数学年刊 A 辑
2017, 38(4):419–432
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2017.0034

求解 Lavrentiev 迭代方程的多尺度快速配置算法*

杨素华[1] 欧阳兆福[1] 罗兴钧[1] 彭玉兵[1]

提要 考虑了第一类 Fredholm 积分方程的求解. 采用有矩阵压缩策略的多尺度配置方法来离散 Lavrentiev 迭代方程, 在积分算子是弱扇形紧算子时, 给出近似解的先验误差估计, 并给出了改进的后验参数的选择方法, 得到了近似解的收敛率. 最后, 举例说明算法的有效性.

关键词 第一类 Fredholm 积分方程, 迭代 Lavrentiev 正则化方法, 多尺度配置法, 后验参数选择策略
MR (2000) 主题分类 65J20, 65J10
中图法分类 O175.5
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2017)04-0419-14

1 引 言

地球物理、大气科学、图像处理、遥感技术、信号处理以及微分方程中的许多问题可以归结为第一类 Fredholm 积分方程的求解[1−3]. 数值求解第一类 Fredholm 积分方程, 遇到瓶颈问题之一是需要大量的计算. 为了克服这样的瓶颈问题, 本章采用多尺度配置法求解第一类 Fredholm 积分方程[4−7].

快速配置方法[8]是由多尺度分片多项式和多尺度插值泛函[9−11]构成的. 在求解积分方程的传统数值方法中, 配置法广泛地应用在工程领域, 相对于 Galerkin 方法, 在生成离散的系数矩阵时, 配置法可以减少积分计算维数[5], 从而可以节省大量的计算时间.

在文 [12] 中提出了迭代方法去求解病态积分方程. 在文 [4-7] 中提出了多尺度快速配置方法去求解第一类 Fredholm 积分方程.

数值求解第一类 Fredholm 积分方程的瓶颈问题之二在于正则化参数的后验选取策略[13−19]. 现存文献中利用快速配置方法求解 Fredholm 积分方程, 采用的均是 Balance 平衡原理来后验选取正则化参数[4−7], 而且, 为了得到近似解的收敛率, 要求精确解具有较高的光滑度.

文 [13–14] 在 Banach 空间研究了当积分算子为弱扇形算子时, 如何利用正则化方法求解积分方程以及如何给出后验参数选择策略. 但此方法有两个缺陷. 一是无法求出无限维空间中的近似解; 二是由于采用 Morozov 偏差原理来选择正则化参数, 得到的近似解收敛率还有待改进. 本文的工作就解决了这两个问题. 利用多尺度快速配置法在有限维空间求解, 依据 Raus 偏差原理[18], 给出了后验参数选择策略, 在精确解满足与文 [13–14] 同样的光滑度时, 改进了近似解的收敛率. 这里需要指出的是, 配置法虽与文 [4–7] 类似, 但不同的是, 精确解仅满足较弱的光滑度, 且后验参数选择策略不同, 它不是基于平衡原理的.

本文 2015 年 7 月 23 日收到, 2016 年 9 月 26 日收到修改稿.
[1]赣南师范大学数学与计算机科学学院, 江西 赣州 341000.
E-mail: 1044791362@qq.com; ouyangzhaofu@foxmail.com; lxj0298@126.com; pybmaths@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11361005, No. 11761010, No. 61502107), 江西省自然科学基金 (No. 20151BAB201011) 和江西省研究生创新基金 (No. YC2015-S376) 的资助.

2 多尺度配置法

这一节, 我们来介绍一下求解迭代 Lavrentiev 正则化方程的多尺度快速配置法, 并分析截断配置方法计算的复杂性.

假设 E 是 d 维欧氏空间 $R^d(d\geqslant 1)$ 的紧集, $\mathbb{X}$ 是 Banach 空间 $L^\infty(E)$, 其范数用 $\|\cdot\|_\infty$ 表示. 定义 Fredholm 积分算子 $\mathcal{K}$

$$(\mathcal{K}x)(s):=\int_E k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad s\in E,\tag{2.1}$$

这里 $k(s,t)\in C(E\times E)$.

假设 $\mathcal{K}:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ 是线性弱扇形紧算子, 即存在一个常数 $\gamma>0$, 使得对任意的 $\alpha>0$, 都有

$$\|(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}\|_\infty\leqslant\frac{\gamma}{\alpha}.\tag{2.2}$$

下面我们考虑第一类积分方程的求解

$$\mathcal{K}x=y,\tag{2.3}$$

这里 $y\in L^\infty(E)$ 是已知的, 而 $x\in L^\infty(E)$ 是待求的. 显然, 算子 $\mathcal{K}:L^\infty(E)\to L^\infty(E)$ 是紧算子. 因此, 方程 (2.3) 是不适定的.

假设 $\delta>0$, 扰动数据 $y^\delta\in\mathbb{X}$ 满足

$$\|y-y^\delta\|_\infty\leqslant\delta.\tag{2.4}$$

由于方程 (2.3) 是不适定的, 我们用迭代 Lavrentiev 正则化方法来求解方程 (2.3), 其优点是计算量小.

$$x_0^{\alpha,\delta}=0,\quad (\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})x_m^{\alpha,\delta}=\alpha x_{m-1}^{\alpha,\delta}+y^\delta,\quad m=1,2,\cdots,\tag{2.5}$$

从 (2.5) 可得

$$x_m^{\alpha,\delta}=\sum_{i=1}^m\alpha^{i-1}(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-i}y^\delta.\tag{2.6}$$

为了采用配置法数值求解 (2.5), 我们定义 $\mathbb{N}:=\{1,2,\cdots\}$, $\mathbb{N}_0:=\{0,1,2,\cdots\}$ 以及 $\mathbb{Z}_n:=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$. 假设 $\mathbb{X}_n$ 是次数不超过 r 的多项式空间的多尺度序列, 且满足以下多尺度空间分解

$$\mathbb{X}_n=\mathbb{W}_0\oplus^\perp\mathbb{W}_1\oplus^\perp\cdots\oplus^\perp\mathbb{W}_n,\tag{2.7}$$

其中 $\mathbb{W}_0=\mathbb{X}_0$. 定义 $s(n):=\dim\mathbb{X}_n$ 和 $\omega(i):=\dim\mathbb{W}_i$, 则有[5] $s(n)\sim\mu^n$ 及 $\omega(i)\sim\mu^i$, 这里, μ 是大于 1 的整数, $a\sim b$ 表示存在正数 e_1,e_2, 使得 $e_1a\leqslant b\leqslant e_2a$.

假设子空间 $\mathbb{W}_i$ 的基底是 $\{w_{ij}:j\in\mathbb{Z}_{\omega(i)}\}$, 满足

$$(w_{ij},w_{i'j'})=\delta_{ii'}\delta_{jj'},\quad (i,j),(i',j')\in\mathbb{U}_n,$$

这里 $\mathbb{U}_n:=\{(i,j):j\in\mathbb{Z}_{w(i)},i\in\mathbb{Z}_{n+1}\}$. 这意味着 $\mathbb{X}_n=\mathrm{span}\{w_{ij}:(i,j)\in\mathbb{U}_n\}$.

接下来描述多尺度配置泛函空间. 对于每一个 $(i,j)\in\mathbb{U}_n$, 基函数 w_{ij} 的支集用 S_{ij} 来表示. 假设基底 w_{ij} 对应的配置泛函是 ℓ_{ij}, 其中, ℓ_{ij} 是 S_{ij} 上有限个点值泛函的线性组合. $\langle\ell_{ij},w\rangle$ 表示线性泛函 ℓ_{ij} 在 w 上的取值. 对任意 $(i,j)\in\mathbb{U}_n(i>0)$ 和任意次数不超过 $r-1$ 的多项式 q, 有 $\langle\ell_{ij},q\rangle=0$, 并且存在正常数 c, 对任意的 $(i,j)\in\mathbb{U}:=\{(i,j):i\in$

$\mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}_{\omega(i)}\}$, 有

$$\|\ell_{ij}\|_{L^\infty(E)\to R} \leqslant c.$$

同时基函数及与之对应的配置泛函要满足半正交性, 即

$$\langle \ell_{i'j'}, \omega_{ij} \rangle = \delta_{ii'}\delta_{jj'}, \quad (i,j),(i',j') \in \mathbb{U},\ i \leqslant i'.$$

对于每一个子空间 $\mathbb{W}_i$ 都有对应的配置泛函空间

$$\mathbb{V}_i := \operatorname{span}\{\ell_{ij} : j \in \mathbb{Z}_{\omega(i)}\},$$

使得

$$\mathbb{L}_n = \mathbb{V}_0 \oplus^\perp \mathbb{V}_1 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp \mathbb{V}_n = \operatorname{span}\{\ell_{ij} : (i,j) \in \mathbb{U}_n\}.$$

接下来采用配置法求解方程 (2.5). 假设对任意的 $n \in \mathbb{N}_0, \mathcal{P}_n$ 是 $L^\infty(E)$ 到 $\mathbb{X}_n$ 插值投影算子, 定义如下. 设 $y \in L^\infty(E)$, $\mathcal{P}_n y \in \mathbb{X}_n$, 满足

$$\langle \ell_{ij}, y - \mathcal{P}_n y \rangle = 0, \quad (i,j) \in \mathbb{U}_n,$$

且存在一个常数 c, 使得 $\|\mathcal{P}_n\|_\infty \leqslant c$ [4–5]. $\mathcal{Q}_n$ 是 $L^\infty(E)$ 到 $\mathbb{X}_n$ 正交投影算子, 配置法求解方程 (2.5) 就是寻找 $x_{m,n}^{\alpha,\delta} \in \mathbb{X}_n$, 使得

$$x_{0,n}^{\alpha,\delta} = 0, \quad (\alpha\mathcal{I} + \mathcal{K}_n)x_{m,n}^{\alpha,\delta} = \alpha x_{m-1,n}^{\alpha,\delta} + y_n^\delta, \quad m = 1, 2\cdots, \tag{2.8}$$

其中 $\mathcal{K}_n := \mathcal{P}_n\mathcal{K}\mathcal{Q}_n, y_n^\delta := \mathcal{P}_n y^\delta$. 但算子 $\alpha\mathcal{I} + \mathcal{K}_n$ 在多尺度基底和多尺度配置泛函下的矩阵表示是稠密的[4]. 为了压缩稠密的系数矩阵, 采用以下的压缩算子

$$\widetilde{\mathcal{K}}_n = \sum_{i\in\mathbb{Z}_{n+1}} (\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_{i-1})\mathcal{K}\mathcal{Q}_{n-i}, \tag{2.9}$$

其中 $\mathcal{P}_{-1} = 0$. 于是得到求解 (2.5) 的快速配置方法, 即寻找 $\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta} \in \mathbb{X}_n$ 使得

$$\widetilde{x}_{0,n}^{\alpha,\delta} = 0, \quad (\alpha\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{K}}_n)\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta} = \alpha\widetilde{x}_{m-1,n}^{\alpha,\delta} + y_n^\delta, \quad m = 1, 2\cdots. \tag{2.10}$$

接下来我们指出快速配置方法 (2.10) 将导致快速算法. 为了把 (2.10) 改写成等价的矩阵形式, 我们将用到多尺度基底函数和相应的配置泛函, 将 (2.10) 的解表示成

$$\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta} = \sum_{(k,l)\in\mathbb{U}_n} x_{kl}^m w_{kl} \in \mathbb{X}_n. \tag{2.11}$$

引进向量

$$\mathbf{x}_n^m := [x_{kl}^m : (k,l) \in \mathbb{U}_n]^\top, \quad \mathbf{y}_n^\delta := [\langle \ell_{kl}, y^\delta \rangle, (k,l) \in \mathbb{U}_n]^\top, \tag{2.12}$$

以及矩阵

$$\mathbf{E}_n := [\langle \ell_{kl}, w_{ij} \rangle : (k,l),(i,j) \in \mathbb{U}_n], \quad \widetilde{\mathbf{K}}_\mathbf{n} := [\mathcal{K}_{ij,kl} : (i,j),(k,l) \in \mathbb{U}_n], \tag{2.13}$$

其中

$$\mathcal{K}_{ij,kl} = \begin{cases} \langle \ell_{ij}, \mathcal{K}w_{kl} \rangle, & i+k \leqslant n, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{2.14}$$

于是 (2.10) 可以写成如下矩阵形式

$$\mathbf{x}_n^0 = 0, \quad (\alpha\mathbf{E}_n + \widetilde{\mathbf{K}}_\mathbf{n})\mathbf{x}_n^m = \alpha\mathbf{E}_n\mathbf{x}_n^{m-1} + \mathbf{y}_n^\delta, \quad m = 1, 2\cdots, \tag{2.15}$$

由此可以看出, (2.15) 提供了求解 (2.8) 的快速算法, 这是因为 (2.15) 的系数矩阵是稀疏的.

下面定理将分析快速配置算法的复杂性.

定理 2.1 如果矩阵 $\widetilde{\mathbf{K}}_n$ 是通过采用压缩策略 (2.13)–(2.14) 得到的, 那么

$$\mathcal{N}(\widetilde{\mathbf{K}}_\mathbf{n}) \sim (n+1)\mu^n, \quad n \to \infty,$$

其中 $\mathcal{N}(\widetilde{\mathbf{K}}_\mathbf{n})$ 表示求解矩阵 $\widetilde{\mathbf{K}}_\mathbf{n}$ 所要计算的非零元素的个数.

证 对于 $i, i' \in \mathbb{Z}_{n+1}$, 引入分块矩阵 $\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{i},\mathbf{k}} := [\mathcal{K}_{ij,kl} : j \in \mathbb{Z}_{w(i)}, l \in \mathbb{Z}_{w(k)}]$. 根据压缩策略 (2.13)–(2.14), 容易知道 $\mathcal{N}(\widetilde{\mathbf{K}}_\mathbf{n}) = \sum\limits_{i+k \leqslant n} \mathcal{N}(\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{i},\mathbf{k}})$. 注意到 $\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}$ 是 $w(i) \times w(k)$ 矩阵, 且 $w(i) \sim \mu^i$, 由此可得

$$\mathcal{N}(\widetilde{\mathbf{K}}_\mathbf{n}) = \sum_{i+k \leqslant n} \mu^{i+k} \sim (n+1)\mu^n, \quad n \to \infty.$$

定理得证.

3 误差估计

这一节, 我们来分析第二节提出的快速配置算法 (2.10) 的收敛性. 为此, 先给出如下引理.

假设 $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$, r 是正常数, 记 Sobolev 空间 $W^{r,q}(E) := \{u(s) : u^{(r)}(s) \in L^q(E)\}$. 令

$$L^p(E, W^{r,q}(E)) := \{v : v(s,\cdot) \in W^{r,q}(E), \forall s \in E, \|v(s,\cdot)\|_{W^{r,q}(E)} \in L^p(E)\},$$
$$L^p(W^{r,q}(E), E) := \{v : v(\cdot,t) \in W^{r,q}(E), \forall t \in E, \|v(\cdot,t)\|_{W^{r,q}(E)} \in L^p(E)\}.$$

引理 3.1 [4] 假设 $k \in C(E \times E)$, r 是正常数, 则有正的常数 c, 使得

(1) 若 $k \in L^\infty(E, W^{r,1}(E))$, 则 $\|\mathcal{K}(\mathcal{I} - \mathcal{Q}_j)\|_\infty \leqslant ch^r \|k\|_{L^\infty(E, W^{r,1}(E))}$.

(2) 若 $k \in L^\infty(W^{r,1}(E), E)$, 则 $\|(\mathcal{I} - \mathcal{P}_j)\mathcal{K}\|_\infty \leqslant ch^r \|k\|_{L^\infty(W^{r,1}(E), E)}$.

(3) 若 $k \in L^\infty(W^{r,2}(E), E)$, 则 $\|(\mathcal{I} - \mathcal{P}_j)\mathcal{K}\|_{L^2(E) \to L^\infty(E)} \leqslant ch^r \|k\|_{L^\infty(W^{r,2}(E), E)}$.

这里 $h = (\mu^{-\frac{r}{d}})^j$.

有了引理 3.1, 就可以给出如下假设:

(H_1) 假设 $k(\cdot,\cdot) \in W^{r,\infty}(E)$, 则存在正常数 c, 使得以下不等式成立

$$\|\mathcal{K}(\mathcal{I} - \mathcal{Q}_j)\|_\infty \leqslant c\sigma^j, \quad \|(\mathcal{I} - \mathcal{P}_j)\mathcal{K}\|_\infty \leqslant c\sigma^j,$$
$$\|(\mathcal{I} - \mathcal{P}_j)\mathcal{K}\|_{L^2(E) \to L^\infty(E)} \leqslant c\sigma^j,$$

其中 $\sigma := \mu^{-\frac{r}{d}}$.

(H_2) 假设 $x^\dagger \in R(\mathcal{K}^p)$, $p \in (0, m]$, 即存在 $\omega \in L^\infty(E)$, 使得 $x^\dagger = \mathcal{K}^p \omega$.

引理 3.2 假设 (H_1) 成立, 存在正常数 c_0, c_1, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\|\mathcal{K}_n - \widetilde{\mathcal{K}}_n\|_\infty \leqslant c_0 n \sigma^{\frac{n}{2}} \tag{3.1}$$

和

$$\|\mathcal{K} - \widetilde{\mathcal{K}}_n\|_\infty \leqslant c_1 n \sigma^{\frac{n}{2}}. \tag{3.2}$$

证 由 $\mathcal{K}_n$ 和 $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ 的定义得

$$\mathcal{K}_n - \widetilde{\mathcal{K}}_n = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_{i-1})\mathcal{K}(\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}_{n-i}) + \sum_{i=[\frac{n}{2}]+1}^{n} (\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_{i-1})\mathcal{K}(\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}_{n-i}),$$

则有

$$\|\mathcal{K}_n-\widetilde{\mathcal{K}}_n\|_\infty \leqslant \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}\|(\mathcal{P}_i-\mathcal{P}_{i-1})\|_\infty\|\mathcal{K}(\mathcal{Q}_n-\mathcal{Q}_{n-i})\|_\infty + \sum_{i=[\frac{n}{2}]+1}^{n}\|(\mathcal{P}_i-\mathcal{P}_{i-1})\mathcal{K}\|_{L^2(E)\to L^\infty(E)}\|(\mathcal{Q}_n-\mathcal{Q}_{n-i})\|_2. \tag{3.3}$$

由 (H_1) 中第一个不等式可得

$$\|\mathcal{K}(\mathcal{Q}_n-\mathcal{Q}_{n-i})\|_\infty \leqslant \|\mathcal{K}(\mathcal{Q}_n-\mathcal{I})\|_\infty+\|\mathcal{K}(\mathcal{I}-\mathcal{Q}_{n-i})\|_\infty \leqslant c\sigma^{n-i}. \tag{3.4}$$

因为

$$\|(\mathcal{P}_i-\mathcal{P}_{i-1})\mathcal{K}\|_{L^2(E)\to L^\infty(E)} \leqslant \|(\mathcal{P}_i-\mathcal{I})\mathcal{K}\|_{L^2(E)\to L^\infty(E)}+\|(\mathcal{I}-\mathcal{P}_{i-1})\mathcal{K}\|_{L^2(E)\to L^\infty(E)},$$

由 (H_1) 中第三个不等式可得

$$\|(\mathcal{P}_i-\mathcal{P}_{i-1})\mathcal{K}\|_{L^2(E)\to L^\infty(E)} \leqslant c\sigma^i. \tag{3.5}$$

结合 (3.3)–(3.5) 可得 (3.1).

下面证明 (3.2), 由 (H_1) 中第一个不等式可得

$$\|\mathcal{K}-\mathcal{K}_n\|_\infty \leqslant \|(\mathcal{I}-\mathcal{P}_n)\mathcal{K}\|_\infty+\|\mathcal{P}_n\mathcal{K}(\mathcal{I}-\mathcal{Q}_n)\|_\infty \leqslant c\sigma^n. \tag{3.6}$$

根据

$$\mathcal{K}-\widetilde{\mathcal{K}}_n=\mathcal{K}-\mathcal{K}_n+\mathcal{K}_n-\widetilde{\mathcal{K}}_n$$

和 (3.1) 以及 (3.6) 可得 (3.2).

引理 3.3 如果 (2.2) 与 (H_1) 成立, 且 n 满足

$$n\sigma^{\frac{n}{2}} \leqslant \frac{\alpha}{2c_1\gamma}, \tag{3.7}$$

则 $\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n: L^\infty(E)\to L^\infty(E)$ 可逆, 且

$$\|(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{2\gamma}{\alpha},$$

其中 c_1 与引理 3.2 中的 c_1 相同.

证 因为

$$\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n=\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K}+\widetilde{\mathcal{K}}_n-\mathcal{K}=(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})[\mathcal{I}-(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}(\mathcal{K}-\widetilde{\mathcal{K}}_n)],$$

且

$$\|(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}(\mathcal{K}-\widetilde{\mathcal{K}}_n)\|_\infty \leqslant \frac{\gamma}{\alpha}c_1n\sigma^{\frac{n}{2}} \leqslant \frac{1}{2},$$

所以 $\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n$ 可逆, 且

$$\begin{aligned}\|(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-1}\|_\infty &\leqslant \|(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}\|_\infty\frac{1}{1-\|(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}\|_\infty\|\mathcal{K}-\widetilde{\mathcal{K}}_n\|_\infty}\\ &\leqslant \frac{\gamma}{\alpha}\frac{1}{1-\frac{\gamma}{\alpha}c_1n\sigma^{\frac{n}{2}}}\\ &\leqslant \frac{2\gamma}{\alpha}.\end{aligned}$$

引理 3.4 假设 (2.2) 与 (H_1) 成立, 若 n 满足 (3.7), 则有

$$\|\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta}-\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha}\|_\infty \leqslant c_2\frac{\delta}{\alpha}, \tag{3.8}$$

其中 $c_2:=\sum\limits_{i=1}^{m}(2\gamma)^i$.

证 由引理 3.3 得

$$\begin{aligned}\|\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta}-\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha}\|_\infty &= \Big\|\sum_{i=1}^{m}\alpha^{i-1}(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-i}\mathcal{P}_n(y^\delta-y)\Big\|_\infty\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m}\alpha^{i-1}\Big(\frac{2\gamma}{\alpha}\Big)^i\delta\\ &\leqslant c_2\frac{\delta}{\alpha}.\end{aligned}$$

因此结论成立.

为方便起见, 给出如下记号:

$$\begin{aligned}&x_m^{\alpha,\delta}:=h_m^\alpha(\mathcal{K})y^\delta, \quad x_m^\alpha:=h_m^\alpha(\mathcal{K})y,\\ &\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta}:=h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\mathcal{P}_ny^\delta, \quad \widetilde{x}_{m,n}^{\alpha}:=h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}_n})\mathcal{P}_ny,\end{aligned}$$

其中 $h_m^\alpha(t):=\frac{1}{t}[1-(\frac{\alpha}{\alpha+t})^m]$.

引理 3.5 假设 (2.2) 与 (H_1) 成立, 若 n 满足 (3.7), 则有

$$\|\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha}-x_m^{\alpha}\|_\infty \leqslant c_3\frac{n\sigma^{\frac{n}{2}}}{\alpha}, \tag{3.9}$$

其中 $c_3:=(c+c_1)\|x^\dagger\|_\infty\max\{c_2,(2\gamma)^{m+1}\}$.

证 根据 $\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha}$ 和 x_m^α 的定义有

$$\begin{aligned}\|\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha}-x_m^{\alpha}\|_\infty &= \|h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\mathcal{P}_ny-h_m^\alpha(\mathcal{K})y\|_\infty\\ &\leqslant \|h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\widetilde{\mathcal{K}}_nx^\dagger-h_m^\alpha(\mathcal{K})y\|_\infty+\|h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\mathcal{P}_ny-h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\widetilde{\mathcal{K}}_nx^\dagger\|_\infty\\ &= b_1+b_2,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&b_1:=\|h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\widetilde{\mathcal{K}}_nx^\dagger-h_m^\alpha(\mathcal{K})y\|_\infty,\\ &b_2:=\|h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\mathcal{P}_ny-h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\widetilde{\mathcal{K}}_nx^\dagger\|_\infty.\end{aligned}$$

一方面, 根据公式

$$C^m-D^m=\sum_{j=0}^{m-1}C^j(C-D)D^{m-j-1}$$

和 (3.7) 可得

$$\begin{aligned} b_1 &= \|h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\widetilde{\mathcal{K}}_n x^\dagger - h_m^\alpha(\mathcal{K})y\|_\infty \\ &= \|[(\mathcal{I}-\alpha^m(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-m}) - (\mathcal{I}-\alpha^m(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-m})]x^\dagger\|_\infty \\ &= \|\alpha^m[(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-m} - (\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-m}]x^\dagger\|_\infty \\ &\leqslant \alpha^m\|x^\dagger\|_\infty \Big\| \sum_{j=0}^{m-1}(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-j}[(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-1} \\ &\quad - (\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}](\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-(m-j-1)}\Big\|_\infty \\ &\leqslant \frac{(2\gamma)^{m+1}}{\alpha}\|x^\dagger\|_\infty\|\mathcal{K}-\widetilde{\mathcal{K}}_n\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.10}$$

另一方面

$$\begin{aligned} b_2 &= \|h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\mathcal{P}_n y - h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\widetilde{\mathcal{K}}_n x^\dagger\|_\infty \\ &\leqslant \|h_m^\alpha(\widetilde{\mathcal{K}}_n)\|_\infty[\|(\mathcal{P}_n-\mathcal{I})\mathcal{K}\|_\infty + \|\mathcal{K}-\widetilde{\mathcal{K}}_n\|_\infty]\|x^\dagger\|_\infty \\ &\leqslant \frac{c_2}{\alpha}[\|(\mathcal{P}_n-\mathcal{I})\mathcal{K}\|_\infty + \|\mathcal{K}-\widetilde{\mathcal{K}}_n\|_\infty]\|x^\dagger\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.11}$$

由 (3.2), (3.10)–(3.11) 和条件 (H_1) 可得 $\|\widetilde{x}_{m,n}^\alpha - x_m^\alpha\|_\infty \leqslant b_1 + b_2 \leqslant \frac{c_3}{\alpha} n\sigma^{\frac{n}{2}}$.

定理 3.1　假设 (2.2) 与 (H_1) 成立, 且 n 满足 (3.7), 则

$$\|\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta} - x^\dagger\|_\infty \leqslant \|x_m^\alpha - x^\dagger\|_\infty + c_2\frac{\delta}{\alpha} + c_3\frac{n\sigma^{\frac{n}{2}}}{\alpha}. \tag{3.12}$$

证　由

$$\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta} - x^\dagger = (\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta} - \widetilde{x}_{m,n}^\alpha) + (\widetilde{x}_{m,n}^\alpha - x_m^\alpha) + (x_m^\alpha - x^\dagger)$$

以及引理 3.4–3.5, 可得 (3.12).

4　后验参数选择策略

数值求解方程 (2.10) 需要合适的正则化参数. 在本节中, 我们将依据 Raus 偏差原理[18], 提出正则化参数的后验选择策略, 它确保了快速投影方法得到了近似解的收敛率. 为方便起见, 引入下列记号:

$$\varphi(\alpha) := \alpha(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}, \quad \varphi_n(\alpha) := \alpha(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-1},$$
$$\Delta_m^\alpha := \varphi^{m+1}(\alpha)y, \quad \Delta_{m,n}^{\alpha,\delta} := \varphi_n^{m+1}(\alpha)\mathcal{P}_n y^\delta$$

和

$$D(\delta,\sigma^{\frac{n}{2}}) := c_4\delta + c_5 n\sigma^{\frac{n}{2}},$$

其中 $c_4 := (2\gamma)^{m+1}$, $c_5 := \max\{c,(1+\gamma)c_1\}(2\gamma)^{m+1}c$.

以下, 利用 $D(\delta,\sigma^{\frac{n}{2}})$ 来估算 Δ_m^α 与 $\Delta_{m,n}^{\alpha,\delta}$ 的差, 为此, 需要用到以下引理.

引理 4.1 [14]　如果 (2.2) 成立, 那么对任意的满足不等式 $n \geqslant p$ 的自然数 n 和正实数

p, 存在常数 $\gamma(n,p)$, 使得对任意的 $\alpha>0$, 都有

$$\|(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-n}\mathcal{K}^{\mathcal{P}}\|_\infty \leqslant \frac{\gamma(n,p)}{\alpha^{n-p}}, \tag{4.1}$$

其中

$$\gamma(n,p)=\begin{cases}\dfrac{|\sin(\pi p)|}{\pi}\cdot\dfrac{n!}{|p(p-1)\cdots(p-n+1)|}\gamma^{n+1}(1+\gamma)^n\Big[\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{n-p}\Big], & p<n,\\ (1+\gamma)^n, & p=n.\end{cases}$$

引理 4.2 若条件 (2.2) 与 (H_1) 成立, 且整数 n 满足不等式 (3.7), 则有

$$\|\Delta_{m,n}^{\alpha,\delta}-\Delta_m^\alpha\|_\infty \leqslant D(\delta,\sigma^{\frac{n}{2}}) \tag{4.2}$$

和

$$\|\Delta_m^\alpha\|_\infty \leqslant \gamma(m+1,p+1)\|\omega\|_\infty\alpha^{1+p}. \tag{4.3}$$

进一步, 如果 n 满足不等式

$$n\sigma^{\frac{n}{2}} \leqslant \min\Big\{\frac{\delta}{c_5},\frac{\alpha}{2c_1\gamma}\Big\}, \tag{4.4}$$

那么有

$$\lim_{\alpha\to 0}\inf\|\Delta_{m,n}^{\alpha,\delta}\|_\infty \leqslant (c_4+1)\delta. \tag{4.5}$$

证 根据 $\Delta_{m,n}^{\alpha,\delta}$ 和 Δ_m^α 的定义, 有

$$\begin{aligned}\Delta_{m,n}^{\alpha,\delta}-\Delta_m^\alpha &= \varphi_n^{m+1}(\alpha)\mathcal{P}_n y^\delta-\varphi^{m+1}(\alpha)y\\ &= [\varphi_n^{m+1}(\alpha)\mathcal{P}_n(y^\delta-y)]+[\varphi_n^{m+1}(\alpha)(\mathcal{P}_n-\mathcal{I})y]\\ &\quad +[(\varphi_n^{m+1}(\alpha)-\varphi^{m+1}(\alpha))]y\\ &= t_1+t_2+t_3,\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中

$$\begin{aligned}t_1 &:= \varphi_n^{m+1}(\alpha)\mathcal{P}_n(y^\delta-y),\\ t_2 &:= \varphi_n^{m+1}(\alpha)(\mathcal{P}_n-\mathcal{I})y,\\ t_3 &:= [\varphi_n^{m+1}(\alpha)-\varphi^{m+1}(\alpha)]y.\end{aligned}$$

由 (2.4) 和引理 3.3, 有

$$\|t_1\|_\infty = \|\varphi_n^{m+1}(\alpha)\mathcal{P}_n(y^\delta-y)\|_\infty \leqslant (2\gamma)^{m+1}\delta. \tag{4.7}$$

利用条件 (H_1) 和引理 3.3, 有

$$\|t_2\|_\infty = \|\varphi_n^{m+1}(\alpha)(\mathcal{P}_n-\mathcal{I})y\|_\infty \leqslant (2\gamma)^{m+1}c\sigma^n\|x^\dagger\|_\infty. \tag{4.8}$$

接下来我们来估算 $\|t_3\|_\infty$. 根据公式

$$C^m-D^m=\sum_{j=0}^{m-1}C^j(C-D)D^{m-j-1},$$

(2.1) 以及引理 3.2–3.3, 有

$$
\begin{aligned}
\|t_3\|_\infty &= \|[\varphi_n^{m+1}(\alpha) - \varphi^{m+1}(\alpha)]y\|_\infty \\
&= \alpha^{m+1}\|[(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-(m+1)} - (\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-(m+1)}]\mathcal{K}x^\dagger\|_\infty \\
&= \alpha^{m+1}\Big\|\sum_{j=0}^{m}(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-j}[(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-1} - (\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}](\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-(m-j)}\mathcal{K}x^\dagger\Big\|_\infty \\
&\leqslant \alpha^{m+1}\|x^\dagger\|_\infty\sum_{j=0}^{m}\|(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-(j+1)}(\mathcal{K}-\widetilde{\mathcal{K}}_n)(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-(m-j+1)}\mathcal{K}\|_\infty \\
&\leqslant \gamma^{m+1}\|x^\dagger\|_\infty\sum_{j=0}^{m}2^{j+1}(1+\gamma)\|\mathcal{K}-\widetilde{\mathcal{K}}_n\|_\infty \\
&\leqslant \|x^\dagger\|_\infty(1+\gamma)(2\gamma)^{m+1}c_1 n\sigma^{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

因此, 结合 (4.7)–(4.9), 有

$$\|\Delta_{m,n}^{\alpha,\delta} - \Delta_m^\alpha\|_\infty \leqslant \|t_1\|_\infty + \|t_2\|_\infty + \|t_3\|_\infty \leqslant D(\delta,\sigma^{\frac{n}{2}}).$$

由条件 (H_2) 和引理 4.1, 可得

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_m^\alpha\|_\infty &= \|\alpha^{m+1}(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-(m+1)}y\|_\infty \\
&= \|\alpha^{m+1}(\alpha\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-(m+1)}\mathcal{K}^{1+p}\omega\|_\infty \\
&\leqslant \gamma(m+1,1+p)\|\omega\|_\infty\alpha^{1+p}.
\end{aligned}
$$

因此 (4.3) 得证.

由 (4.2)–(4.4) 可得

$$\|\Delta_{m,n}^{\alpha,\delta}\|_\infty \leqslant \|\Delta_{m,n}^{\alpha,\delta} - \Delta_m^\alpha\|_\infty + \|\Delta_m^\alpha\|_\infty \leqslant (c_4+1)\delta + \gamma(m+1,1+p)\|\omega\|_\infty\alpha^{1+p},$$

从而可导出

$$\lim_{\alpha\to 0}\inf\|\Delta_{m,n}^{\alpha,\delta}\|_\infty \leqslant (c_4+1)\delta.$$

以下给出正则化后验参数选取准则.

法则 4.1 (正则化后验参数选取准则)

假设条件 (2.2) 与 (H_1) 成立.

1. 选取常数 $\alpha_0 > 0,\ 0 < q < 1$ 和 $d > c_4 + 1$.

2. 迭代:

(a) 令 $\alpha := \alpha_i = \alpha_0 q^i,\ i = 0, 1, \cdots, N$.

(b) 确定初始离散层 $n = n(\alpha,\delta)$, 使得

$$n\sigma^{\frac{n}{2}} \leqslant \min\Big\{\frac{\delta}{c_5}, \frac{\alpha}{2c_1\gamma}, \delta\Big\}, \tag{4.10}$$

(c) 从以下迭代公式计算 $\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta}$

$$\widetilde{x}_{0,n}^{\alpha,\delta} = 0, \quad \widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta} = \alpha(\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-1}\widetilde{x}_{m-1,n}^{\alpha,\delta} + (\alpha\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{K}}_n)^{-1}\mathcal{P}_n y^\delta, \quad m = 1, 2, \cdots,$$

直到

$$\|\Delta_{m,n}^{\alpha,\delta}\|_\infty \leqslant d\delta. \tag{4.11}$$

注 离散层 n 是依赖于参数 α 与 δ, 而 α 的值依赖于常数 α_0 与 q 的选择. 如果迭代次数 N 比较大时, 可以适当的调整常数 α_0 与 q 的值. 由于满足 (4.10) 的整数 n 不唯一, 一般取使 (4.10) 成立的最小整数 n 作为离散层.

定理 4.1 若条件 (H_1)–(H_2) 及 (2.2) 成立, $\alpha=\alpha_N$ 和 $n=n(\alpha_N,\delta)$ 是依据法则 4.1 选取的, 则对任意的 $p\in(0,m]$, 有

$$\|\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta}-x^\dagger\|_\infty\leqslant O(\delta^{\frac{p}{p+1}}).$$

证 由定理 3.1 以及 (4.10) 可知

$$\|\widetilde{x}_{m,n}^{\alpha,\delta}-x^\dagger\|_\infty\leqslant\|x_m^\alpha-x^\dagger\|_\infty+c_2\frac{\delta}{\alpha}+c_3\frac{n\sigma^{\frac{n}{2}}}{\alpha}\leqslant\|x_m^\alpha-x^\dagger\|_\infty+(c_2+c_3)\frac{\delta}{\alpha},\tag{4.12}$$

一方面, 由 (4.2), (4.4) 和 $\|\Delta_{m,n}^{\alpha_{N-1},\delta}\|_\infty>d\delta$, 可得

$$\begin{aligned}\|\Delta_m^{\alpha_{N-1}}\|_\infty&\geqslant\|\Delta_{m,n}^{\alpha_{N-1},\delta}\|_\infty+\|\Delta_{m,n}^{\alpha_{N-1},\delta}-\Delta_m^{\alpha_{N-1}}\|_\infty\\&\geqslant d\delta-(c_4\delta+c_5n\sigma^{\frac{n}{2}})\\&\geqslant(d-c_4-1)\delta.\end{aligned}\tag{4.13}$$

另一方面, 由引理 4.1, 有

$$\begin{aligned}\|\Delta_m^{\alpha_{N-1}}\|_\infty&=\|\alpha_{N-1}^{m+1}(\alpha_{N-1}\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-(m+1)}\mathcal{K}^{1+p}\omega\|_\infty\\&\leqslant\gamma(m+1,p+1)\|\omega\|_\infty\alpha_{N-1}^{p+1}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

结合 (4.13) 和 (4.14), 有

$$\alpha_{N-1}^{p+1}\geqslant\frac{[d-(c_4+1)]}{\gamma(m+1,p+1)\|\omega\|_\infty}\delta,$$

因此

$$\alpha_N\geqslant q[\frac{[d-(c_4+1)]}{\gamma(m+1,p+1)\|\omega\|_\infty}]^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{1}{p+1}}$$

且

$$\frac{\delta}{\alpha_N}\leqslant O(\delta^{\frac{p}{p+1}}).\tag{4.15}$$

利用插值不等式 $\|\mathcal{K}^{\theta q}z\|_\infty\leqslant C\|\mathcal{K}^qz\|_\infty^\theta\|z\|_\infty^{1-\theta}$, $z\in\mathbb{X}$, 其中 $0<\theta<1$, $q>0$, C 是依赖于 q,θ 的常数, 有

$$\begin{aligned}\|x_m^{\alpha_N}-x^\dagger\|_\infty&=\|{\alpha_N}^m(\alpha_N\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-m}x^\dagger\|_\infty\\&=\|[\alpha_N(\alpha_N\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}\mathcal{K}]^p[\alpha_N(\alpha_N\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}]^{m-p}\omega\|_\infty\\&\leqslant C\|[\alpha_N(\alpha_N\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}]^{m+1}\mathcal{K}^{1+p}\omega\|_\infty^{\frac{p}{p+1}}\|[\alpha_N(\alpha_N\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}]^{m-p}\omega\|_\infty^{\frac{1}{p+1}}\\&\leqslant\|\Delta_m^{\alpha_N}\|_\infty^{\frac{p}{p+1}}\gamma^{\frac{m-p}{1+p}}\|\omega\|_\infty^{\frac{1}{1+p}}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

另外, 由 (4.2) 和 (4.11) 可得

$$\begin{aligned}\|\Delta_m^{\alpha_N}\|_\infty&\leqslant\|\Delta_{m,n}^{\alpha_N,\delta}\|_\infty+\|\Delta_{m,n}^{\alpha_N,\delta}-\Delta_m^{\alpha_N}\|_\infty\\&\leqslant d\delta+(c_4\delta+c_5n\sigma^{\frac{n}{2}})\\&\leqslant(d+c_4+1)\delta.\end{aligned}\tag{4.17}$$

结合 (4.16) – (4.17) 可得

$$\|x_m^{\alpha_N} - x^\dagger\|_\infty \leqslant \gamma^{\frac{m-p}{1+p}} \|\omega\|_\infty^{\frac{1}{1+p}} (d + c_4 + 1)^{\frac{p}{1+p}} \delta^{\frac{p}{1+p}}. \tag{4.18}$$

由 (4.12), (4.15) 和 (4.18) 可知结论成立.

5　数值例子

这一节, 举例来验证算法的有效性和精确性.

考虑如下积分方程的求解

$$(\mathcal{K}x)(s) = y(s), \quad s \in E := [0,1], \tag{5.1}$$

其中 $\mathcal{K} : L^\infty[0,1] \to L^\infty[0,1]$ 是线性紧算子, 定义如下:

$$(\mathcal{K}x)(s) := \int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t, \quad s \in [0,1],$$

其中核函数为[13]

$$k(s,t) = \begin{cases} a \cdot \cosh\Big(w\Big(s - t - \dfrac{1}{2}\Big)\Big), & t \leqslant s, \\ a \cdot \cosh\Big(w\Big(s - t + \dfrac{1}{2}\Big)\Big), & t > s, \end{cases}$$

这里 $w > 0$ 是常数, $a = \frac{1}{2w\sinh\left(\frac{w}{2}\right)}$. 由文 [13] 可知

$$\|(\alpha I + \mathcal{K})^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{\gamma}{\alpha},$$

其中 $\gamma = 1 + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\varepsilon}\big(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\big)$.

以下考虑两种情况:

(1) 取右端函数为[13]

$$y(s) := \frac{\left(-\frac{6}{w^2} + \left(\frac{12}{w^2} + 1\right)s - 3s^2 + 2s^3\right)}{w^2} + Ce^{ws} + De^{-ws},$$

这里 $C = \frac{6e^w}{E},\ D = -\frac{6e^{2w}}{E},\ E = (e^w - e^{2w})w^4$, 此时 (5.1) 的唯一解是

$$x^\dagger(t) = t(2t^2 - 3t + 1).$$

进一步, $x^\dagger \in R(\mathcal{K})$, 这意味着 $\nu = 1$, 收敛率为 $O(\delta^{\frac{1}{2}})$. 取 $w = 1$, 则 $\|y\|_\infty \approx 0.002$.

(2) 取右端函数为

$$y(s) := a(4\sinh(0.5) + 2s^2\sinh(0.5) - \sinh(s - 0.5) - 2\cosh(s - 0.5)),$$

此时 (5.1) 的唯一解是

$$x^\dagger(t) = t^2.$$

进一步, $x^\dagger \in R(\mathcal{K}^2)$, 这意味着 $\nu = 2$, 收敛率为 $O(\delta^{\frac{2}{3}})$. 取 $w = 1$, 则 $\|y\|_\infty \approx 0.3420$.

取扰动右端函数为 $y^\delta = y + \delta \cdot v,\ v \in \mathbb{X}$, 且 $\|v\|_\infty \leqslant 1$,

$$\delta = \|y\|_\infty \cdot \frac{e}{100},$$

这里 $e = 1, 3, 7$.

以下来构造有限维空间 $\mathbb{X}_n$ 以及配置泛函空间 $\mathbb{L}_n$. 假设 $\mathbb{X}_n$ 具有如下分解

$$\mathbb{X}_n = \mathbb{X}_0 \oplus^{\perp} \mathbb{W}_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} \mathbb{W}_n,$$

其中 $\mathbb{X}_0$ 是 E 上的线性多项式空间, 对于 $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{W}_i$ 是空间 $\mathbb{X}_{i-1}$ 在空间 $\mathbb{X}_i$ 中的正交补空间. 给定空间 $\mathbb{X}_1$ 的基底, 则空间 $\mathbb{X}_i (i = 2, 3, \cdots)$ 的基底可以递推构造[11,20]. 选择空间 $\mathbb{X}_0$ 的一组基底为

$$w_{00}(s) = 2 - 3s, \quad w_{01}(s) = -1 + 3s, \quad s \in [0, 1],$$

空间 $\mathbb{W}_1$ 的基底为

$$w_{10}(s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{9}{2}s, & s \in \Big[0, \dfrac{1}{2}\Big], \\ -1 + \dfrac{3}{2}s, & s \in \Big(\dfrac{1}{2}, 1\Big], \end{cases} \qquad w_{11}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}s, & s \in \Big[0, \dfrac{1}{2}\Big], \\ -\dfrac{7}{2} + \dfrac{9}{2}s, & s \in \Big(\dfrac{1}{2}, 1\Big]. \end{cases}$$

那么, 子空间 $\mathbb{W}_i = \mathrm{span}\{\omega_{i,j} : j = 0, 1, 2, \cdots, 2^i - 1\}$ 的基底通过以下公式递推构造

$$w_{i,j}(s) = \begin{cases} w_{i-1,j}(2s), & s \in \Big[0, \dfrac{1}{2}\Big], \\ 0, & s \in \Big(\dfrac{1}{2}, 1\Big], \end{cases} \quad j = 0, 1, \cdots, 2^{i-1} - 1$$

和

$$w_{i,2^{i-1}+j}(s) = \begin{cases} 0, & s \in \Big[0, \dfrac{1}{2}\Big], \\ w_{i-1,j}(2s-1), & s \in \Big(\dfrac{1}{2}, 1\Big], \end{cases} \quad j = 0, 1, \cdots, 2^{i-1} - 1.$$

显然, $\dim \mathbb{X}_n = 2^{n+1}$, 且 $\mathbb{X}_n$ 是 [0,1] 上的分段线性函数空间, 节点为 $\frac{j}{2^n}$, $j = 1, 2, \cdots, 2^n - 1$, 这时 $\mu = 2$.

类似地, 可以构造配置泛函空间, 且有如下分解:

$$\mathbb{L}_n = \mathbb{V}_0 \oplus^{\perp} \mathbb{V}_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} \mathbb{V}_n.$$

首先, 令 $\mathbb{V}_0 = \mathrm{span}\{\ell_{00}, \ell_{01}\}$, 这里 $\ell_{00} = \delta_{\frac{1}{3}}$, $\ell_{01} = \delta_{\frac{2}{3}}$, 且 $\mathbb{V}_1 = \mathrm{span}\{\ell_{10}, \ell_{11}\}$, 其中

$$\ell_{10} = -\frac{3}{2}\delta_{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{2}{3}} + \delta_{\frac{1}{6}}, \quad \ell_{11} = \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}\delta_{\frac{2}{3}} + \delta_{\frac{5}{6}}.$$

于是, $\mathbb{V}_i := \mathrm{span}\{\ell_{ij}, j \in \mathbb{Z}_{2^i}\}$ 可以由 $\mathbb{V}_1$ 递归构造. 具体构造方法在文 [8] 中有详细的说明.

在以下数值模拟中, 取 $a_0 = 1$, $d = 2$, $c_1 = c_5 = 1$, q 的值见表 1 和表 2, 正则化参数序列为 $\alpha_i = \alpha_0 q^i$. 在表 1 和表 2 中, 我们用 α 表示后验参数选择得到的参数. 表 1 和表 2 中的数据显示, 收敛率分别为 $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ 和 $O(\delta^{\frac{2}{3}})$, 这与理论分析是吻合的, 说明算法是有效的.

表 1 数值 (1) 的结果

e	q	α	n	$\Vert\widetilde{x}_{1,n}^{\alpha,\delta} - x^{\dagger}\Vert_{\infty}$	$\frac{\Vert\widetilde{x}_{1,n}^{\alpha,\delta} - x^{\dagger}\Vert_{\infty}}{\delta^{\frac{1}{2}}}$
1	0.1985	1.554×10^{-3}	9	7.219×10^{-3}	1.6142
3	0.1985	1.554×10^{-3}	8	9.508×10^{-3}	1.2275
7	0.1985	7.827×10^{-3}	7	2.652×10^{-2}	2.2417

表 2　数值 (2) 的结果

e	q	α	n	$\|\widetilde{x}_{2,n}^{\alpha,\delta} - x^{\dagger}\|_{\infty}$	$\frac{\|\widetilde{x}_{2,n}^{\alpha,\delta} - x^{\dagger}\|_{\infty}}{\delta^{\frac{2}{3}}}$
1	0.125	5.6250×10^{-3}	9	0.0677	2.9864
3	0.125	1.5625×10^{-2}	8	0.1357	2.8759
7	0.125	3.0625×10^{-2}	7	0.2695	3.2453

致谢　感谢审稿老师有价值的建议.

参　考　文　献

[1] Engl H W, Hanke M, Neubauer A. Regularization of Inverse Problems [M]. Dordrecht, Kluwer, 1996.

[2] Groetsch C W. The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind. Research Notes in Mathematics 105 [M], Pitman, Boston, 1984.

[3] Tikhonov A N, Arsenin V Y. Solutions of ill-posed problems [M]. Wiley, New York, 1977.

[4] Chen Z, Xu Y, Yang H. Fast collocation methods for solving ill-posed integral equations of the first kind [J]. *Inverse Problems*, 2008, 24:065007.

[5] Chen Z, Ding S, Xu Y, Yang H. Multiscale collocation methods for ill-posed integral equations via a coupled system [J]. *Inverse Problems*, 2012, 28:025006 (21pp).

[6] Chen Z, Ding S, Yang H. Multilevel augmentation algorithms based on fast collocation methods for solving ill-posed integral equations [J]. *Comput Math Appl,* 2011, 62:2071–2082.

[7] Nair M T, Pereverzev S V. Regularized collocation method for Fredholm integral equations of the first kind [J]. *Journal of Complexity*, 2007, 23:454–467.

[8] Chen Z, Micchelli C A, Xu Y. Fast collocation methods for second kind integral equations [J]. *SIAM J Numer Anal,* 2002, 40:344–375.

[9] Chen Z, Micchelli C A, Xu Y. A construction of interpolating wavelets on invariant sets [J]. *Math Comp,* 1999, 68:1560–1587.

[10] Micchelli C A, Xu Y. Using the matrix relnement equation for the construction of wavelets on invariant sets [J]. *Appl. Comput Harmon Anal,* 1994, 1:391–401.

[11] Micchelli C A, Xu Y. Reconstruction and decomposition algorithms for biorthogonal multiwavelets [J]. *Multidimens Syst Signal Process,* 1997, 8:31–69.

[12] Gfrerer H. An a posteriori parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rate [J]. *Math Comput,* 1987, 49:507–522.

[13] Plato R. On the discrepancy principle for iterative and parametric methods to solve linear ill-posed equations [J]. *Numer Math,* 1996, 75:99–120.

[14] Schock E, Phong V Q. Regularization of ill-posed problems involving unbounded operators in Banach space [J]. *Hokkaido Mathematics Journal,* 1991, 20:559–569.

[15] Pereverzev S V, Shock E. On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems [J]. *SIAM J Numer Anal,* 2005, 43:2060–2076.

[16] Luo X, Li F, Yang S. A posteriori parameter choice strategy for fast multiscale methods solving ill-posed integral equations [J]. *Adv Comput Math,* 2012, 36:299–314.

[17] Nair M T, Rajan M P. Arcangeli's discrepancy principle for a modified projection scheme for ill-posed problems [J]. *Numer Funct Anal Optim,* 2001, 22:773–787.

[18] Raus T. The principle of the residual in the solution of ill-posed problems with non-selfadjoint operator (Russian) [J]. *Acta et Comment Univ Tartuensis*, 1985, 715:12–20.

[19] Neubauer A. An a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization in the presence of modelling error [J]. *Appl Numer Math,* 1987, 4:507–519.

[20] Atkinson K, Graham I, Sloan I. Piecewise continuous collocation for integral equation [J]. *SIAM J Numer Anal,* 1983, 20:172–186.

Fast Multiscale Collocation Methods for Solving Iterated Lavrentiev Equations

YANG Suhua[1] OUYANG Zhaofu[1] LUO Xingjun[1] PENG Yubing[1]

[1]School of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou 341000, Jiangxi, China.

E-mail: 1044791362@qq.com; ouyangzhaofu@foxmail.com; lxj0298@126.com; pybmaths@163.com

Abstract The authors consider ill-posed Fredholm integral equations of the first kind. The authors apply a multiscale collocation method with a matrix compression strategy to discretize the iterated Lavrentiev equation and then analyze the priori convergence of the multiscale collocation method, if the integral operator is the weakly sectorial operator. The convergence rates of the iterated Lavrentiev regularization are achieved by using a modified a posteriori parameter choice strategy. Finally, numerical examples are given to illustrate the efficiency of the method.

Keywords Fredholm integral equation of the first kind, Iterated Lavrentiev regularization, Multiscale collocation method, A posteriori parameter choice strategy

2000 MR Subject Classification 65J20, 65J10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 38 No. 4, 2017
by ALLERTON PRESS, INC., USA