数学年刊 A 辑
2017, 38(4):375–390
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2017.0031

$\mathbf{C}^n$ 中 $F(p,q,s)$ 型空间上的 Bergman 型算子*

黎深莲[1]　张学军[2]　徐　思[1]

提要　设 $p>0,\ s\geqslant 0,\ q+s>-1,\ q+n>-1$. 讨论了$\mathbf{C}^n$中单位球上 $F(p,q,s)$ 到本身或 $A(p,q,s)$ 空间到 $L(p,q,s)$ 空间上的 Bergman 型算子的有界性条件.

关键词　Bergman 型算子, $F(p,q,s)$ 空间, 单位球, $A(p,q,s)$ 空间
MR (2010) 主题分类　32A37, 47B38
中图法分类　O174.56
文献标志码　A
文章编号　1000-8314(2017)04-0375-16

1　引　言

设 B 表示$\mathbf{C}^n$中的单位球, $H(B)$ 表示 B 中所有全纯函数的全体. 设 $\mathrm{d}v$ 表示 B 上满足 $v(B)$=1 的规范化 Lebesgue 测度, $\mathrm{d}\sigma$ 表示 B 的边界 S_n 上满足 $\sigma(S_n)$=1 的旋转不变规范化测度.

设 $p>0$ 和 $\alpha>-1$, 加权 Bergman 空间 $A^p_\alpha(B)=L^p_\alpha(B)\cap H(B)$, 其中

$$L^p_\alpha(B)=\Big\{f:\ \|f\|_{p,\alpha}=\Big(\int_B|f(z)|^p\ \mathrm{d}v_\alpha(z)\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty\Big\}\ ,$$

$\mathrm{d}v_\alpha(z)=c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha\ \mathrm{d}v(z)$, 常数 c_α 满足 $\int_B \mathrm{d}v_\alpha(z)=1$. 当 $\alpha=0$ 时, $A^p_\alpha(B)$ 就是 Bergman 空间 $A^p(B)$.

对于 $a\in B$, 定义 B 上的对合自同构

$$\varphi_a(z)=\frac{a-\dfrac{\langle z,a\rangle a}{|a|^2}-\sqrt{1-|a|^2}\Big(z-\dfrac{\langle z,a\rangle a}{|a|^2}\Big)}{1-\langle z,a\rangle},\quad a\neq 0$$

和 $\varphi_0(z)=-z$, 满足 $\varphi_a(0)=a,\ \varphi_a(a)=0,\ \varphi_a=\varphi_a^{-1}$.

设 $p>0,\ s\geqslant 0,\ q+s>-1,\ q+n>-1$. f 被称为属于一般函数空间 $F(p,q,s)$ 是指 $f\in H(B)$ 且满足条件

$$\|f\|_{F(p,q,s)}=\Big\{|f(0)|^p+\sup_{a\in B}\int_B|\nabla f(z)|^p\ (1-|z|^2)^q\ g^s(z,a)\ \mathrm{d}v(z)\Big\}^{\frac{1}{p}}<\infty\ ,$$

其中复梯度 ∇f 和权函数 g 分别为 $\nabla f(z)=\big(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z),\cdots,\frac{\partial f}{\partial z_n}(z)\big),\ g(z,a)=\log\frac{1}{|\varphi_a(z)|}$.

本文 2016 年 1 月 5 日收到, 2016 年 9 月 14 日收到修改稿.
[1]湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙 410006.
E-mail: 201710100077@smail.hunnu.edu.cn; 372613910@qq.com
[2]通讯作者. 湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙 410006. E-mail: xuejunttt@263.net
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11571104) 和湖南省自然科学基金 (No. 2015JJ2095) 的资助.

单位圆盘上的 $F(p,q,s)$ 空间首先是由赵如汉教授在文 [1] 中引入的, 后来许多数学工作者在单位圆盘和$\mathbf{C}^n$中单位球 B 上进行了广泛地研究[2−12], 同时大量与此相关的函数空间也被研究[13−19]. $F(p,q,s)$ 空间包含大量函数空间, 例如 Bergman 空间、Besov 空间、Dirichlet 型空间、H^2 空间、BMOA 空间、Bloch 型空间、Lipschitz 型空间和 Q_s 空间等.

对于 $f\in H(B)$, f 的径向导数定义为 $Rf(z)=\langle\nabla f(z),\overline{z}\rangle=\sum\limits_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)$.

2013 年, 张学军教授等在文 [10] 中给出了 $F(p,q,s)$ 空间的几种等价模, 其中一种是 $\|f\|^p_{F(p,q,s)}$ 和 I_2 是等价的, 其中

$$\mathrm{I}_2=|f(0)|^p+\sup_{a\in B}\int_B|Rf(z)|^p\ (1-|z|^2)^q(1-|\varphi_a(z)|^2)^s\ \mathrm{d}v(z).$$

通过这种等价刻画, 我们引进另一个与 $F(p,q,s)$ 空间密切相关的函数空间 $A(p,q,s)$.

设 $p>0,\ s\geqslant 0,\ q+s>-1,\ q+n>-1$. f 被说成属于 $L(p,q,s)$ 空间是指 f 是 B 上的 Lebesgue 可测函数且满足

$$\|f\|_{L(p,q,s)}=\Big\{\sup_{a\in B}\int_B|f(z)|^p\ (1-|z|^2)^q\ (1-|\varphi_a(z)|^2)^s\ \mathrm{d}v(z)\Big\}^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

空间 $A(p,q,s)=L(p,q,s)\cap H(B)$.

1974 年, Forelli-Rudin 在文 [20] 中引进了投影算子:

$$T_tf(z)=\int_B\frac{f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t}}\ \mathrm{d}v_t(w),\quad t>-1.$$

由于在 Hardy 空间上存在非有界投影, 这说明了 Bergman 空间和 Hardy 空间之间的差异性. 但是, 另一方面, 算子 T_t ($t\neq 0$) 在 Hilbert 空间 $L^2(B)$ 上不是一个正交投影. 为了处理这个, 1979 年, Kolaski 在文 [21] 中就空间 $L^p(\mathrm{d}v_\alpha)$ $(\alpha>-1)$ 上考虑了算子 T_t, 他证明了这些算子是有界的且当 $p=2$ 时 T_t 为正交投影的充要条件为 $t=\alpha$. 1991 年, 朱克和教授在文 [22] 中研究了更一般的 Bergman 型算子:

$$T_{\delta,t}f(z)=\int_B\frac{(1-|z|^2)^\delta\ f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t+\delta}}\ \mathrm{d}v_t(w),\quad t>-1,\ t+\delta>-n-1.$$

基于两个原因, 一是 Bergman 算子的共轭算子是这种形式, 另一个是这些算子能够被用作刻画形如 $(1-|z|^2)^{|\alpha|}D^\alpha f$ 的函数. 由于 Bergman 型算子应用的广泛性, 所以有许多数学工作者在相应函数空间上系统地讨论过其有界性条件. 例如, 朱克和教授在文 [23] 中就空间 $L^p(B,\mathrm{d}v_\alpha)$ $(p\geqslant 1)$ 上讨论了有界性并给出了充要条件; 任广斌教授在文 [24] 中就 Lebesgue 可测混合模空间 $L_{p,q}(\varphi)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty,1\leqslant q\leqslant\infty)$ 上讨论了同样的问题. 本文中, 我们首先探讨从空间 $A(p,q,s)$ 到 $L(p,q,s)$ 的 Bergman 型算子 $T_{\delta,t}$ 的有界性条件, 对所有 $p>0$ 给出了充分条件和必要条件. 进一步, 我们在 $F(p,q,s)$ 上给出了算子 P_t 和 T_t 的有界性条件.

本文中, 我们用符号 $c,\ c',\ c'',\ c'''$ 表示不依赖变量 $z,\ w,\ u,\ a$ 的正的常数, 不同的地方可以表示不同的数. 另外, 如果存在正的常数 A_1 和 A_2, 使得 $A_1E\leqslant F\leqslant A_2E$, 我们称两个量 E 和 F 是等价的, 记为 $E\approx F$.

2　一些引理和证明

为了证明主要结果, 首先给出几个引理.

引理 2.1　设 $p>0,\ s\geqslant 0,\ q+n>-1,\ q+s>-1$.

(1) 若 $f\in F(p,q,s)$, 则存在与 f 无关的常数 c, 使得

$$(1-|z|^2)^{\frac{q+n+1}{p}}|Rf(z)|\leqslant c\|f\|_{F(p,q,s)}\quad \text{对所有 } z\in B \text{ 成立.}$$

(2) 若 $f\in A(p,q,s)$, 则存在与 f 无关的常数 c, 使得

$$(1-|z|^2)^{\frac{q+n+1}{p}}|f(z)|\leqslant c\|f\|_{L(p,q,s)}\quad \text{对所有 } z\in B \text{ 成立.}$$

证　(1) 若 $s>0$, 此结果是文 [3, 引理 2.1] 的结论; 若 $s=0$, 此结果是文 [11, 引理 2.1] 的结论.

(2) 类似 (1) 的证明.

下列引理是非常有用的, 共有 11 种情况, 但下列 8 种是基本的.

引理 2.2　设 $w\in B,\ a\in B,\ \delta>-1,\ r>0,\ t>0,\ r+t-\delta>n+1$. 记 $I_{w,a}=\int_B\frac{(1-|z|^2)^\delta}{|1-\langle z,w\rangle|^t\ |1-\langle z,a\rangle|^r}\mathrm{d}v(z)$, 则下列结果成立:

(1) 当 $r+t-\delta<n+1$ 时, $I_{w,a}\approx 1$.

(2) 当 $r+t-\delta=n+1$ 时, $I_{w,a}\approx\log\dfrac{\mathrm{e}}{|1-\langle w,a\rangle|}$.

(3) 当 $r+t-\delta>n+1$ 和 $t-\delta<n+1$ 以及 $r-\delta<n+1$ 时,

$$I_{w,a}\approx\frac{1}{|1-\langle w,a\rangle|^{t+r-\delta-n-1}}.$$

(4) 当 $t-\delta=n+1>r-\delta$ 时,

$$I_{w,a}\approx\frac{1}{|1-\langle w,a\rangle|^r}\log\frac{\mathrm{e}}{|1-\langle w,\varphi_w(a)\rangle|}.$$

(5) 当 $t-\delta=n+1=r-\delta$ 时,

$$I_{w,a}\approx\frac{1}{|1-\langle w,a\rangle|^{\delta+n+1}}\log\frac{\mathrm{e}}{1-|\varphi_w(a)|^2}.$$

(6) 当 $t-\delta>n+1>r-\delta$ 时,

$$I_{w,a}\approx\frac{1}{(1-|w|^2)^{t-\delta-n-1}\ |1-\langle w,a\rangle|^r}\ .$$

(7) 当 $t-\delta>n+1$ 且 $r-\delta>n+1$ 时,

$$I_{w,a}\approx\frac{1}{(1-|w|^2)^{t-\delta-n-1}\ |1-\langle w,a\rangle|^r}+\frac{1}{(1-|a|^2)^{r-\delta-n-1}\ |1-\langle w,a\rangle|^t}\ .$$

(8) 当 $t-\delta>n+1=r-\delta$ 时,

$$I_{w,a}\approx\frac{1}{(1-|w|^2)^{t-\delta-n-1}\ |1-\langle w,a\rangle|^r}+\frac{1}{|1-\langle w,a\rangle|^t}\log\frac{\mathrm{e}}{1-|\varphi_a(w)|^2}.$$

证　为了证明左端的 “$\geqslant$” 部分, 首先我们给出一些估计.

首先要说明的是: $I_{w,a}$ 一定大于一个与 w 和 a 无关的正数. 实际上, 根据文 [23, 引理 1.8], 可得

$$I_{w,a} \geqslant 2^{-r-t} \int_B (1-|z|^2)^{\delta} \, \mathrm{d}v(z) = n 2^{-t-r} \beta(n, \delta+1) > 0, \tag{2.1}$$

其中 $\beta(\cdot)$ 是 Beta 函数.

通过变量替换 z

(ii) 如果 $t+r-\delta=n+1$, 记 γ 为 Euler 常数. 设 $\log J_k=\log\frac{k\Gamma(k+\delta+n+1-t)\Gamma(k+t)\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(\delta+n+1-t)\Gamma(t)k!\ \Gamma(k+\delta+n+1)}$. 则有

$$\log J_k=\sum_{l=1}^{k}\log\Big(1+\frac{t-1}{l}\Big)+\sum_{l=1}^{k}\log\Big(1-\frac{t}{n+\delta+l}\Big)+\log k$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\log J_k=-\gamma+\sum_{l=1}^{\infty}\Big\{\log\Big(1+\frac{t-1}{l}\Big)-\frac{t-1}{l}\Big\}+t\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{l}-\frac{1}{n+\delta+l}\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\Big\{\log\Big(1-\frac{t}{n+\delta+l}\Big)+\frac{t}{n+\delta+l}\Big\}=q_0\ (\text{有限实数})\ \text{和}$$

$$\log J_k-q_0=O\Big(\frac{1}{k}\Big)\Rightarrow J_k=\mathrm{e}^{q_0}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big\}.$$

这表明 $\Big|\frac{\Gamma(k+\delta+n+1-t)\Gamma(k+t)\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(\delta+n+1-t)\Gamma(t)k!\ \Gamma(k+\delta+n+1)}-\frac{\mathrm{e}^{q_0}}{k}\Big|=\Big|\frac{J_k}{k}-\frac{\mathrm{e}^{q_0}}{k}\Big|\leqslant\frac{c}{k^2}$.

因此我们有: 当 $1-\langle w,a\rangle\to 0$ 时,

$$\frac{\Gamma(n+\delta+1)}{n!\Gamma(\delta+1)}h(w,a)-\mathrm{e}^{q_0}\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle w,a\rangle}\ \to$$

$$1-\mathrm{e}^{q_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{\Gamma(k+\delta+n+1-t)\Gamma(k+t)\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(\delta+n+1-t)\Gamma(t)k!\ \Gamma(k+\delta+n+1)}-\frac{\mathrm{e}^{q_0}}{k}\Big\}=p_0,$$

此处 p_0 是一个有限实数. 因此, 存在常数 $0<r_1<1$, 当 $|1-\langle w,a\rangle|\leqslant r_1$ 时, 有 $\Big|\frac{\Gamma(n+\delta+1)}{n!\Gamma(\delta+1)}h(w,a)-\mathrm{e}^{q_0}\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle w,a\rangle}\Big|<|p_0|+1$.

设 ξ 是复平面上满足 $|\xi|\geqslant 1$ 的点, 则有 $\log|\xi|\leqslant|\log\xi|\leqslant\log|\xi|+\pi$.

取 $0<r_0=\min\big\{r_1,\mathrm{e}^{1-\frac{2(|p_0|+1)}{\mathrm{e}^{q_0}}}\big\}$. 若 $|1-\langle w,a\rangle|\leqslant r_0$, 则

$$\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle w,a\rangle}\Big|\geqslant\log\frac{\mathrm{e}}{|1-\langle w,a\rangle|}\geqslant\frac{2(|p_0|+1)}{\mathrm{e}^{q_0}}$$

$$\Rightarrow\frac{\Gamma(n+\delta+1)}{n!\Gamma(\delta+1)}|h(w,a)|\geqslant\mathrm{e}^{q_0}\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle w,a\rangle}\Big|-|p_0|-1\geqslant\frac{\mathrm{e}^{q_0}}{2}\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle w,a\rangle}\Big|.$$

若 $|1-\langle w,a\rangle|>r_0$, 通过 (2.1) 就有

$$I_{w,a}\geqslant n2^{-t-r}\beta(n,\delta+1)\geqslant n2^{-t-r}\beta(n,\delta+1)\Big(\log\frac{\mathrm{e}}{r_0}+\pi\Big)^{-1}\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle w,a\rangle}\Big|.$$

这意味着

$$I_{w,a}\geqslant|f(w,a)|=|h(w,a)|\geqslant c\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle w,a\rangle}\Big|\geqslant c\log\frac{\mathrm{e}}{|1-\langle w,a\rangle|}.\tag{2.6}$$

这个方向其余的证明省略.

下面我们证明另一个方向的估计, 即 “$\leqslant$” 部分.

当 $r-\delta<n+1<t-\delta$ 时, 就 $n=1$ 的情形, 赵如汉教授在文 [27] 中利用圆的一种剖分法证过 “$\leqslant$” 部分. 下面我们用其他方法证明一般情形的结果.

如果 $t+r-2\delta-2n-2\geqslant 0$, 根据文 [28, 命题 1.4.10], 可得

$$\int_B\frac{(1-|u|^2)^{\delta}}{|1-\langle w,u\rangle|^{2\delta+2n+2-t-r}|1-\langle u,\varphi_w(a)\rangle|^r}\ \mathrm{d}v(u)$$

$$\leqslant 2^{t+r-2\delta-2n-2}\int_B\frac{(1-|u|^2)^{\delta}}{|1-\langle u,\varphi_w(a)\rangle|^r}\ \mathrm{d}v(u)\leqslant c.$$

如果 $t+r-2\delta-2n-2<0$, 我们取 $1<\frac{\delta+n+1}{t+r-\delta-n-1}<p_1<\frac{\delta+n+1}{r}$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$ 使得 $p_1r-\delta-n-1<0$ 和 $q_1(2\delta+2n+2-t-r)-\delta-n-1<0$. 根据 Holder 不等式以及文 [28, 命题 1.4.10], 有

$$\begin{aligned}&\int_B \frac{(1-|u|^2)^\delta}{|1-\langle w,u\rangle|^{2\delta+2n+2-t-r}|1-\langle u,\varphi_w(a)\rangle|^r}\,\mathrm{d}v(u)\\ \leqslant{}& \Big\{\int_B \frac{(1-|u|^2)^\delta\,\mathrm{d}v(u)}{|1-\langle w,u\rangle|^{q_1(2\delta+2n+2-t-r)}}\Big\}^{\frac{1}{q_1}}\Big\{\int_B \frac{(1-|u|^2)^\delta\,\mathrm{d}v(u)}{|1-\langle u,\varphi_w(a)\rangle|^{p_1r}}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\leqslant c.\end{aligned}\tag{2.7}$$

由 (2.2) 和 (2.7), 可得

$$I_{w,a}\leqslant \frac{c}{(1-|w|^2)^{t-\delta-n-1}\,|1-\langle w,a\rangle|^r}.\tag{2.8}$$

由 (2.3) 和 (2.8), 可得

$$I_{w,a}\approx \frac{1}{(1-|w|^2)^{t-\delta-n-1}|1-\langle w,a\rangle|^r}.$$

对任意 $z_1\in B$, $z_2\in B$ 和 $z_3\in B$, 设非迷向伪双曲度量

$$\mathrm{d}(z_1,z_2)=|\langle z_1-z_2,z_1\rangle|+|\langle z_1-z_2,z_2\rangle|,$$

则根据文 [29] 可得, 存在常数 $c_d>0$, 使得

$$\mathrm{d}(z_1,z_3)\leqslant c_d\{\mathrm{d}(z_1,z_2)+\mathrm{d}(z_2,z_3)\}$$

以及

$$|1-\langle z_1,z_2\rangle|\approx 1-|z_1|^2+\mathrm{d}(z_1,z_2)\approx 1-|z_2|^2+\mathrm{d}(z_1,z_2).$$

对任意 $w\in B$ 和 $a\in B$, 设

$$\Omega_1=\Big\{z: z\in B \text{ 且 } \mathrm{d}(z,w)\leqslant \frac{\mathrm{d}(w,a)}{2c_d}\Big\}.$$

根据文 [29] 中的引理 3.3, 若 $z\in\Omega_1$, 则

$$|1-\langle z,w\rangle|\leqslant c|1-\langle w,a\rangle|\leqslant c'|1-\langle z,a\rangle|.$$

这意味着

$$|1-\langle z,a\rangle|>c''\{1-|z|^2+|1-\langle w,a\rangle|\},\tag{2.9}$$

$$|1-\langle z,w\rangle|>\frac{1}{4}\{(1-|w|^2)+|1-\langle z,w\rangle|\}.\tag{2.10}$$

若 $z\in B-\Omega_1$, 则

$$|1-\langle z,w\rangle|>c''\{|1-\langle w,a\rangle|+1-|z|^2\},\tag{2.11}$$

$$|1-\langle z,a\rangle|>\frac{1}{4}\{(1-|a|^2)+|1-\langle z,a\rangle|\}.\tag{2.12}$$

当 $t-n>\delta+1>0$ 和 $r-n>\delta+1>0$ 时, 由 (2.9)–(2.12) 以及文 [29] 中引理 2.2

($s=0$ 情形, 或者利用文 [28] 中的命题 1.4.10), 可得

$$\begin{aligned}
I_{w,a} \leqslant & \int_{\Omega_1} \frac{c(1-|z|^2)^{\delta}}{|1-\langle z,w\rangle|^t(|1-\langle w,a\rangle|+1-|z|^2)^r}\ \mathrm{d}v(z) \\
& + \int_{B-\Omega_1} \frac{c(1-|z|^2)^{\delta}}{(|1-\langle w,a\rangle|+1-|z|^2)^t|1-\langle z,a\rangle|^r}\ \mathrm{d}v(z) \\
\leqslant & \int_0^1 \frac{2nc'\rho^{2n-1}(1-\rho^2)^{\delta}}{(|1-\langle w,a\rangle|+1-\rho^2)^r}\Big\{\int_{S_n}\frac{1}{(|1-\rho\langle\xi,w\rangle|+1-|w|^2)^t}\mathrm{d}\sigma(\xi)\Big\}\mathrm{d}\rho \\
& + \int_0^1 \frac{2nc'\rho^{2n-1}(1-\rho^2)^{\delta}}{(|1-\langle w,a\rangle|+1-\rho^2)^t}\Big\{\int_{S_n}\frac{1}{(|1-\rho\langle\xi,a\rangle|+1-|a|^2)^r}\mathrm{d}\sigma(\xi)\Big\}\mathrm{d}\rho \\
\leqslant & \int_0^1 \frac{c''\rho(1-\rho^2)^{\delta}}{(|1-\langle w,a\rangle|+1-\rho^2)^r(1-|w|^2+1-\rho^2|w|^2)^{t-n}}\ \mathrm{d}\rho \\
& + \int_0^1 \frac{c''\rho(1-\rho^2)^{\delta}}{(|1-\langle w,a\rangle|+1-\rho^2)^t(1-|a|^2+1-\rho^2|a|^2)^{r-n}}\ \mathrm{d}\rho \\
\leqslant & \int_0^1 \frac{c'''x^{\delta}}{(|1-\langle w,a\rangle|+x)^r(1-|w|^2+x)^{t-n}}\ \mathrm{d}x \\
& + \int_0^1 \frac{c'''x^{\delta}}{(|1-\langle w,a\rangle|+x)^t(1-|a|^2+x)^{r-n}}\ \mathrm{d}x \\
\leqslant & \frac{1}{|1-\langle w,a\rangle|^r(1-|w|^2)^{t-n}}\int_0^1\frac{c'''x^{\delta}\ \mathrm{d}x}{(1+x(1-|w|^2)^{-1})^{t-n}} \\
& + \frac{1}{|1-\langle w,a\rangle|^t(1-|a|^2)^{r-n}}\int_0^1\frac{c'''x^{\delta}\ \mathrm{d}x}{(1+x(1-|a|^2)^{-1})^{r-n}} \\
\leqslant & \frac{c'''B(\delta+1,t-\delta-n-1)}{|1-\langle w,a\rangle|^r(1-|w|^2)^{t-\delta-n-1}}+\frac{c'''B(\delta+1,r-\delta-n-1)}{|1-\langle w,a\rangle|^t(1-|a|^2)^{r-\delta-n-1}},
\end{aligned}\tag{2.13}$$

由 (2.13) 和 (2.3)–(2.4), 有

$$I_{w,a}\approx\frac{1}{(1-|w|^2)^{t-\delta-n-1}\ |1-\langle w,a\rangle|^r}+\frac{1}{(1-|a|^2)^{r-\delta-n-1}\ |1-\langle w,a\rangle|^t}\ .$$

其余情形的证明这里略去. 这个引理的证明完成.

引理 2.3　若 $\alpha>-1$ 且 $f\in A^1_\alpha$, 则

$$f(z)=\int_B\frac{f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}\ \mathrm{d}v_\alpha(w)\quad 对所有\ z\in B\ 成立.$$

证　这是文 [23] 中的定理 2.2.

3　主要结果和证明

从文 [23] 中的定理 2.10 可知: 当 $p\geqslant 1$ 时, $T_{\delta,t}$ 在 $L(p,q,0)$ 上有界的充要条件为 $-p\delta<q+1<p(t+1)$. 因此, 本文中从 $A(p,q,s)$ 到 $L(p,q,s)$ 时只需考虑 $s>0$ 的情形.

定理 3.1　设 $p>0,\ s>0,\ q+s>-1,\ q+n>-1$.

(1) 如果参数 δ 和 t 满足

$$\delta > \max\Big\{ -\frac{q+s+1}{p}, -\frac{q+n+1}{p}\Big\}$$

且

$$t-\max\{p-1,0\}\delta > \max\Big\{1,\frac{1}{p}\Big\}\max\{q+s,q+n\}+\max\Big\{\frac{1}{p}-1,0\Big\}(n+1),$$

则 $T_{\delta,t}$ 是 $A(p,q,s)$ 到 $L(p,q,s)$ 的有界算子.

(2) 如果 $T_{\delta,t}$ 是 $L(p,q,s)$ 上的有界算子, 则

$$\delta > \max\Big\{ -\frac{q+s+1}{p}, -\frac{q+n+1}{p}\Big\}.$$

证 (1) 当 $g\in A(p,q,s)$ 时, 根据引理 2.1, 可得

$$|g(z)|\leqslant \frac{c\|g\|_{L(p,q,s)}}{(1-|z|^2)^{\frac{q+n+1}{p}}} \quad \text{对所有 } z\in B \text{ 成立}. \tag{3.1}$$

若 $p>1$, 题设条件 $t-(p-1)\delta>q+s$ 和 $p\delta>-q-s-1$ 意味着可以选到

$$0<\sigma<\frac{t+\delta+1}{p'}=\frac{(t+\delta+1)(p-1)}{p}. \tag{3.2}$$

通过 (3.2), Holder 不等式以及文 [28] 中的命题 1.4.10, 可得

$$\begin{aligned}|T_{\delta,t}g(z)|^p &\leqslant c(1-|z|^2)^{p\delta}\Big\{\int_B \frac{(1-|w|^2)^{-p'\sigma}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\delta+t}}\,\mathrm{d}v_{t+\delta}(w)\Big\}^{\frac{p}{p'}}\\ &\quad\times \int_B \frac{|g(w)|^p(1-|w|^2)^{p\sigma-p\delta}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+t+\delta}}\,\mathrm{d}v_{t+\delta}(w)\\ &\leqslant c'(1-|z|^2)^{p\delta-p\sigma}\int_B \frac{|g(w)|^p(1-|w|^2)^{p\sigma-p\delta}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+1+\delta}}\,\mathrm{d}v_{t+\delta}(w).\end{aligned} \tag{3.3}$$

若 $0<s<q+n+1+p\delta$, 题设条件 $q+n+1+p\delta>0$ 和 $q+s+1+p\delta>0$ 意味着可以选到 σ, 满足

$$0<\sigma<\min\Big\{\frac{q+s+1}{p}+\delta\,,\frac{q+n+1-s}{p}+\delta\Big\}. \tag{3.4}$$

因而 $q+s-p\sigma+p\delta>-1$ 且 $2s-(q+s-p\sigma+p\delta)<n+1$. 另一方面, 题设条件 $t-(p-1)\delta>q+s$ 表明 $(n+1+t+\delta)-(q+s-p\sigma+p\delta)>n+1+p\sigma>n+1$. 由 (3.3)–(3.4) 和 Fubini 定理以及引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned}&\int_B |T_{\delta,t}g(z)|^p\frac{(1-|z|^2)^{q+s}(1-|a|^2)^s}{|1-\langle z,a\rangle|^{2s}}\,\mathrm{d}v(z)\\ &\leqslant c'\int_B |g(w)|^p(1-|w|^2)^{p\sigma-p\delta}\Big\{\int_B\frac{(1-|z|^2)^{q+s-p\sigma+p\delta}(1-|a|^2)^s\,\mathrm{d}v(z)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+1+\delta}|1-\langle z,a\rangle|^{2s}}\Big\}\mathrm{d}v_{t+\delta}(w)\\ &\approx \int_B |g(w)|^p\frac{(1-|w|^2)^{q+s}(1-|a|^2)^s}{|1-\langle w,a\rangle|^{2s}}\,\mathrm{d}v(w)\leqslant \|g\|^p_{L(p,q,s)}.\end{aligned}$$

题设条件

$$p\delta>\max\{-q-s-1,-q-n-1\}$$

表明可选到 σ, 满足

$$0<\sigma<\min\Big\{\frac{q+s+1}{p}+\delta,\ \frac{q+n+1}{p}+\delta\Big\}. \tag{3.5}$$

条件

$$t-(p-1)\delta>\max\{q+s,q+n\}$$

意味着

$$(n+t+1+\delta)-(q+s-p\sigma+p\delta)>n+1$$

且

$$t+p\sigma+\delta-p\delta-q-n-1>-1.$$

当

$$s\geqslant q+n+1+p\delta$$

时, 有

$$2s-(q+s-p\sigma+p\delta)>n+1.$$

由 (3.3) 和 (3.5), Fubini 定理, 引理 2.2, (3.1) 及文 [28] 中的命题 1.4.10, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_B |T_{\delta,t}g(z)|^p\frac{(1-|z|^2)^{q+s}(1-|a|^2)^s}{|1-\langle z,a\rangle|^{2s}}\ \mathrm{d}v(z)\\
&\leqslant c'\int_B |g(w)|^p(1-|w|^2)^{p\sigma-p\delta}\Big\{\int_B\frac{(1-|z|^2)^{q+s-p\sigma+p\delta}(1-|a|^2)^s\ \mathrm{d}v(z)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+1+\delta}|1-\langle z,a\rangle|^{2s}}\Big\}\mathrm{d}v_{t+\delta}(w)\\
&\approx\int_B|g(w)|^p\frac{(1-|w|^2)^{q+s}(1-|a|^2)^s}{|1-\langle w,a\rangle|^{2s}}\ \mathrm{d}v(w)\\
&\quad+\int_B|g(w)|^p\frac{(1-|a|^2)^{q+n+1+p\delta-p\sigma}}{|1-\langle w,a\rangle|^{n+t+1+\delta}}\ \mathrm{d}v_{t+p\sigma+\delta-p\delta}(w)\\
&\leqslant\|g\|^p_{L(p,q,s)}+c''\|g\|^p_{L(p,q,s)}\int_B\frac{(1-|w|^2)^{t+p\sigma+\delta-p\delta-q-n-1}}{(1-|a|^2)^{p\sigma-q-n-1-p\delta}|1-\langle w,a\rangle|^{n+t+1+\delta}}\ \mathrm{d}v(w)\\
&\leqslant c'''\|g\|^p_{L(p,q,s)}.
\end{aligned}$$

当 $0<p\leqslant 1$ 时, 题设条件

$$t>\frac{q+s+1}{p}+\frac{n}{p}-(n+1)>\frac{n}{p}-(n+1)$$

意味着 $t'=p(n+1+t)-n-1>-1$. 考虑函数 $G(w)=\frac{g(w)}{(1-\langle w,z\rangle)^{n+t+1+\delta}}$.

根据文 [23] 中的引理 2.15, 可得

$$\int_B|G(w)|(1-|w|^2)^t\ \mathrm{d}v(w)\leqslant\frac{\|G\|_{p,t'}}{c_{t'}}.$$

这表明

$$\begin{aligned}
|T_{\delta,t}g(z)|^p&\leqslant c(1-|z|^2)^{p\delta}\Big\{\int_B\frac{|g(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+1+\delta}}\ \mathrm{d}v_t(w)\Big\}^p\\
&\leqslant c'(1-|z|^2)^{p\delta}\|G\|^p_{p,t'}=c'\int_B\frac{(1-|z|^2)^{p\delta}|g(w)|^p}{|1-\langle w,z\rangle|^{pn+pt+p+p\delta}}\ \mathrm{d}v_{t'}(w).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

当 $0<s<q+n+1+p\delta$ 时, 通过题设条件, 有 $q+s+1+p\delta>-1$ 和 $p(n+t+1+\delta)-(q+s+p\delta)>n+1>2s-(q+s+p\delta)$. 根据 (3.6) 和 Fubini 定理以及引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}
&\int_B |T_{\delta,t}g(z)|^p\ (1-|z|^2)^q\ (1-|\varphi_a(z)|^2)^s\ \mathrm{d}v(z)\\
&\leqslant c'\int_B \Big(\int_B \frac{|g(w)|^p\ (1-|z|^2)^{q+p\delta}}{|1-\langle w,z\rangle|^{p(n+t+1+\delta)}}\ \mathrm{d}v_{t'}(w)\Big)(1-|\varphi_a(z)|^2)^s\ \mathrm{d}v(z)\\
&=c'\int_B |g(w)|^p\Big(\int_B \frac{(1-|z|^2)^{q+s+p\delta}\ (1-|a|^2)^s}{|1-\langle w,z\rangle|^{p(n+t+1+\delta)}\ |1-\langle z,a\rangle|^{2s}}\ \mathrm{d}v(z)\Big)\ \mathrm{d}v_{t'}(w)\\
&\approx \int_B |g(w)|^p\ \frac{(1-|a|^2)^s}{(1-|w|^2)^{pt+pn+p-q-s-1-n}\ |1-\langle w,a\rangle|^{2s}}\ \mathrm{d}v_{t'}(w)\\
&=c_{t'}\int_B |g(w)|^p\ (1-|w|^2)^q\ (1-|\varphi_a(w)|^2)^s\ \mathrm{d}v(w)\leqslant c_{t'}\|g\|^p_{L(p,q,s)}.
\end{aligned}$$

类似地, 当 $s>q+n+1+p\delta$ 时, 由于

$$q+s+1+p\delta>0$$

和

$$pn+pt+p>\max\{q+s+n+1,2n+q+1\},$$

通过 (3.1), (3.3), Fubini 定理, 引理 2.2 以及文 [28] 中的命题 1.4.10, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_B |T_{\delta,t}g(z)|^p\ (1-|z|^2)^q\ (1-|\varphi_a(z)|^2)^s\ \mathrm{d}v(z)\\
&\leqslant c\int_B |g(w)|^p\ \frac{(1-|a|^2)^s}{(1-|w|^2)^{pt+pn+p-q-s-1-n}\ |1-\langle w,a\rangle|^{2s}}\ \mathrm{d}v_{t'}(w)\\
&\quad +c\int_B |g(w)|^p\ \frac{(1-|a|^2)^s}{(1-|a|^2)^{s-q-n-1-p\delta}\ |1-\langle w,a\rangle|^{pt+pn+p+p\delta}}\ \mathrm{d}v_{t'}(w)\\
&\leqslant c\|g\|^p_{L(p,q,s)}+c'\|g\|^p_{L(p,q,s)}\int_B \frac{(1-|a|^2)^{q+n+1+p\delta}\ (1-|w|^2)^{pt+pn+p-q-2n-2}}{|1-\langle w,a\rangle|^{pt+pn+p+p\delta}}\ \mathrm{d}v(w)\\
&\leqslant c''\|g\|^p_{L(p,q,s)}\ .
\end{aligned}$$

当 $s=q+n+1+p\delta$ 时, 利用题设条件, 有

$$\begin{aligned}
&pn+pt+p-q-2n-2>-1,\\
&q+s+p\delta>-1,\ (pn+pt+p+p\delta)-(q+s+p\delta)>n+1=2s-(q+s+p\delta),\\
&(pn+pt+p-p\delta-2q-2n-2)-(pn+pt+p-q-2n-2)<n+1.
\end{aligned}$$

由 (3.1), (3.6), 引理 2.2, 文 [23, 命题 1.13, 引理 1.2–1.3] 以及文 [28] 中的命题 1.4.10,

并结合 Holder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_B |T_{\delta,t}g(z)|^p\ (1-|z|^2)^q\ (1-|\varphi_a(z)|^2)^s\ \mathrm{d}v(z)\\
&\leqslant c'\int_B |g(w)|^p\Big(\int_B \frac{(1-|z|^2)^{q+s+p\delta}(1-|a|^2)^s}{|1-\langle w,z\rangle|^{p(n+t+1+\delta)}|1-\langle z,a\rangle|^{2s}}\ \mathrm{d}v(z)\Big)\mathrm{d}v_{t'}(w)\\
&\approx \int_B \frac{|g(w)|^p\ (1-|a|^2)^s}{(1-|w|^2)^{pt+pn+p-q-s-1-n}\ |1-\langle w,a\rangle|^{2s}}\ \mathrm{d}v_{t'}(w)\\
&\quad+\int_B \frac{|g(w)|^p\ (1-|a|^2)^s}{|1-\langle w,a\rangle|^{pt+pn+p+p\delta}}\log\frac{\mathrm{e}}{1-|\varphi_a(w)|^2}\ \mathrm{d}v_{t'}(w)\\
&\leqslant c_{t'}\|g\|^p_{L(p,q,s)}+c_{t'}\int_B \frac{|g(\varphi_a(u))|^p(1-|a|^2)^{q+n+1}(1-|u|^2)^{t'}}{|1-\langle u,a\rangle|^{pt+pn+p-p\delta}}\log\frac{\mathrm{e}}{1-|u|^2}\ \mathrm{d}v(u)\\
&\leqslant c_{t'}\|g\|^p_{L(p,q,s)}+c\|g\|^p_{L(p,q,s)}\int_B \frac{(1-|u|^2)^{pn+pt+p-q-2n-2}}{|1-\langle u,a\rangle|^{pt+pn+p-p\delta-2q-2n-2}}\log\frac{\mathrm{e}}{1-|u|^2}\ \mathrm{d}v(u)\\
&\leqslant c''\|g\|^p_{L(p,q,s)}.
\end{aligned}$$

故

$$\|T_{\delta,t}g\|_{L(p,q,s)}\leqslant c\|g\|_{L(p,q,s)},$$

即 $T_{\delta,t}$ 是 $A(p,q,s)$ 到 $L(p,q,s)$ 的有界算子.

(2) 如果 $T_{\delta,t}$ 是 $L(p,q,s)$ 上的有界算子, 我们讨论 δ 和 t 必须满足的条件.

取 $f(z)=(1-|z|^2)^{\frac{q+n+1}{p}}$, 由文 [28] 中的命题 1.4.10, 可得 $\|f\|^p_{L(p,q,s)}\leqslant c$.
另一方面, 由 $t+\frac{q+n+1}{p}>-1$, 有

$$T_{\delta,t}f(z)=c_t(1-|z|^2)^\delta\int_B \frac{(1-|w|^2)^{t+\frac{q+n+1}{p}}}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+t+\delta}}\ \mathrm{d}v(w)=\frac{c_t(1-|z|^2)^\delta}{c_{t+\frac{q+n+1}{p}}}.$$

这意味着

$$\begin{aligned}
c\|T_{\delta,t}\|^p&\geqslant \int_B |T_{\delta,t}f(z)|^p(1-|z|^2)^q(1-|\varphi_0(z)|^2)^s\mathrm{d}v(z)\\
&=\frac{c_t^p}{c^p_{t+\frac{q+n+1}{p}}}\int_B (1-|z|^2)^{q+s+p\delta}\ \mathrm{d}v(z),
\end{aligned}$$

因而必须有 $q+s+1+p\delta>0$. 另一方面,

$$c\|T_{\delta,t}\|^p\geqslant \frac{c_t^p}{c^p_{t+\frac{q+n+1}{p}}}\int_B \frac{(1-|z|^2)^{q+s+p\delta}(1-|a|^2)^s}{|1-\langle z,a\rangle|^{2s}}\ \mathrm{d}v(z)\quad 对所有\ a\in B\ 成立.$$

因而根据文 [28] 中的命题 1.4.10 可知

$$q+n+1+p\delta\geqslant 0.$$

下面证明等式不成立.

对任意 $w\in B$, 取

$$g_w(z)=\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{\frac{q+n+1}{p}}}.$$

根据文 [12] 中的引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned}&\int_B |g_w(z)|^p(1-|z|^2)^q(1-|\varphi_a(z)|^2)^s\ \mathrm{d}v(z)\\ \leqslant&\int_B \frac{(1-|z|^2)^{q+s}(1-|a|^2)^s}{|1-\langle z,a\rangle|^{2s}|1-\langle z,w\rangle|^{q+n+1}}\ \mathrm{d}v(z)\\ \leqslant&\ c.\end{aligned}\tag{3.7}$$

另一方面, 由计算可得

$$\begin{aligned}T_{\delta,t}g_w(z)&=\int_B \frac{(1-|z|^2)^{\delta}\ \mathrm{d}v_t(u)}{(1-\langle z,u\rangle)^{n+t+1+\delta}(1-\langle u,w\rangle)^{\frac{q+n+1}{p}}}\\ &=(1-|z|^2)^{\delta}\ H_w(z).\end{aligned}$$

如果

$$\delta=-\frac{q+n+1}{p},$$

取

$$w=z=a,$$

由

$$n+t+1-\frac{q+n+1}{p}>0,$$

Taylor 展开以及文 [23] 中的 (1.21) 和 (1.23) 并结合 Stirling 公式, 可得

$$\begin{aligned}H_a(a)&=\sum_{|\alpha|\geqslant 0}\frac{\Gamma(|\alpha|+\frac{q+n+1}{p})\Gamma(n+t+1-\frac{q+n+1}{p}+|\alpha|)}{(\alpha!)^2\Gamma(\frac{q+n+1}{p})\Gamma(n+t+1-\frac{q+n+1}{p})}|a^\alpha|^2\int_B |u^\alpha|^2\ \mathrm{d}v_t(u)\\ &=\frac{\Gamma(n+t+1)}{\Gamma(\frac{q+n+1}{p})\Gamma(n+t+1-\frac{q+n+1}{p})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{q+n+1}{p})\Gamma(n+t+1-\frac{q+n+1}{p}+k)}{k!\Gamma(n+t+1+k)}|a|^{2k}\\ &\approx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a|^{2k}}{k+1}\approx\log\frac{2}{1-|a|^2}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

对 $a\in B$ 和 $r>0$, 设

$$D(a,r)=\{z: z\in B \text{ 和 } \gamma(z,a)<r\}$$

表示 a 点的 Bergman 球, 其中 $\gamma(\cdot)$ 是 Bergman 距离.

由 (3.7)–(3.8), $T_{\delta,t}$ 的有界性以及文 [23] 中的引理 2.20 和引理 2.24, 可得

$$\begin{aligned}
c\|T_{\delta,t}\|^p &\geqslant \|T_{\delta,t}g_a\|^p_{L(p,q,s)}\\
&\geqslant \int_B |T_{\delta,t}g_a(z)|^p(1-|z|^2)^q(1-|\varphi_a(z)|^2)^s\ \mathrm{d}v(z)\\
&= \int_B |H_a(z)|^p(1-|z|^2)^{-n-1}(1-|\varphi_a(z)|^2)^s\mathrm{d}v(z)\\
&\geqslant \int_{D(a,1)} |H_a(z)|^p(1-|z|^2)^{-n-1}(1-|\varphi_a(z)|^2)^s\ \mathrm{d}v(z)\\
&\approx (1-|a|^2)^{-n-1}\int_{D(a,1)}|H_a(z)|^p\ \mathrm{d}v(z)\\
&\geqslant c'|H_a(a)|^p \approx \log^p\frac{2}{1-|a|^2}.
\end{aligned}$$

当 $|a|\to 1^-$ 时立即导出矛盾. 这表明

$$q+n+1+p\delta>0.$$

该定理得证.

对于 $t>-1$, 下面考虑算子

$$P_tg(z)=\int_B\frac{(1-|w|^2)^t\ Rg(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+t}}\ \mathrm{d}v(w),\quad z\in B,\ g\in H(B).$$

类似于定理 3.1 的证明, 可得如下结果.

定理 3.2 设 $p>0,\ s\geqslant 0,\ q+s>-1,\ q+n>-1$. 如果

$$t>\max\left\{1,\frac{1}{p}\right\}\max\{q+s,q+n\}+\max\left\{\frac{1}{p}-1,0\right\}(n+1),$$

则 P_t 在 $F(p,q,s)$ 上有界.

下面我们考虑 T_t 在 $F(p,q,s)$ 上的有界性.

定理 3.3 设 $p>0,\ s\geqslant 0,\ q+s>p-1,\ q+n>p-1$. 如果

$$t+1>\max\left\{1,\frac{1}{p}\right\}\max\{q+s,q+n\}+\max\left\{\frac{1}{p}-1,0\right\}(n+1),$$

则 T_t 在 $F(p,q,s)$ 上有界.

证 若 $f\in F(p,q,s)$, 根据引理 2.1, 可得

$$|Rf(z)|\leqslant\frac{c\|f\|_{F(p,q,s)}}{(1-|z|^2)^{\frac{q+n+1}{p}}},\quad z\in B. \tag{3.9}$$

因此, 只要

$$\beta>\frac{q+n+1}{p}-1,$$

则

$$f\in A^1_\beta.$$

根据引理 2.3, 可得

$$Rf(z)=\int_B\frac{f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\beta}}\ \mathrm{d}v_\beta(w),\quad z\in B.$$

鉴于 $Rf(0)=0$, 根据 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned}f(z)-f(0)&=\int_0^1\frac{Rf(\rho z)}{\rho}\,\mathrm{d}\rho=\int_0^1\frac{Rf(\rho z)-Rf(0)}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^1\Big\{\int_B Rf(w)\Big(\frac{1}{(1-\langle\rho z,w\rangle)^{n+\beta+1}}-1\Big)\mathrm{d}v_\beta(w)\Big\}\frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho.\\&=\int_B Rf(w)\Big\{\int_0^1\Big(\frac{1}{(1-\langle\rho z,w\rangle)^{n+\beta+1}}-1\Big)\frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\Big\}\mathrm{d}v_\beta(w).\end{aligned}$$

这表明

$$|f(z)-f(0)|\leqslant c\int_B\frac{|Rf(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta}}\,\mathrm{d}v_\beta(w).\tag{3.10}$$

由于

$$T_tf(z)=\int_B\frac{f(u)\,\mathrm{d}v_t(u)}{(1-\langle z,u\rangle)^{n+t+1}}=\int_B\frac{f(u)-f(0)}{(1-\langle z,u\rangle)^{n+t+1}}\,\mathrm{d}v_t(u)+f(0),\quad z\in B,$$

根据 (3.10), Fubini 定理和引理 2.2 可知, 当 $\beta>t+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}|RT_tf(z)|&=(n+1+t)\Big|\int_B\frac{\{f(u)-f(0)\}\langle z,u\rangle}{(1-\langle z,u\rangle)^{n+t+2}}\,\mathrm{d}v_t(u)\Big|\\&\leqslant c\int_B|Rf(w)|\Big\{\int_B\frac{\mathrm{d}v_t(u)}{|1-\langle z,u\rangle|^{n+t+2}|1-\langle u,w\rangle|^{n+\beta}}\Big\}\mathrm{d}v_\beta(w)\\&\leqslant c'\int_B|Rf(w)|\Big\{\frac{(1-|w|^2)^{-\beta+t+1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+2}}+\frac{(1-|z|^2)^{-1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta}}\Big\}\mathrm{d}v_\beta(w).\end{aligned}\tag{3.11}$$

接下来, 我们选择充分大的 β, 利用 (3.9) 和 (3.11), 余下的证明类似于定理 3.1 的证明. 本定理得证.

致谢 感谢审稿人的有益建议!

参 考 文 献

[1] Zhao Ruhan. On a general family of function spaces [J]. *Ann Acad Sci Math Diss,* 1996, 105:234–242.

[2] Jiang Lijian, He Yuzan. Composition operators from β^α to $F(p,q,s)$ [J]. *Acta Math Sci*, 2003, 23B:252–260.

[3] Zhou Zehua, Chen Renyu. Weighted composition operator from $F(p,q,s)$ to Bloch type spaces on the unit ball [J]. *Int J Math,* 2008, 19:899–926.

[4] Yang Wen. Generalized weighted composition operators from the $F(p,q,s)$ space to the Bloch-type space [J]. *Appl Math & Comput,* 2012, 218:4967–4972.

[5] Ye Sanli. Weighted composition operators from $F(p,q,s)$ into logarithmic Bloch space [J]. *J Kore Math Soc,* 2008, 45:977–991.

[6] Liang Yuxia, Zhou Zehua, Chen Renyu. Product of extended Cesáro operator and composition operator from the logarithmic Bloch-type space to $F(p,q,s)$ space on the unit ball [J]. *J Comput Anal & Appl,* 2013, 15:432–440.

[7] Yang Wen. Volterra composition operators from $F(p,q,s)$ spaces to Bloch-type spaces [J]. *Bull Malay Math Sci,* 2011, 34:267–277.

[8] Liang Yuxia. On an integral-type operator from a weighted-type space to $F(p,q,s)$ on the unit ball [J]. *Complex Var & Ellip Equ,* 2015, 60:282–291.

[9] Zhang Xuejun, Xiao Jianbin. Weighted composition operator between two analytic function spaces [J]. *Adv Math (China)*, 2006, 35:453–462.

[10] Zhang Xuejun, He Chuanzhi, Cao Feifei. The equivalent norms of $F(p,q,s)$ space in $\mathbf{C}^n$ [J]. *J Math Anal Appl,* 2013, 401:601–610.

[11] 张学军, 刘亚玲, 肖建斌. Gleason 问题在多复变 $F(p,q,s)$ 空间上的可解性 [J]. 数学年刊 A 辑, 2010, 31(2):221–228.

[12] 张学军, 李菊香, 肖建斌. $\mathbf{C}^n$中空间 $F(p,q,s)$ 到 $\beta^{\frac{q+n+1}{p}}$ 的复合算子 [J]. 数学年刊 A 辑, 2008, 29(6):789–800.

[13] Zhuo Wenxin, Ouyang Caiheng. Möbius invariant gradient and little α-Bloch functions [J]. *Acta Math Sci,* 2002, 22B:295–301.

[14] Ortega J, Fabrega J. Point-wise multipliers and Corona type decomposition in BMOA [J]. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1996, 46:111–137.

[15] Zhang Xuejun, Xiao Jianbin. Weighted composition operators between μ-Bloch spaces on the unit ball [J]. *Science in China,* 2005, 48A:1349–1368.

[16] Lou Zengjian. Composition operators on Bloch type spaces [J]. *Analysis,* 2003, 23:81–95.

[17] Wulan Hasi. Compactness of the composition operators from the Bloch space B to Q_k spaces [J]. *Acta Math Sinica (English Series),* 2005, 21:1415–1424.

[18] Ouyang Caiheng, Yang Weisheng, Zhao Ruhan. Characterizations of Bergman spaces and Bloch space in the unit ball of $\mathbf{C}^n$ [J]. *Trans Amer Math Soc,* 1995, 347:4301–4319.

[19] Shi Jihuai, Luo Luo. Composition operators on the Bloch space of several complex variables [J]. *Acta Math Sin (English series),* 2000, 16:85–98.

[20] Forelli F, Rudin W. Projections on spaces of holomorphic functions on balls [J]. *Indiana Univ Math J,* 1974, 24:593–602.

[21] Kolaski C. A new look at a theorem of Forelli and Rudin [J]. *Indiana Univ Math J,* 1979, 28:495–499.

[22] Zhu Kehe. A Forelli-Rudin type theorem with applications [J]. *Complex Variables,* 1991, 16:107–113.

[23] Zhu Kehe. Spaces of holomorphic functions in the unit ball [M]. New York: Springer-Verlag, 2005.

[24] Ren Guangbin, Shi Jihuai. Bergman type operator on mixed spaces with applications [J]. *Chin Ann Math Ser B,* 1997, 18:265–276.

[25] Krantz S. Function Theory of several complex variables [M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 1982.

[26] Zhu Kehe. Holomorphic Besov spaces on bounded symmetric domains (II) [J]. *Indiana Univ Math J,* 1995, 44:1017–1031.

[27] Zhao Ruhan. Distances from Bloch functions to some Mobius invariant spaces [J]. *Ann Acad Sci Fen Math,* 2008, 33:303–313.

[28] Rudin W. Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$ [M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

[29] Ortega J, Fabrega J. Corona type decomposition in some Besov spaces [J]. *Math Scind,* 1996, 78:93–111.

The Bergman Type Operators on the $F(p, q, s)$ Type Spaces in $\mathbf{C}^n$

LI Shenlian[1] ZHANG Xuejun[2] XU Si[1]

[1]College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410006, China.
E-mail: 201710100077@smail.hunnu.edu.cn; 372613910@qq.com

[2]Corresponding author. College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410006, China. E-mail: xuejunttt@263.net

Abstract Let $p > 0$, $s \geqslant 0$, $q + s > -1$, $q + n > -1$. In the paper, the conditions of boundedness for the Bergman type operators on $F(p, q, s)$ space or from $A(p, q, s)$ space to $L(p, q, s)$ space are discussed on the unit ball in $\mathbf{C}^n$.

Keywords Bergman type operators, $F(p, q, s)$ space, Unit ball, $A(p, q, s)$ space

2010 MR Subject Classification 32A37, 47B38

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 38 No. 4, 2017
by ALLERTON PRESS, INC., USA