_1\left(\frac{\Sigma_g}{f} - B_f\right) \rightarrow \mathbf{Z}_n.$$

定义 2.3 设 $x_i \in B_f$, $\tilde{x}_i \in p^{-1}(x_i)$, 且 $\tilde{x}_i \in M_{j_i}(f)$, 我们把整数 $n_i = \frac{n}{j_i}$ 称为分支点 x_i 的分支指标.

$\forall x_i \in B_f = \{x_1, \dots, x_k\}$ 都存在包含 x_i 的充分小的圆盘 $D_i \subset \Sigma_g^a$, 使得 D_i 不包含 B_f 中的其他点. D_i 的边界记为 S_i , 并规定逆时针方向为正向. 设 $p^{-1}(D_i) = \bigcup_{\alpha=1}^{j_i} V_\alpha$, 其中 V_α 是曲面 Σ_g 上互不相交的闭集, 选取 $\tilde{x}_i \in p^{-1}(x_i)$, 则 $\tilde{x}_i \in V_{\alpha_i}$ (对某个 $1 \leq \alpha_i \leq j_i$), 则 V_{α_i} 是以 \tilde{x}_i 为中心的圆盘, 记 $V_{\alpha_i} = \{re^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq \epsilon, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

命题 2.4 设 $x_i \in B_f$, $\tilde{x}_i \in p^{-1}(x_i)$, 且 $\tilde{x}_i \in M_{j_i}(f)$, 则映射 f^{j_i} 限制在 $V_{\alpha_i} = \{re^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq \epsilon, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ 上是以 \tilde{x}_i 为中心的旋转:

$$f^{j_i}|_{V_{\alpha_i}}: V_{\alpha_i} \rightarrow V_{\alpha_i}, \quad re^{i\theta} \mapsto re^{i(\theta+2\pi \cdot \frac{p}{n_i})},$$

对于一些整数 p , 其中 $\gcd\{p, n_i\} = 1$.

需说明的是 $\gcd\{p, n_i\} = 1$, 若不然, 设 $\gcd\{p, n_i\} = t \neq 1$. 注意到 f^{j_i} 在 V_{α_i} 上的最小旋转周期是 n_i , 而

$$(f^{j_i})^{\frac{n_i}{t}}(re^{i\theta}) = re^{i(\theta+2\pi \cdot \frac{p}{n_i} \cdot \frac{n_i}{t})} = re^{i(\theta+2\pi \frac{p}{t})} = re^{i\theta}, \quad \forall r \in (0, \epsilon], \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

矛盾.

命题 2.5 设 $x_i \in B_f$, $\tilde{x}_i \in p^{-1}(x_i)$, $\tilde{x}_i \in M_{j_i}(f)$, D_i 是 Σ_g^a 中包含 x_i 的圆盘, 且 D_i 不包含 B_f 中的其他点. S_i 是 D_i 的边界, 并规定逆时针方向为正向, 则有 $j_i = \gcd\{\omega_f(S_i), n\}$.

证 取 $y \in S_i$, 则 S_i 可以看作 $\Sigma_g^a - B_f$ 中以 y 为基点的闭路, 取 $\tilde{y} (\in p^{-1}(y)) \in V_{\alpha_i}$, \tilde{S}_i 是 S_i 在曲面 Σ_g 上的以 \tilde{y} 为起点的提升. 设 $\tilde{y} = \epsilon e^{i\theta}$, 则 \tilde{S}_i 的终点为 $\epsilon e^{i(\theta+2\pi \cdot \frac{1}{n_i})}$ (见图 1).

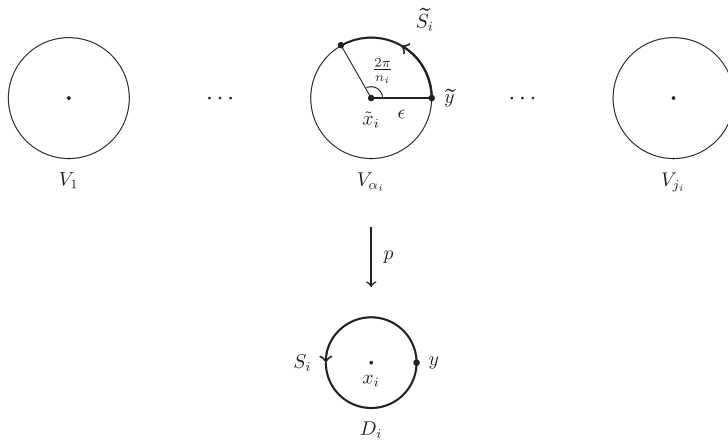


图 1

接着我们求 $\omega_f(S_i)$. 考虑映射 f^{j_i} , 由命题 2.4 知

$$f^{j_i}|_{V_{\alpha_i}}: V_{\alpha_i} \rightarrow V_{\alpha_i}, \quad re^{i\theta} \mapsto re^{i(\theta+2\pi \cdot \frac{p}{n_i})}$$

是以 \tilde{x}_i 为中心的旋转, 且 $\gcd\{p, n_i\} = 1$, 所以 $\exists u, v \in \mathbf{Z}$, 使得

$$up - vn_i = 1, \quad (2.1)$$

这里不妨设 u 是满足 (2.1) 的最小正整数, 则有

$$(f^{j_i})^u(\tilde{y}) = (f^{j_i})^u(\epsilon e^{i\theta}) = \epsilon e^{i(\theta + 2\pi \cdot \frac{p}{n_i} \cdot u)} = \epsilon e^{i(\theta + 2\pi \cdot \frac{1}{n_i})},$$

即 $(f^{j_i})^u(\tilde{y})$ 是 \tilde{S}_i 的终点, 由 ω_f 的定义知 $\omega_f(S_i) = uj_i$.

由 (2.1) 有

$$up - vn_i = up - v \frac{n}{j_i} = 1,$$

即有

$$(uj_i)p - vn = \omega_f(S_i)p - vn = j_i.$$

所以 $j_i = \gcd\{\omega_f(S_i), n\}$. 命题得证.

这样就有 $n_i = \frac{n}{j_i} = \frac{n}{\gcd\{\omega_f(S_i), n\}}$. 易知 $n_i \geq 2$, 若不然, 有 $n_i = 1$, 此时 $\omega_f(S_i) \equiv 0 \pmod{n}$, 这说明圆盘 D_i 拓扑等价于包含 $\frac{\Sigma_g}{f}$ 的所有分支点, 与 D_i 的取法矛盾 (商曲面 $\frac{\Sigma_g}{f}$ 的拓扑性质由其亏格 (设为 γ) 和分支点 $B_f = \{x_1, \dots, x_k\}$ 刻画).

定义 2.4 称 $\Sigma_\gamma(n_1, \dots, n_k)$ 为亏格 γ , 带有 k 个分支点且分支指标为 n_1, \dots, n_k 的闭曲面. 如果 $\gamma = 0$, 称 $S^2(n_1, \dots, n_k)$ 为带有 k 个分支点且分支指标为 n_1, \dots, n_k 的 S^2 . 本文约定 $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k \leq n$.

由上面的数据, 就可以给出 Riemann-Hurwitz 公式:

$$\frac{\chi(\Sigma_g)}{n} = \chi\left(\frac{\Sigma_g}{f}\right) - \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right), \quad (2.2)$$

其中 $\chi(\Sigma_g)$ 是曲面 Σ_g 的欧拉示性数, $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$, $\chi\left(\frac{\Sigma_g}{f}\right) = 2 - 2\gamma$.

2.3 周期映射的共轭

定义 2.5 (周期映射共轭) 曲面 Σ_g 上两周期映射 f, f' 称为共轭, 如果存在 Σ_g 上的保定向自同胚 h , 使得 $f' = h \cdot f \cdot h^{-1}$.

定理 2.1 ^[6, §11] 曲面 Σ_g 上两周期映射 f, f' 共轭, 当且仅当

- (i) 映射 f, f' 周期相同,
- (ii) 分支集 $B_f, B_{f'}$ 元素个数相同,
- (iii) 重新排列 $B_{f'}$ 中的元素, 有 $\omega_f(S_i) = \omega_{f'}(S_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

根据定理 2.1 有下列结论.

命题 2.6 若记 $\omega_f(S_i) = \theta_i$, 则数组 $[g; n; \theta_1, \dots, \theta_k]$ 表示曲面 Σ_g 上周期映射的一个共轭类.

对于 $\theta_i = \omega_f(S_i)$ 有下面的简单命题.

命题 2.7 若 D_i 是 $\frac{\Sigma_g}{f}$ 中的小圆盘且只包含一个分支点 x_i , S_i 是 D_i 的边界并规定逆时针方向为正向, $\omega_f(S_i) = \theta_i$, 则 $\sum_{i=1}^k \theta_i \equiv 0 \pmod{n}$.

证 因为 ω_f 是同态映射, 所以 $\sum_{i=1}^k \theta_i = \sum_{i=1}^k \omega_f(S_i) = \omega_f\left(\bigcup_{i=1}^k S_i\right) = \omega_f(\vee^k S^1)$, 其中 $\vee^k S^1$ 是 k 个 S^1 的一点并, 它拓扑等价于包含 $\frac{\Sigma_g}{f}$ 的所有分支点的闭路, 这条闭路同伦于常值闭路, 因此 $\omega_f(\vee^k S^1) \equiv 0 \pmod{n}$, 所以命题得证.

命题 2.8 f 是曲面 Σ_g 上周期为 n 的周期映射, 如果 $\gcd\{d, n\} = 1$, 那么 f^d 也是曲面 Σ_g 上周期为 n 的周期映射.

证 由定义 2.1, $f^n = \text{id}_{\Sigma_g}$, $\forall i \in \mathbf{Z}^+$, $1 \leq i < n$, $f^i \neq \text{id}_{\Sigma_g}$, 且有 $(f^d)^n = f^{dn} = (f^n)^d = \text{id}_{\Sigma_g}$, 如果 $\exists m \in \mathbf{Z}^+$, $1 \leq m < n$, $(f^d)^m = \text{id}_{\Sigma_g}$, 由 $\gcd\{d, n\} = 1$ 知 $m \equiv 0 \pmod{n}$, 与 m 的取法矛盾.

2.4 周期映射的一些性质

命题 2.9^[3] 设 f 是可定向闭曲面 Σ_g 上周期为 n 的保定向的周期映射, 则 Σ_g 在 f 作用下得到的商曲面 $\frac{\Sigma_g}{f} \approx \Sigma_\gamma(n_1, \dots, n_k)$ 当且仅当下列条件成立:

- (i) $\eta = \eta_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), 其中 $\eta = \text{lcm}\{n_1, \dots, n_k\}$, $\eta_i = \text{lcm}\{n_1, \dots, n_{i-1}, \widehat{n}_i, n_{i+1}, \dots, n_k\}$, 这里 \widehat{n}_i 表示去掉 n_i ;
- (ii) $\eta | n$, 如果 $\gamma = 0$, 则 $\eta = n$;
- (iii) $k \neq 1$, 且如果 $\gamma = 0$, 则 $k \geq 3$;
- (iv) 如果 η 是偶数, 设 $\eta = 2^\alpha q$, 其中 $\alpha, q \in \mathbf{Z}^+$, $2 \nmid q$, 则 n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 中能被 2^α 整除的数的个数是偶数.

推论 2.1 当由周期映射得到的商曲面 $\frac{\Sigma_g}{f} \approx S^2(n_1, n_2, n_3)$, 即命题 2.9 中 $\gamma = 0$, $k = 3$ 时, 有 $\text{lcm}\{n_1, n_2\} = \text{lcm}\{n_1, n_3\} = \text{lcm}\{n_2, n_3\} = n$.

引理 2.1^[7] 如果由周期映射得到商曲面 $\frac{\Sigma_g}{f} \approx S^2(n_1, n_2, n_3)$, 则分支指标 n_1, n_2, n_3 以及周期 n 之间满足下列关系:

- (i) 如果 $n_1 | n_2$, 那么 $n_2 = n_3 = n$;
- (ii) 如果 $n_1 = p^m$, p 是素数, 且 $n_1 \nmid n_2$, 则 $n_3 = n$.

证 (i) 由定义 2.4, $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. 若 $n_2 \neq n$, 则 $n_2 < n$, $\text{lcm}\{n_1, n_2\} = n_2 \neq n$, 与推论 2.1 矛盾. 由 $n = \text{lcm}\{n_2, n_3\} = \text{lcm}\{n, n_3\}$, $n_3 \leq n$ 得 $n_3 = n$.

(ii) 由条件可设 $n_2 = p^{m_1} q$, $0 \leq m_1 < m$, $\gcd\{p, q\} = 1$, 则由推论 2.1, 有 $n = \text{lcm}\{n_1, n_2\} = p^m q = \text{lcm}\{p^m, n_3\} = \text{lcm}\{p^{m_1} q, n_3\}$, 所以 $n_3 = p^m q = n$.

3 主要结论

定理 3.1 可定向闭曲面 Σ_g , 亏格 $g \geq 3$, f 是 Σ_g 上周期为 n 的保定向的周期映射, 如果 $n \geq 3(g-1)$, 那么商曲面 $\frac{\Sigma_g}{f} \approx S^2$, 且 f 共轭于下面表 (I)–(III) 所表示的周期映射中的某个周期映射 (记为 f') 的幂, 即 $\exists d \in \mathbf{Z}^+$, $\gcd\{d, n\} = 1$, 以及 Σ_g 上的可定向自同胚 h , 使得 $f = h \cdot f'^d \cdot h^{-1}$, 其中 $I = (n_1, n_2, \dots)$ 是分支指标.

表 1

(I) 对任意 $g \geq 3$, 都有下列情形.

序号	亏格 g	分支指标 I	$[g; n; \theta_1, \theta_2, \theta_3]$
1.1	任意	$(2, 4g, 4g)$	$[g; 4g; 2g, 2g - 1, 1]$
1.2	任意	$(2, 2g + 1, 4g + 2)$	$[g; 4g + 2; 2g + 1, 2g, 1]$
1.3(i)	3λ	$(3, g + 1, 3g + 3)$	$[g; 3g + 3; 2g + 2, 3\lambda, 1]$
1.3(ii)	$3\lambda + 1$	$(3, g + 1, 3g + 3)$	$[g; 3g + 3; g + 1, 3(2\lambda + 1), 1]$
1.4(i)	3λ 或 $3\lambda + 1$	$(3, 3g, 3g)$	$[g; 3g; g, 2g - 1, 1]$
1.4(ii)	$3\lambda + 2$	$(3, 3g, 3g)$	$[g; 3g; 2g, g - 1, 1]$

(II) 当 $n \geq 3g$ 时, 有下列 5 种情形.

序号	亏格 g	分支指标 I	$[g; n; \theta_1, \theta_2, \theta_3]$	序号	亏格 g	分支指标 I	$[g; n; \theta_1, \theta_2, \theta_3]$
1.5	4	$(4, 6, 12)$	$[4; 12; 9, 2, 1]$	1.8	10	$(5, 6, 30)$	$[10; 30; 24, 5, 1]$
1.6	6	$(4, 5, 20)$	$[6; 20; 15, 4, 1]$	1.9	12	$(4, 9, 36)$	$[12; 36; 27, 8, 1]$
1.7	9	$(4, 7, 28)$	$[9; 28; 7, 20, 1]$				

(III) 当 $3(g - 1) \leq n < 3g$ 时, 有下列 22 种情形.

序号	亏格 g	分支指标 I	$[g; n; \theta_1, \theta_2, \theta_3]$	序号	亏格 g	分支指标 I	$[g; n; \theta_1, \theta_2, \theta_3]$
1.10	3	$(4, 8, 8)$	$[3; 8; 2, 5, 1]$	1.18	7	$(4, 10, 20)$	$[7; 20; 5, 14, 1]$
			$[3; 8; 6, 1, 1]$	1.19	9	$(4, 24, 24)$	$[9; 24; 6, 17, 1]$
1.11	3	$(7, 7, 7)$	$[3; 7; 1, 5, 1]$				$[9; 24; 18, 5, 1]$
			$[3; 7; 2, 4, 1]$	1.20	9	$(6, 8, 24)$	$[9; 24; 20, 3, 1]$
1.12	4	$(5, 10, 10)$	$[4; 10; 2, 7, 1]$	1.21	10	$(4, 14, 28)$	$[10; 28; 21, 6, 1]$
			$[4; 10; 8, 1, 1]$	1.22	12	$(5, 7, 35)$	$[12; 35; 14, 20, 1]$
1.13	4	$(9, 9, 9)$	$[4; 9; 4, 4, 1]$	1.23	13	$(4, 18, 36)$	$[13; 36; 9, 26, 1]$
1.14	5	$(6, 12, 12)$	$[5; 12; 10, 1, 1]$	1.24	14	$(5, 8, 40)$	$[14; 40; 24, 15, 1]$
1.15	6	$(5, 15, 15)$	$[6; 15; 3, 11, 1]$	1.25	15	$(6, 7, 42)$	$[15; 42; 35, 6, 1]$
			$[6; 15; 6, 8, 1]$	1.26	15	$(4, 11, 44)$	$[15; 44; 11, 32, 1]$
1.16	6	$(4, 16, 16)$	$[6; 16; 4, 11, 1]$	1.27	16	$(5, 9, 45)$	$[16; 45; 9, 35, 1]$
1.17	7	$(6, 9, 18)$	$[7; 18; 3, 14, 1]$	1.28	18	$(4, 13, 52)$	$[18; 52; 39, 12, 1]$
			$[7; 18; 15, 2, 1]$	1.29	21	$(4, 15, 60)$	$[21; 60; 15, 44, 1]$
序号	亏格 g	分支指标 I	$[g; n; \theta_1, \dots, \theta_4]$	序号	亏格 g	分支指标 I	$[g; n; \theta_1, \dots, \theta_4]$
1.30	3	$(2, 3, 3, 6)$	$[3; 6; 3, 4, 4, 1]$	1.31	4	$(2, 2, 5, 5)$	$[4; 10; 5, 5, 2, 8]$
							$[4; 10; 5, 5, 4, 6]$

推论 3.1 当 $g > 21$ 时,(i) 可定向闭曲面 Σ_g 上周期为 n 的保定向的周期映射, 如果 $n \geq 3(g - 1)$, 则 $n = 4g + 2, 4g, 3g + 3$ 或 $3g$.(ii) 设 f_1, f_2 是 Σ_g 上周期都为 n 的周期映射, 如果 $n \geq 3(g - 1)$, 则 f_2 共轭于 f_1 的一个幂.**注 3.1** 从定理 3.1 可得, 周期稍小一些 (与文 [8] 给出的条件 $n \geq 3g$ 相比), 即 $n \geq 3(g - 1)$ 时, 当曲面亏格较大 ($g > 21$) 时, 任意保定向的周期映射的周期只有 4 种形式, 即 $n = 4g + 2, 4g, 3g + 3$ 或 $3g$. 但当 $g \leq 21$ 时会得到更多不包含在这 4 类周期映射中的情况, 以及出现 4 个分支点的情况. 这说明只有在周期较大时周期映射的共轭类才有比较统一的形式, 而周期较小时情况是复杂的, 甚至还会得到商曲面不是 S^2 的个别情况.

由下面即将给出的定理 3.1 的证明过程, 以及稍后的例 5.1-5.2 的计算过程可得, Harvey^[3] 的结论 (命题 2.9) 给出了闭曲面上周期映射作用下的商曲面及其分支点个数和分支指标的计算依据. 利用命题 2.9 和 Riemann-Hurwitz 公式, 计算是机械进行的, 因此可以借助计算机程序加以辅助计算, 算法正如例 5.1-5.2 的计算过程, 因此对于确定亏格的闭曲面就可以计算出其可以允许的周期映射及对应商曲面的拓扑性质, 进而求得周期映射的共轭类或进行进一步的研究.

4 定理 3.1 的证明

引理 4.1 可定向闭曲面 Σ_g , 亏格为 $g \geq 3$, f 是 Σ_g 上周期为 n 的保定向的周期映射, 如果 $n \geq 3(g-1)$, 那么商曲面 $\frac{\Sigma_g}{f} \approx S^2$, 且分支指标 $I=(n_1, \dots, n_k)$ 是表 2 所列情形 (其中 k 是分支点的个数).

表 2

(a) 当 $k=3$ 时.

序号	g	n	I	序号	g	n	I
1.1	任意	$4g$	$(2, 4g, 4g)$	1.3	$3 \nmid g+1$	$3g+3$	$(3, g+1, 3g+3)$
1.2	任意	$4g+2$	$(2, 2g+1, 4g+2)$	1.4	任意	$3g$	$(3, 3g, 3g)$
1.5	4	12	$(4, 6, 12)$	1.8	10	30	$(5, 6, 30)$
1.6	6	20	$(4, 5, 20)$	1.9	12	36	$(4, 9, 36)$
1.7	9	28	$(4, 7, 28)$	—	—	—	—
1.10	3	8	$(4, 8, 8)$	1.20	9	24	$(6, 8, 24)$
1.11	3	7	$(7, 7, 7)$	1.21	10	28	$(4, 14, 28)$
1.12	4	10	$(5, 10, 10)$	1.22	12	35	$(5, 7, 35)$
1.13	4	9	$(9, 9, 9)$	1.23	13	36	$(4, 18, 36)$
1.14	5	12	$(6, 12, 12)$	1.24	14	40	$(5, 8, 40)$
1.15	6	15	$(5, 15, 15)$	1.25	15	42	$(6, 7, 42)$
1.16	6	16	$(4, 16, 16)$	1.26	15	44	$(4, 11, 44)$
1.17	7	18	$(6, 9, 18)$	1.27	16	45	$(5, 9, 45)$
1.18	7	20	$(4, 10, 20)$	1.28	18	52	$(4, 13, 52)$
1.19	9	24	$(4, 24, 24)$	1.29	21	60	$(4, 15, 60)$

(b) $k=4$ 时.

	g	n	I		g	n	I
1.30	3	6	$(2, 3, 3, 6)$	1.31	4	10	$(2, 2, 5, 5)$

证 首先证明在定理条件下商曲面 $\frac{\Sigma_g}{f} \approx S^2$. 由 Riemann-Hurwitz 公式 (见 (2.2)), 可得

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = \frac{2g-2}{n} + \chi\left(\frac{\Sigma_g}{f}\right). \quad (4.1)$$

假设 $\chi\left(\frac{\Sigma_g}{f}\right) \leq 0$, 则

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \leq \frac{2g-2}{n},$$

由 $n \geq 3(g-1)$ 及 $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k \leq n$, 可知

$$\frac{k}{2} \leq \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \leq \frac{2g-2}{n} \leq \frac{2}{3},$$

因此 $k \leq \frac{4}{3}$, 于是 $k=1$, 与命题 2.9(iii) 矛盾. 所以 $\chi\left(\frac{\Sigma_g}{f}\right) = 2 - 2\gamma > 0$, $\gamma < 1$, 可得 $\gamma = 0$, 即 $\frac{\Sigma_g}{f} \approx S^2$, $\chi\left(\frac{\Sigma_g}{f}\right) = 2$.

再求分支点个数 k . 由 (4.1) 及 $n \geq 3(g-1)$, $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k \leq n$, 可得

$$\frac{k}{2} \leq \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = \chi\left(\frac{\Sigma_g}{f}\right) + \frac{2g-2}{n} = 2 + \frac{2g-2}{n} \leq 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3},$$

于是 $k \leq \frac{16}{3}$, 又由命题 2.9(iii), 当 $\gamma=0$ 时, $k \geq 3$, 所以 k 的可能值为 3, 4, 5. 下面分别进行计算.

(a) $k=3$.

(4.1) 可化为

$$\sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 + \frac{2g-2}{n}. \quad (4.2)$$

进而

$$3\left(1 - \frac{1}{n_1}\right) \leq \sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 + \frac{2g-2}{n} \leq 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3},$$

解得 $n_1 \leq 9$, 所以 $2 \leq n_1 \leq 9$, 下面对 n_1 的不同取值分别进行讨论.

(a.1) $n_1 | n_2$.

由引理 2.1(i) 得 $n_2 = n_3 = n$, (4.2) 可化为

$$2g = n\left(1 - \frac{1}{n_1}\right). \quad (4.3)$$

通过 (4.3) 对每一个 n_1 在给定条件 ($n_1 | n_2$) 下计算 g 与 n 的关系, 注意到定理的限制条件: $n \geq 3(g-1)$, 且 $n \in \mathbf{Z}^+$, 这样就可以计算出满足条件的 g 和 n , 进而得到相应的 $I = (n_1, n_2, n_3)$ 的值. 计算如下:

当 $n_1 = 2$ 时, 由 (4.3) 得 $n = 4g$, 有 $I = (2, 4g, 4g)$ (引理 4.1(1.1)).

当 $n_1 = 3$ 时, 由 (4.3) 得 $n = 3g$, 有 $I = (3, 3g, 3g)$ (引理 4.1(1.4)).

当 $n_1 = 4$ 时, 由 (4.3) 得 $n = \frac{8}{3}g$, 又 $n \geq 3(g-1)$, 得 $g \leq 9$, 且 $n \in \mathbf{Z}^+$, 所以 $g = 3, 6, 9$, 所得数据如表 3 所列.

表 3

g	n	I		g	n	I	
3	8	(4, 8, 8)	(引理 4.1(1.10))	6	16	(4, 16, 16)	(引理 4.1(1.16))
9	24	(4, 24, 24)	(引理 4.1(1.19))	-	-	-	-

当 $n_1 = 5$, 由 (4.3) 得 $n = \frac{5}{2}g \geq 3(g-1)$, 则 $g \leq 6$, 且 $n \in \mathbf{Z}^+$, 所以 $g = 4, 6$, 所得数据如表 4 所列.

表 4

g	n	I		g	n	I	
4	10	(5, 10, 10)	(引理 4.1(1.12))	6	15	(5, 15, 15)	(引理 4.1(1.15))

当 $n_1 = 6$, 由 (4.3) 得 $n = \frac{12}{5}g \geq 3(g-1)$, $g \leq 5$, 则有 $g = 5$, $n = 12$, $I = (6, 12, 12)$ (引理 4.1(1.14))

当 $n_1 = 7$, 由 (4.3) 得 $n = \frac{7}{3}g \geq 3(g-1)$, $g \leq \frac{9}{2}$, 则有 $g = 3$, $n = 7$, $I = (7, 7, 7)$ (引理 4.1(1.11))

当 $n_1 = 8$, 由 (4.3) 得 $n = \frac{16}{7}g \geq 3(g-1)$, $g \leq \frac{21}{5} < 7$, 由于 $n \in \mathbf{Z}^+$, 故没有满足条件的 g .

当 $n_1 = 9$, 由 (4.3) 得 $n = \frac{9}{4}g \geq 3(g-1)$, $g \leq 4$, 则有 $g = 4$, $n = 9$, $I = (9, 9, 9)$ (引理 4.1(1.13)).

(a.2) $n_1 \nmid n_2$.

(a.2.1) 当 n_1 是素数, 即 $n_1 = 2, 3, 5, 7$ 时. 首先由 $n = \text{lcm}\{n_1, n_2\}$ 知 $n = n_1 n_2$, 又由引理 2.1(ii) 得 $n_3 = n = n_1 n_2$, 此时 (4.2) 可化为

$$2g = (n_1 - 1) \left(\frac{n}{n_1} - 1 \right). \quad (4.4)$$

和 (a.1) 的方法类似, 通过 (4.4) 对每一个素数 n_1 在给定条件下计算 g 与 n 的关系, 并结合其他条件计算出 g 和 n , 进而得到相应的 $I = (n_1, n_2, n_3)$ 的值, 计算如下:

当 $n_1 = 2$ 时, 由 (4.4) 得 $n = 4g + 2$, $I = (2, 2g + 1, 4g + 2)$ (引理 4.1(1.2)).

当 $n_1 = 3$ 时, 由 (4.4) 得 $n = 3g + 3$, $I = (3, g + 1, 3g + 3)$, 且由 $n_1 \nmid n_2$ 得 $3 \nmid g + 1$ (引理 4.1(1.3)).

当 $n_1 = 5$ 时, 由 (4.4) 得 $n = \frac{5}{2}g + 5 \geq 3(g-1)$, 且得 $g \leq 16$, 另一方面, 由 $\text{gcd}\{n_1, n_2\} = 1$ 知 $n_1 \neq n_2$, 所以 $n_1 < n_2 = \frac{n}{n_1}$, 即有 $\frac{5}{2}g + 5 = n > n_1^2 = 25$, 有 $g > 8$, 即 $8 < g \leq 16$, 又 $n \in \mathbf{Z}^+$, 所以 $g = 10, 12, 14, 16$. 所得数据如表 5 所列.

表 5

g	n	I		g	n	I	
10	30	(5, 6, 30)	(引理 4.1(1.8))	14	40	(5, 8, 40)	(引理 4.1(1.24))
12	35	(5, 7, 35)	(引理 4.1(1.22))	16	45	(5, 9, 45)	(引理 4.1(1.27))

当 $n_1 = 7$ 时, 由 (4.4) 得 $n = \frac{7}{3}g + 7 \geq 3(g-1)$, 且得 $g \leq 15$, 另一方面, $n_1 < n_2 = \frac{n}{n_1}$, 即有 $n = \frac{7}{3}g + 7 > n_1^2 = 49$, 有 $g > 18$, 所以没有 g 满足条件.

(a.2.2) 如果 $n_1 = 4, 8, 9$, 即 n_1 可以分解为素数的幂的形式. 由引理 2.1(ii) 得 $n_3 = n$, 此时 (4.2) 可化为

$$2g - 1 = n \left(1 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right). \quad (4.5)$$

和上面的计算方法类似, 通过 (4.5) 对 $n_1 = 4, 8, 9$ 在给定条件下分别计算 g 与 n 的关系, 计算如下:

当 $n_1 = 4 = 2^2$ 时, 由 $n_1 \nmid n_2$ 可设 $n_2 = 2\lambda$ 或 λ , $\lambda \in \mathbf{Z}^+$, $2 \nmid \lambda$.

如果 $n_2 = 2\lambda$, 则 $n = \text{lcm}\{n_1, n_2\} = \text{lcm}\{4, 2\lambda\} = 4\lambda = 2n_2$, 由 (4.5) 得 $n = \frac{8g+4}{3}$, 再结合 $n \geq 3(g-1)$ 得 $g \leq 13$, 又 $n \in \mathbf{Z}^+$ 且 $g \geq 3$, 所以有 $g = 4, 7, 10, 13$, 所得数据如表 6 所列.

表 6

g	n	I		g	n	I	
4	12	(4, 6, 12)	(引理 4.1(1.5))	10	28	(4, 14, 28)	(引理 4.1(1.21))
7	20	(4, 10, 20)	(引理 4.1(1.18))	13	36	(4, 18, 36)	(引理 4.1(1.23))

如果 $n_2 = \lambda$, 则 $n = \text{lcm}\{n_1, n_2\} = \text{lcm}\{4, \lambda\} = n_1 n_2 = 4\lambda$, 由 (4.5) 得 $n = \frac{4(2g+3)}{3} = \frac{8}{3}g + 4$, 又 $n \geq 3(g-1)$ 得 $g \leq 21$, 由 $n \in \mathbf{Z}^+$ 知 g 是 3 的倍数, $g = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$, 所得数据如表 7 所列.

表 7

g	n	I		g	n	I	
6	20	(4, 5, 20)	(引理 4.1(1.6))	15	44	(4, 11, 44)	(引理 4.1(1.26))
9	28	(4, 7, 28)	(引理 4.1(1.7))	18	52	(4, 13, 52)	(引理 4.1(1.28))
12	36	(4, 9, 36)	(引理 4.1(1.9))	21	60	(4, 15, 60)	(引理 4.1(1.29))

当 $g = 3$ 时, $n_2 = \frac{n}{n_1} = \frac{12}{4} = 3 < n_1$, 与 $n_1 \leq n_2$ 矛盾, 因此舍去这种情况.

当 $n_1 = 8 = 2^3$ 时, 由 $n_1 \nmid n_2$ 可设 $n_2 = 4\lambda$ 或 2λ 或 $\lambda, \lambda \in \mathbf{Z}^+, 2 \nmid \lambda$. 如果 $n_2 = 4\lambda, n = \text{lcm}\{n_1, n_2\} = \text{lcm}\{8, 4\lambda\} = 8\lambda = 2n_2$, 由 (4.5) 得 $n = \frac{8(2g+1)}{7} \geq 3(g+1)$, $g \leq \frac{29}{5} < 6$, 由 $n \in \mathbf{Z}^+$ 知 $2g+1$ 是 7 的倍数, $g = 3, n = 8, n_2 = \frac{n}{2} = 4 < n_1$, 因此舍去这种情况. 如果 $n_2 = 2\lambda, n = \text{lcm}\{n_1, n_2\} = \text{lcm}\{8, 2\lambda\} = 8\lambda = 4n_2$, 由 (4.5) 得 $n = \frac{8(2g+3)}{7} \geq 3(g+1)$, $g \leq 9$, 由 $n \in \mathbf{Z}^+$ 知 $2g+3$ 是 7 的倍数, 得 $g = 2, 9$. 这两种情况都得到 $n_2 < n_1$, 因此都要舍去. 如果 $n_2 = \lambda, n = \text{lcm}\{n_1, n_2\} = \text{lcm}\{8, \lambda\} = 8\lambda = 8n_2$, 由 (4.5) 得 $n = \frac{8(2g+7)}{7} \geq 3(g+1)$, $g \leq \frac{77}{5} < 16$, 由 $n \in \mathbf{Z}^+$ 知 $2g+7$ 是 7 的倍数, 得 $g = 7, 14$. 这两种情况都得到 $n_2 < n_1$, 因此都要舍去. 总之, 当 $n_1 = 8$ 时没有要求的结果.

当 $n_1 = 9 = 3^2$ 时, 由 $n_1 \nmid n_2$ 可设 $n_2 = 3\lambda + 1$ 或 $3\lambda + 2$ 或 $3\lambda, \lambda \in \mathbf{Z}^+, 3 \nmid \lambda$, 和 $n_1 = 8$ 时同样的计算过程, 最后没有要求的结果.

(a.2.3) 最后讨论 $n_1 = 6$.

由 (4.2), 结合 $n \geq 3(g-1)$, 可得

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{6}, \quad (4.6)$$

考虑到 $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ 得 $6 \leq n_2 \leq 12$, 因为 $n_1 \nmid n_2$, 所以 $n_2 \neq 6, 12$. 如果 $n_2 = 7$, 则 $n = \text{lcm}\{6, 7\} = 42$, 由推论 2.1 得 $n_3 = 42$, 代入 (4.2) 得 $g = 15$, 即有 $g = 15, n = 42, I = (6, 7, 42)$ (引理 4.1(1.25)). 如果 $n_2 = 8$, 则 $n = \text{lcm}\{6, 8\} = 24$, 由推论 2.1 得 $n_3 = 24$, 代入 (4.2) 得 $g = 9$, 即有 $g = 9, n = 24, I = (6, 8, 24)$ (引理 4.1(1.20)). 如果 $n_2 = 9$, 则 $n = \text{lcm}\{6, 9\} = 18$, 由推论 2.1 得 $n_3 = 18$, 代入 (4.2) 得 $g = 7$, 即有 $g = 7, n = 18, I = (6, 9, 18)$ (引理 4.1(1.17)). 如果 $n_2 = 10$, 则 $n = \text{lcm}\{6, 10\} = 30$, 由推论 2.1 得 $n_3 = 30$, 代入 (4.2) 得 $g = \frac{23}{2}$, 舍去. 如果 $n_2 = 11$, 则 $n = \text{lcm}\{6, 11\} = 66$, 由推论 2.1 得 $n_3 = 66$, 代入 (4.2) 得 $g = 25$. 注意到此时 $3(g-1) = 72 > n$, 和定理条件矛盾, 舍去.

$k = 3$ 的情况讨论完毕.

(b) 当 $k = 4$ 时, (4.1) 可化为

$$\sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = \frac{2g-2}{n} + \chi\left(\frac{\Sigma g}{f}\right) = \frac{2g-2}{n} + 2 \leq \frac{8}{3}, \quad (4.7)$$

有

$$\frac{4}{3} \leq \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{n_i}\right) \leq \frac{4}{n_1}, \quad (4.8)$$

所以 $n_1 \leq 3$, $n_1 = 2$ 或 3 . 将 n_1 的值代入 (4.7), 用同样的方法确定 n_2 的取值, 以此类推, 简单计算过程及结果由表 8 呈现.

表 8

$n_1 = 2$	$n_2 = 2$	$n_3 = 2$	$n_4 = 2$	$g = 1, n = 2$
		$n_3 = 3$	$n_4 = 3$	$g = 2, n = 6$
		$n_3 = 4$	$n_4 = 4$	$g = 2, n = 4$
		$n_3 = 5$	$n_4 = 5$	$g = 4, n = 10$
	$n_2 = 3$	$n_3 = 3$	$n_4 = 6$	$g = 3, n = 6$
$n_1 = 3$	$n_2 = 3$	$n_3 = 3$	$n_4 = 3$	$g = 2, n = 3$

这里讨论的是 $g \geq 3$ 的曲面, 故当 $k = 4$ 时有下面两种情况.

表 9

g	n	I		g	n	I	
3	6	(2, 3, 3, 6)	(引理 4.1(1.30))	4	10	(2, 2, 5, 5)	(引理 4.1(1.31))

(c) 当 $k = 5$ 时, (4.1) 可化为

$$\sum_{i=1}^5 \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = \frac{2g-2}{n} + \chi\left(\frac{\sum g}{f}\right) = \frac{2g-2}{n} + 2 \leq \frac{8}{3}, \quad (4.9)$$

有

$$\frac{7}{3} \leq \sum_{i=1}^5 \frac{1}{n_i} \leq \frac{5}{n_1},$$

于是 $n_1 \leq \frac{15}{7} < 3$, 所以 $n_1 = 2$, 代入 (4.9) 相继得到 $n_2 = n_3 = 2$, 再将 $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ 代入 (4.9), 整理可得

$$\frac{5}{6} \leq \left(\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5}\right) \leq \frac{2}{n_4}, \quad (4.10)$$

则 $n_4 \leq \frac{12}{5} < 3$, 所以 $n_4 = 2$. 代入 (4.9) 得 $n_5 \leq 3$. (i) $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 2$, 与命题 2.9(iv) 矛盾. (ii) $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$, $n_5 = 3$ 与命题 2.9(i) 矛盾. 所以没有 5 个分支点的情况. 引理 4.1 证完.

定理 3.1 的证明 (1) 当分支点个数为 $k=3$ 时. 我们知道, 分支指标等于周期时, 相应的分支点 (设为 x_i) 是不动点, 即 $f(x_i) = x_i$. 由引理 4.1 知, 当 $\frac{\sum g}{f} \approx S^2(n_1, n_2, n_3)$ 时, 总是有不动点, 此时 $n_3 = n$, 由 $\gcd\{\theta_3, n\} = \frac{n}{n_3} = 1$, θ_3 可能取值是与 n 互素的整数, 因此只要选取恰当的幂就有 $\theta_3 = 1$, 这里不妨直接设 $\theta_3 = 1$, θ_3 取其他值得到的是 $\theta_3 = 1$ 时对应的周期映射的幂的共轭类. 正是这样的假设可知, 这个幂就是和周期 n 互素的整数. 下面对引理 4.1 中所列情形分别计算. 用到的公式有

$$\gcd\{\theta_i, n\} = \frac{n}{n_i}, \quad (4.11)$$

$$\sum_{i=1}^k \theta_i \equiv 0 \pmod{n}. \quad (4.12)$$

(1.1) g 任意, $n = 4g$, $I = (2, 4g, 4g)$, 此时 $\gcd\{\theta_1, n\} = \frac{n}{n_1} = 2g$, 所以 $\theta_1 = 2g$, 又 $\theta_3 = 1$, 由 $\sum_{i=1}^3 \theta_i \equiv 0 \pmod{4g}$ 得 $\theta_2 = 2g - 1$, 且满足 (4.11). 于是得到亏格为 g 的可定向闭曲面上周期为 $4g$ 的周期映射的共轭类: $[g; 4g; 2g, 2g - 1, 1]$ (定理 3.1(1.1)).

(1.2) g 任意, $n = 4g + 2$, $I = (2, 2g + 1, 4g + 2)$, 此时 $\gcd\{\theta_1, n\} = \frac{n}{n_1} = 2g + 1$, 所以 $\theta_1 = 2g + 1$, 又 $\theta_3 = 1$, 由 $\sum_{i=1}^3 \theta_i \equiv 0 \pmod{4g + 2}$ 得 $\theta_2 = 2g$, 且满足 (4.11). 于是得到亏格为 g 的可定向闭曲面上周期为 $4g + 2$ 的周期映射的共轭类 $[g; 4g + 2; 2g + 1, 2g, 1]$ (定理 3.1(1.2)).

(1.3) $3 \nmid g + 1$, $n = 3g + 3$, $I = (3, g + 1, 3g + 3)$, 计算得 $\theta_1 = g + 1$ 或 $2(g + 1)$, 又 $\theta_3 = 1$, 代入 (4.12) 得 $\theta_2 = 2g + 1$ 或 g . 得到下面两组数据:

$$(A) [g; 3g + 3; g + 1, 2g + 1, 1], \quad (B) [g; 3g + 3; 2(g + 1), g, 1].$$

注意到 $3 \nmid g + 1$, 设 $g = 3\lambda$ 或 $3\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbf{Z}^+$. 当 $g = 3\lambda$ 时, $2g + 1 = 6\lambda + 1$, 此时 (4.11) 不成立, (B) 不满足, 得 $[g; 3g + 3; 2(g + 1), 3\lambda, 1]$ (定理 3.1(1.3(i))). 当 $g = 3\lambda + 1$ 时, (A) 不满足条件, 得 $[g; 3g + 3; g + 1, 3(2\lambda + 1), 1]$ (定理 3.1(1.3(ii))).

(1.4) g 任意, $n = 3g$, $I = (3, 3g, 3g)$, 和 (1.3) 类似, 由 $\theta_1 = g$ 或 $2g$, $\theta_3 = 1$ 得 $\theta_2 = 2g - 1$ 或 $g - 1$, 得到两组数据:

$$(C) [g; 3g; g, 2g - 1, 1], \quad (D) [g; 3g; 2g, g - 1, 1].$$

考虑 $\gcd\{\theta_2, n\} = \frac{n}{n_2} = 1$ 是否成立. 对 g 的取值进行分类: $g = 3\lambda, 3\lambda + 1, 3\lambda + 2$, $\lambda \in \mathbf{Z}^+$. 当 $g = 3\lambda$ 时, 对 θ_2 的两个取值都有 $\gcd\{\theta_2, n\} = 1$, 故 (C)-(D) 都满足. 如果给 (C) 表示的周期映射作 $g - 1$ 次幂, 则有 $[g; 3g; g(g - 1), (2g - 1)(g - 1), g - 1]$. 注意到

$$\begin{aligned} g(g - 1) &= 3\lambda(3\lambda - 1) = 9\lambda \cdot (\lambda - 1) + 6\lambda = n(\lambda - 1) + 2g \equiv 2g \pmod{n}, \\ (2g - 1)(g - 1) &= n \cdot 6\lambda - n + 1 \equiv 1 \pmod{n}, \end{aligned}$$

因此 (D) 是 (C) 的 $g - 1$ 次幂, 当 $g = 3\lambda$ 时, (C) 和 (D) 共轭. 当 $g = 3\lambda + 1$ 时, $g - 1 = 3\lambda$, (D) 不满足. 当 $g = 3\lambda + 2$ 时, $2g - 1 = 6\lambda + 3$, (C) 不满足.

结论: 当 $g = 3\lambda, 3\lambda + 1$ 时, $[g; 3g; g, 2g - 1, 1]$ (定理 3.1(1.4(i))); 当 $g = 3\lambda + 2$ 时, $[g; 3g; 2g, g - 1, 1]$ (定理 3.1(1.4(ii))).

其他情形是在满足 (4.11)-(4.12) 下的简单计算, 这里省去.

(2) 当分支点个数 $k = 4$ 时. 先计算 $g = 3$, $n = 6$, $I = (n_1, n_2, n_3, n_4) = (2, 3, 3, 6)$ 时的情形. $n_4 = n = 6$, 所以 $\theta_4 = 1$. $n_1 = 2$, $\gcd\{\theta_1, n\} = \frac{6}{2} = 3$, 所以 $\theta_1 = 3$. $n_\alpha = 3$ ($\alpha = 2, 3$), $\gcd\{\theta_\alpha, n\} = \frac{6}{3} = 2$, 所以 $\theta_\alpha = 2$ 或 4 . 再由 $\sum_{i=1}^4 \theta_i \equiv 0 \pmod{6}$ 知 $\theta_2 = \theta_3 = 4$, 即得到一组数据 $[3; 6; 3, 4, 4, 1]$ (定理 3.1(1.30)).

再计算 $g = 4$, $n = 10$, $I = (n_1, n_2, n_3, n_4) = (2, 2, 5, 5)$ 时的情形. $n_\alpha = 2$ ($\alpha = 1, 2$), $\gcd\{\theta_\alpha, n\} = \frac{10}{2} = 5$, 所以 $\theta_\alpha = 5$. $n_\beta = 5$ ($\beta = 3, 4$), $\gcd\{\theta_\beta, n\} = \frac{10}{5} = 2$, 所以 $\theta_\beta = 2$ 或 4 或 6 或 8 . 再由 $\sum_{i=1}^4 \theta_i \equiv 0 \pmod{10}$ 知 $\theta_1 = \theta_2 = 5$, $\theta_3 = 2$, $\theta_4 = 8$ 或 $\theta_1 = \theta_2 = 5$, $\theta_3 = 4$, $\theta_4 = 6$, 即得到两组数据 $[4; 10; 5, 5, 2, 8]$, $[4; 10; 5, 5, 4, 6]$ (定理 3.1(1.31)).

5 具体例子

例 5.1 当 $g = 2$ 时, 如果 f 是可定向闭曲面 Σ_2 上周期为 n 的保定向的周期映射, 则商曲面 $\frac{\Sigma_2}{f}$ 是下表所列情形, 并且 f 一定与表中所给周期映射中的某个周期映射的幂

共轭.

表 10

n	$\frac{\Sigma_2}{f}$	$[g; n; \theta_1, \theta_2, \dots]$	n	$\frac{\Sigma_2}{f}$	$[g; n; \theta_1, \theta_2, \dots]$
2	$\Sigma_1(2, 2)$	$[2; 2; 1, 1]$	—	—	—
2	$S^2(2, 2, 2, 2, 2, 2)$	$[2; 2; 1, 1, 1, 1, 1, 1]$	6	$S^2(3, 6, 6)$	$[2; 6; 4, 1, 1]$
3	$S^2(3, 3, 3, 3)$	$[2; 3; 1, 1, 2, 2]$	6	$S^2(2, 2, 3, 3)$	$[2; 6; 3, 3, 2, 4]$
4	$S^2(2, 2, 4, 4)$	$[2; 4; 2, 2, 1, 3]$	8	$S^2(2, 8, 8)$	$[2; 8; 4, 1, 3]$
5	$S^2(5, 5, 5)$	$[2; 5; 1, 1, 3]$	10	$S^2(2, 5, 10)$	$[2; 10; 5, 4, 1]$

证 当 $g = 2$ 时, $\chi(\Sigma_2) = 2 - 2g = -2$, Riemann-Hurwitz 公式化为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{\chi(\Sigma_2)}{n} = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{-2}{n} = \chi\left(\frac{\Sigma_2}{f}\right). \quad (5.1)$$

如果 $\chi\left(\frac{\Sigma_2}{f}\right) \leq 0$, 由 (5.1) 以及 $n_i \geq 2$, 可得

$$\frac{k}{2} \leq \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \leq \frac{2}{n}, \quad (5.2)$$

因此, $kn \leq 4$. 容易得到满足不等式 $kn \leq 4$ 且 $n > 1, k \neq 1$ (命题 2.9(iii)) 的正整数 n 和 k , 只有 $k = 2, n = 2$, 即周期为 2 的周期映射, 对应商曲面有 2 个分支点, 容易知道分支指标 $n_1 = n_2 = n = 2$, 代入 (5.1) 得 $\chi\left(\frac{\Sigma_2}{f}\right) = 2 - 2\gamma = 0, \gamma = 1$, 整理如下:

$$\overline{n = 2 \mid \frac{\Sigma_2}{f} \approx \Sigma_1(2, 2) \mid [2; 2; 1, 1]}$$

由上面的计算知, 当 $kn > 4$ 时有 $\chi\left(\frac{\Sigma_2}{f}\right) = 2 - 2\gamma > 0, \gamma < 1$, 即此时 $\frac{\Sigma_2}{f} \approx S^2$, $\chi\left(\frac{\Sigma_2}{f}\right) = 2$, Riemann-Hurwitz 公式化为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = \chi\left(\frac{\Sigma_2}{f}\right) + \frac{2}{n} = 2 + \frac{2}{n}. \quad (5.3)$$

Wiman^[2] 指出亏格为 g 的可定向闭曲面上的保定向的周期映射的周期最大为 $4g + 2$, 当 $g = 2$ 时周期最大为 10. 下面对 $2 \leq n \leq 10$ 的整数逐一讨论.

当 $n = 2$ 时, n_i 的可能取值为 2, (5.3) 为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 + \frac{2}{2} = 3. \quad (5.4)$$

将 n_i 的可能取值代入 (5.4) 得 $k = 6, n_i = 2$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). 由 $\gcd\{n, \theta_i\} = \frac{n}{n_i}$ 和 $\sum_{i=1}^6 \theta_i \equiv 0 \pmod{2}$, 可得 $\theta_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

$$\overline{n = 2 \mid \frac{\Sigma_2}{f} \approx S^2(2, 2, 2, 2, 2, 2) \mid [2; 2; 1, 1, 1, 1, 1, 1]}$$

当 $n = 3$ 时, n_i 的可能取值为 3, (5.3) 为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}. \quad (5.5)$$

将 n_i 可能取值代入 (5.5) 得 $k = 4$, $n_i = 3$ ($i = 1, 2, 3, 4$). 由 $\gcd\{n, \theta_i\} = \frac{n}{n_i}$ 和 $\sum_{i=1}^4 \theta_i \equiv 0 \pmod{3}$, 得 $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $\theta_3 = \theta_4 = 2$.

$$\overline{n = 3 \mid \frac{\Sigma_2}{f} \approx S^2(3, 3, 3, 3) \mid [2; 3; 1, 1, 2, 2]}$$

当 $n = 4$ 时, n_i 可能为 2 或 4. (5.3) 为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 + \frac{2}{4} = \frac{5}{2}. \quad (5.6)$$

有两种情况满足 (5.6): $k = 5$, $n_i = 2$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 和 $k = 4$, $n_1 = n_2 = 2$, $n_3 = n_4 = 4$. 第 1 种情况有 $\theta_i = 2$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), 但 $\sum_{i=1}^5 2 \not\equiv 0 \pmod{4}$, 舍去. 第 2 种情况, 由 $\gcd\{n, \theta_i\} = \frac{n}{n_i}$ 和 $\sum_{i=1}^4 \theta_i \equiv 0 \pmod{4}$ 得 $\theta_1 = \theta_2 = 2$, $\theta_3 = 1$, $\theta_4 = 3$.

$$\overline{n = 4 \mid \frac{\Sigma_2}{f} \approx S^2(2, 2, 4, 4) \mid [2; 4; 2, 2, 1, 3]}$$

当 $n = 5$ 时, n_i 的可能取值为 5, (5.3) 为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}. \quad (5.7)$$

将 n_i 可能取值代入 (5.7) 得 $k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 5$. 由 $\gcd\{n, \theta_i\} = \frac{n}{n_i}$ 和 $\sum_{i=1}^3 \theta_i \equiv 0 \pmod{5}$ 得 $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $\theta_3 = 3$ 或 $\theta_1 = \theta_2 = 2$, $\theta_3 = 1$, 即得到周期映射的共轭类 $[2; 5; 1, 1, 3]$ 和 $[2; 5; 2, 2, 1]$, 注意到 $[2; 5; 2, 2, 1]$ 的 3 次幂和 $[2; 5; 1, 1, 3]$ 相等.

$$\overline{n = 5 \mid \frac{\Sigma_2}{f} \approx S^2(5, 5, 5) \mid [2; 5; 1, 1, 3]}$$

当 $n = 6$ 时, n_i 的可能取值为 2, 3, 6. (5.3) 为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 + \frac{2}{6} = \frac{7}{3}. \quad (5.8)$$

将 n_i 可能取值代入 (5.8) 得到 3 种情况:

- (i) $k = 3$, $n_1 = 3$, $n_2 = n_3 = 6$, 计算得 $\theta_1 = 4$, $\theta_2 = \theta_3 = 1$.
- (ii) $k = 4$, $n_1 = n_2 = 2$, $n_3 = n_4 = 3$, 计算得 $\theta_1 = \theta_2 = 3$, $\theta_3 = 2$, $\theta_4 = 4$.
- (iii) $k = 4$, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$, $n_4 = 6$, 此时 $\text{lcm}\{n_1, n_2, n_3\} \neq n$, 舍去这种情况.

$$\overline{n = 6 \mid \frac{\Sigma_2}{f} \approx S^2(3, 6, 6) \mid [2; 6; 4, 1, 1]}$$

$$\overline{\frac{\Sigma_2}{f} \approx S^2(2, 2, 3, 3) \mid [2; 6; 3, 3, 2, 4]}$$

当 $n = 7$ 时, n_i 可能为 7, (5.3) 为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 + \frac{2}{7} = \frac{16}{7}. \quad (5.9)$$

将 n_i 可能取值代入 (5.9) 知, 没有 $k \in \mathbf{Z}^+$ 满足.

当 $n = 8$ 时, n_i 可能为 2, 4, 8. (5.3) 为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 + \frac{2}{8} = \frac{9}{4}, \quad (5.10)$$

将 n_i 可能取值代入 (5.10) 得到下列 3 种情况:

- (i) $k=3, n_1=2, n_2=n_3=8$, 计算得 $\theta_1=4, \theta_2=3, \theta_3=1$.
- (ii) $k=3, n_1=n_2=n_3=4$, 此时 $\text{lcm}\{n_1, n_2\} \neq n$, 舍去这种情况.
- (iii) $k=4, n_1=n_2=n_3=2, n_4=4$, 此时 $\text{lcm}\{n_1, n_2, n_3\} \neq n$, 舍去这种情况.

$$n = 8 \quad \left| \frac{\Sigma_2}{f} \approx S^2(2, 8, 8) \right| [2; 8; 4, 3, 1]$$

当 $n = 9$ 时, n_i 可能为 3, 9. (5.3) 为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 + \frac{2}{9} = \frac{20}{9}. \tag{5.11}$$

将 n_i 可能取值代入 (5.11) 得 $k=3, n_1=n_2=3, n_3=9$, 此时 $\text{lcm}\{n_1, n_2\} \neq n$, 舍去这种情况.

当 $n = 10$ 时, n_i 可能为 2, 5, 10. (5.3) 为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 + \frac{2}{10} = \frac{11}{5}. \tag{5.12}$$

将 n_i 可能取值代入 (5.12) 得 $k=3, n_1=2, n_2=5, n_3=10$, 计算得 $\theta_1=5, \theta_2=4, \theta_3=1$.

$$n = 10 \quad \left| \frac{\Sigma_2}{f} \approx S^2(2, 5, 10) \right| [2; 10; 5, 4, 1]$$

这样例 5.1 的所有情形都计算完毕.

例 5.2 当 $g = 3$ 时, 如果 f 是可定向闭曲面 Σ_3 上周期为 n 的保定向的周期映射, 则商曲面 $\frac{\Sigma_3}{f}$ 是下表所列情形, 并且 f 一定与表中所给周期映射中的某个周期映射的幂共轭.

表 11

n	$\frac{\Sigma_3}{f}$	$[g; n; \theta_1, \theta_2, \dots]$
2	Σ_2	-
2	$\Sigma_1(2, 2, 2, 2)$	$[3; 2; 1, 1, 1, 1]$
3	$\Sigma_1(3, 3)$	$[3; 3; 1, 2]$
4	$\Sigma_1(2, 2)$	$[3; 4; 1, 1]$
2	$S^2(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$	$[3; 2; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$
3	$S^2(3, 3, 3, 3, 3)$	$[3; 3; 1, 1, 1, 1, 2]$
4	$S^2(4, 4, 4, 4)$	$[3; 4; 1, 1, 1, 1], [3; 4; 1, 1, 3, 3]$
4	$S^2(2, 2, 2, 4, 4)$	$[3; 4; 2, 2, 2, 1, 1]$
6	$S^2(2, 2, 6, 6)$	$[3; 6; 3, 3, 1, 5]$
6	$S^2(2, 3, 3, 6)$	$[3; 6; 3, 4, 4, 1]$
7	$S^2(7, 7, 7)$	$[3; 7; 1, 5, 1], [3; 7; 2, 4, 1]$
8	$S^2(4, 8, 8)$	$[3; 8; 2, 5, 1], [3; 8; 6, 1, 1]$
9	$S^2(3, 9, 9)$	$[3; 9; 3, 5, 1]$
12	$S^2(3, 4, 12)$	$[3; 12; 8, 3, 1]$
12	$S^2(2, 12, 12)$	$[3; 12; 6, 5, 1]$
14	$S^2(2, 7, 14)$	$[3; 14; 7, 6, 1]$

证 当 $g = 3$ 时, $\chi(\Sigma_3) = 2 - 2g = -4$. 如果商曲面 $\frac{\Sigma_3}{f}$ 没有分支点, 则 Riemann-Hurwitz 公式化为

$$\chi(\Sigma_3) = n \cdot \chi\left(\frac{\Sigma_3}{f}\right) = n(2 - 2\gamma) = -4,$$

即有 $n(\gamma - 1) = 2$, 由于 $n, \gamma \in \mathbf{Z}^+$, 故得 $n = 2, \gamma = 2$. 此时得到曲面 Σ_3 的一个二重复叠, 商曲面是 Σ_2 .

如果商曲面 $\frac{\Sigma_3}{f}$ 有分支点, 则 Riemann-Hurwitz 公式化为

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{\chi(\Sigma_3)}{n} = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{-4}{n} = \chi\left(\frac{\Sigma_3}{f}\right) = 2 - 2\gamma. \quad (5.13)$$

如果 $\chi\left(\frac{\Sigma_3}{f}\right) \leq 0$, 由 (5.13) 以及 $n_i \geq 2$, 可得

$$\frac{k}{2} \leq \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \leq \frac{4}{n}, \quad (5.14)$$

即得 $kn \leq 8$. 满足不等式 $kn \leq 8$ 且 $n > 1, k \neq 1$ (命题 2.9(iii)) 的正整数 n 和 k 有下列几组:

$$k = 2, n = 2, 3, 4, \quad k = 3, n = 2, \quad k = 4, n = 2.$$

依次讨论: 当 $k = 2, n = 2$ 时, 由命题 2.9 知 $n_1 = n_2 = 2$, 将这些数据代入 (5.13) 得 $\gamma = \frac{3}{2}$, 不是整数, 舍去. 当 $k = 2, n = 3$ 时, $n_1 = n_2 = 3$, 代入 (5.13) 得 $\gamma = 1$, 于是有 $n = 3, \Sigma_1(3, 3), [3; 3; 1, 2]$. 当 $k = 2, n = 4$ 时, $n_1, n_2 = 2$ 或 4, 代入 (5.13) 得满足要求的数据 $n_1 = n_2 = 2, \gamma = 1$, 于是有 $n = 4, \Sigma_1(2, 2), [3; 4; 1, 1]$. 当 $k = 3, n = 2$ 时, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$, 代入 (5.13) 得 $\gamma = \frac{5}{4}$, 不是整数, 舍去. 当 $k = 4, n = 2$ 时, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$, 代入 (5.13) 得 $\gamma = 1$, 于是有 $n = 2, \Sigma_1(2, 2, 2, 2), [3; 2; 1, 1, 1, 1]$.

另一种情形, $\chi\left(\frac{\Sigma_3}{f}\right) > 0$ 时的计算过程和例 5.1 相似, 这里不再赘述.

参 考 文 献

- [1] Thurston W P. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces [J]. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 1988, 19(2):417–431.
- [2] Wiman A. Über die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte $p = 3$, welche eindeutigen transformationen auf sich zulassen [J]. *Bihang Til Kongl, Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Stockholm*, 1895–1896, 21:1–23.
- [3] Harvey W J. Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surface [J]. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1966, 17(1):86–97.
- [4] Wang S C. Maximum orders of periodic maps on closed surfaces [J]. *Topology and Its Applications*, 1991, 41(3):255–262.
- [5] 李力. 可定向闭曲面上最大阶保定向周期映射的唯一性 [J]. *北京大学学报: 自然科学版*, 1993, 29(1):15–20.
- [6] Nielsen J. Die Struktur periodischer transformationen von Flächen [J]. *Math -Fys Medd Danske Vid Selsk*, 1937, 15:1–77.
- [7] Kulkarni R S. Riemann surfaces admitting large automorphism groups [J]. *Extremal Riemann surfaces*, 1997, 201:63–79.
- [8] Hirose S. On periodic maps over surfaces with large periods [J]. *Tohoku Math J, Second Series*, 2010, 62(1):45–53.
- [9] Robin H. Algebraic geometry [M]. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1977.
- [10] Whyburn G T. Analytic topology [M]. New York: Amer Math Soc, Colloquim, Publications, 1942.

Orientation Preserving Periodic Maps on Orientable Closed Surfaces

SONG Shuai¹

¹School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048, China. E-mail: shuaizi-0317@163.com

Abstract The author investigates the classification of the conjugate classes of orientation preserving periodic maps on orientable closed surfaces. Kulkarni (1997) showed that if g is greater than 3, any periodic map on the oriented surface of genus g with period more than or equal to $4g$ is conjugate to a power of two types of periodic maps. After then Hirose (2010) showed that if g is greater than 12, any periodic map on the surface with period more than or equal to $3g$ is conjugate to a power of one of four types of periodic maps. Following the work of Kulkarni and Hirose, the author gets the similar conclusion of Hirose's when g is greater than 21 if the period is more than or equal to $3(g-1)$. On this condition the author can find more cases which are not included in the four types of periodic maps.

Keywords Closed surface, Orientable, Periodic map, Orientation preserving, Conjugate classes

2000 MR Subject Classification 57N05, 57M60, 20F38

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 37 No. 4, 2016

by ALLERTON PRESS, INC., USA