

# 轴对称压差系统的自相似解\*

胡燕波<sup>1</sup> 王国栋<sup>2</sup>

**摘要** 考察了二维压差系统的轴对称活塞均匀膨胀而产生的自相似流动. 在轴对称和自相似假设下, 该问题可以简化为一个自治的非线性常微分方程组的自由边值问题. 通过对常微分方程组的积分曲线性质的详细分析, 建立该自由边值问题正光滑解的整体存在性.

**关键词** 压差系统, 自相似解, 激波

**MR (2000) 主题分类** 35L45, 35L65, 76N10

**中图法分类** O175.29

**文献标志码** A

**文章编号** 1000-8314(2017)04-0477-10

## 1 引言

二维压差系统为如下方程组

$$\begin{cases} u_t + p_x = 0, \\ v_t + p_y = 0, \\ E_t + (pu)_x + (pv)_y = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $p$ ,  $(u, v)$  和  $E = \frac{u^2+v^2}{2} + p$  分别表示为压力、速度和能量. 系统 (1.1) 最早是为了数值计算的目的分离全欧拉方程组中的压力作用和惯性作用而得到一个简化模型 (见 [1]). 郑在文 [2] 中提供了系统 (1.1) 的另外一种推导方法. 该系统可以看成全欧拉方程组在大 Mach 数或高压时的一个渐近模型. 对系统 (1.1) 的研究可以为全欧拉方程组的研究提供一种不同的视角. 更多的背景知识可参见专著 [3-4].

本文以压差系统 (1.1) 为模型, 研究轴对称活塞均匀膨胀并产生一个激波阵面的自相似流动. 这个问题通常被认为是模拟爆炸过程的一个最简单的方式并被众多作者研究. 在自相似假设下, 该问题可以简化为一个非自治的常微分方程组且带一些强加在活塞表面和激波阵面上的边值条件 (见 [5-6]). 高维等熵欧拉方程组的活塞问题解的整体存在性分析起始于文 [7]. 在该文中, 研究了以速度势为变量的一个二阶非自治常微分方程的自由边值问题, 并建立了活塞问题的整体解, 相关的结果可参见文 [8-11]. 然而, 对全欧拉方程组, 这个问题解的整体存在性分析目前还是未知的. 因此, 考虑压差系统 (1.1) 的相关问题是必要和有价值的. 与文 [7] 中的处理方法不同, 我们把二维压差系统 (1.1) 的活塞问题变

本文 2014 年 7 月 12 日收到, 2016 年 7 月 1 日收到修改稿.

<sup>1</sup>杭州师范大学数学系, 杭州 310036; 复旦大学数学科学学院, 上海 200433.

E-mail: yanbo.hu@hotmail.com

<sup>2</sup>安徽建筑大学数理学院, 合肥 230601. E-mail: yxgdwang@163.com

\*本文受到国家自然科学基金 (No. 11301128, No. 11571088), 中国博士后基金 (No. 2015M580286), 浙江省自然科学基金 (No. LY17A010019) 和安徽省自然科学基金 (No. 1508085MA08) 的资助.

换为一个自治的非线性常微分方程组. 值得指出的是, 我们的方法也可以处理等熵欧拉方程组的活塞问题.

本文的目的是建立压差系统 (1.1) 均匀膨胀的活塞问题的整体解. 通过引进全新的变量 (见 [12–14]), 该问题可以变换为一个自治的非线性常微分方程组的自由边值问题. 我们详细分析常微分方程组积分曲线的性质, 并利用这些性质证明该自由边值问题正光滑解的整体存在性.

## 2 问题的构造与结果

假设初始流动的状态为  $p = p_0$ ,  $u = v = 0$ , 在初始时刻活塞处在原点. 从  $t = 0$  开始, 活塞各向同性地向外均匀膨胀, 这意味着系统 (1.1) 的解  $(u, v, p)$  具有如下性质:

$$\begin{cases} p(t, r, \theta) = p(t, r, 0), \\ \begin{pmatrix} u(t, r, \theta) \\ v(t, r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t, r, 0) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $t \geq 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  以及  $r > 0$ . 这里  $(r, \theta)$  为  $(x, y)$  平面的极坐标. 对光滑解, 把 (2.1) 代入 (1.1), 可得

$$\begin{cases} u_t + p_r = 0, \\ p_t + pu_r + \frac{pu}{r} = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中  $u = u(t, r, 0)$  为径向速度.

假设活塞膨胀的速度为常速度  $b_0 > 0$ . 由此, 在活塞前产生一个以常速度  $\sigma (> b_0)$  向外移动的激波阵面, 其中激波  $\sigma$  是未知的并将和解  $(u, p)$  一起确定 (见图 1). 寻找方程组 (2.2) 的自相似解  $(u, p) = (U(\xi), P(\xi))$  ( $\xi = \frac{r}{t}$ ), 可得

$$\begin{cases} U_\xi = \frac{UP}{\xi(\xi^2 - P)}, \\ P_\xi = \frac{UP}{\xi^2 - P}. \end{cases} \quad (2.3)$$

引进自相似坐标  $(\xi, \eta) = (\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$ , 则系统 (1.1) 变换为

$$\begin{cases} -\xi u_\xi - \eta u_\eta + p_\xi = 0, \\ -\xi v_\xi - \eta v_\eta + p_\eta = 0, \\ -\xi E_\xi - \eta E_\eta + (pu)_\xi + (pv)_\eta = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

令曲线  $\eta = \eta(\xi)$  为间断线, 则方程组 (2.4) 的 Rankine-Hugoniot 关系式为

$$\begin{cases} [\xi u - p]S = [\eta u], \\ [\xi v]S = [\eta v - p], \\ [\xi E - pu]S = [\eta E - pv], \end{cases} \quad (2.5)$$

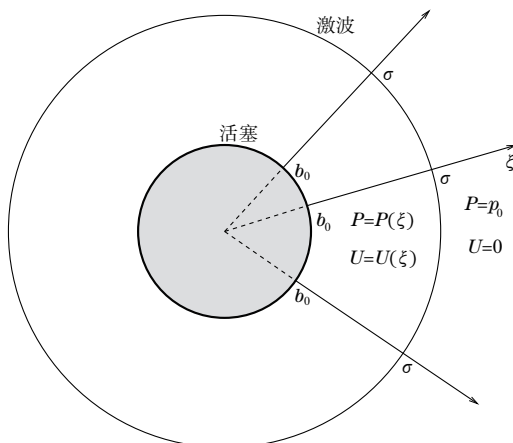


图 1 符号图

其中  $S = \eta'(\xi)$ ,  $[q] = q_1 - q_2$ ,  $q_1, q_2$  为曲线  $\eta = \eta(\xi)$  两边的两个状态. 由轴对称性, 间断线在  $\xi$  轴上的斜率为无穷, 即  $S = \infty$ , 则

$$\begin{cases} \xi [u] = [p], \\ [v] = 0, \\ \xi [E] = [pu], \end{cases}$$

即有子系统

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{\frac{p_1 + p_2}{2}}, \\ \xi (u_1 - u_2) = p_1 - p_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

这里我们忽略了后向间断.

注意到  $\xi_\sigma = \sigma$  为激波位置, 由 (2.6) 可得

$$\begin{cases} U(\sigma) = 2\left(\sigma - \frac{p_0}{\sigma}\right), \\ P(\sigma) = 2\sigma^2 - p_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

另外, 活塞的运动轨迹是  $r = b_0 t$ , 这意味着  $\xi_b = b_0$  为活塞的位置. 另一方面, 由运动条件, 流体在活塞表面的速度应等于活塞的速度, 即

$$U(b_0) = b_0. \quad (2.8)$$

而我们的问题是: 对  $(\sqrt{p_0}, \sqrt{2p_0})$  中的某个  $\sigma$ , 在  $[b_0, \sigma]$  中寻找方程组 (2.3) 带边界条件 (2.7) 的解. 这里  $\sigma > \sqrt{p_0}$  来源于熵条件,  $\sigma < \sqrt{2p_0}$  来源于要求  $U(\sigma) < \sigma$ , 即激波的波后速度小于激波的速度.

本文的主要结果如下.

**定理 2.1** 对任意  $0 < b_0 < \sqrt{2p_0}$ , 存在唯一的  $\sigma \in (\sqrt{p_0}, \sqrt{2p_0})$ , 使得问题 (2.3), (2.7), (2.8) 在  $[b_0, \sigma]$  中存在唯一的正光滑解  $(U(\xi), P(\xi))$ . 此外,  $U(\xi)$  和  $P(\xi)$  在  $[b_0, \sigma]$  中都为递减函数.

### 3 定理 2.1 的证明

首先引进一些变量把非自治的方程组 (2.3) 变换为自治的方程组. 令  $s = \frac{1}{\xi}$ , 并记  $s_b = \frac{1}{b_0}$  和  $s_\sigma = \frac{1}{\sigma}$ , 则方程组 (2.3) 可以改写为

$$\begin{cases} \tilde{U}_s = \frac{s\tilde{U}\tilde{P}}{s^2\tilde{P}-1}, \\ \tilde{P}_s = \frac{\tilde{U}\tilde{P}}{s^2\tilde{P}-1}, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中  $(\tilde{U}, \tilde{P})(s) = (U, P)(\frac{1}{s})$ . 进一步引进变量

$$I = s\tilde{U}, \quad K = s^2\tilde{P}, \quad (3.2)$$

则方程组 (3.1) 变换为

$$\begin{cases} s \frac{dI}{ds} = \frac{I(2K-1)}{K-1}, \\ s \frac{dK}{ds} = \frac{K(2K-2+I)}{K-1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

再引进变量  $\tau$ , 可得

$$\begin{cases} \frac{dI}{d\tau} = I(2K-1), \\ \frac{dK}{d\tau} = 2K\left(K-1 + \frac{1}{2}I\right), \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = s(K-1). \quad (3.5)$$

相对于边界条件 (2.7) 和 (2.8), 寻找方程组 (3.4) 带如下边界条件的解:

$$I_\sigma = I(s_\sigma) = 2(1-M), \quad K_\sigma = K(s_\sigma) = 2-M, \quad I_b = I(s_b) = 1, \quad (3.6)$$

其中  $M = \frac{p_0}{\sigma^2} \in (\frac{1}{2}, 1)$ .

为证明定理 2.1, 先证明几个引理.

**引理 3.1** 对任意  $M \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 常微分方程组 (3.4) 和初始条件  $(I, K)|_{\tau=0} = (I_\sigma, K_\sigma)$  在  $0 < I \leq 1$  中存在唯一的正光滑解  $(I, K) = (I(\tau; M), K(\tau; M))$ .

**证** 首先注意到初始条件满足  $0 < I_\sigma < 1$  和  $1 < K_\sigma < \frac{3}{2}$ . 由经典的常微分方程组的初值问题光滑解的存在性, 只需证明对  $0 < I \leq 1$ , 函数  $K$  是有界的. 由 (3.4), 有

$$\frac{d \ln K}{d\tau} = 2K - 1 + (I - 1) = \frac{d \ln I}{d\tau} + (I - 1),$$

则对  $0 < I \leq 1$ , 有

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{K}{I} = I - 1 \leq 0.$$

联立上式和事实  $K_\tau > 0$ , 可得

$$2 - M \leq K \leq \frac{2 - M}{2(1 - M)}. \quad (3.7)$$

引理 3.1 证毕.

进一步, 从方程组 (3.4) 的第 2 个方程中发现, 对  $I > 0$ , 有  $\frac{dK}{d\tau} \geq 2K(K-1)$ . 联立上式和初值条件  $K_\sigma > 1$ , 可得函数  $K$  会在某个有限的  $\tau$  处发生爆破.

记

$$L: K - \frac{1}{2}I = 1, \quad 0 < I < 1.$$

由引理 3.1 和上面的事实可知, 方程组 (3.4) 的每一条从直线  $L$  上发出的积分曲线都会和垂线  $I = 1$  在某个有限的  $\tau$  处相交 (见图 2). 因为在  $I = 1$  上有  $I_\tau > 0$ , 则我们可以从等式  $I(\tau; M) = 1$  中解出  $\tau$  而得到函数  $\tau = \tilde{\tau}(M)$ .

下面应用反证法来证明: 对  $M \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 在  $\tau \in [0, \tilde{\tau}(M)]$  上都有  $I_M < 0$  和  $K_M < 0$ . 假设存在一个  $\tau^*$ , 使得在  $\tau = \tau^*$  处首次有  $I_M = 0, K_M \leq 0$  或  $K_M = 0, I_M \leq 0$  成立. 则由 (3.10), 在  $\tau^*$  处有  $\frac{dI_M}{d\tau} > 0$  或  $\frac{dK_M}{d\tau} > 0$ . 这与从 (3.9) 可得

$$\frac{dI_M}{d\tau}(\tau^*) \leq 0 \quad \text{且} \quad \frac{dK_M}{d\tau}(\tau^*) \leq 0$$

矛盾. 引理 3.2 得证.

**引理 3.3** 对任意  $\frac{1}{2} < M < 1$ , 函数  $\tau = \tilde{\tau}(M)$  满足

$$(1 - M)\exp(2\tilde{\tau}(M)) \leq 2 - M. \quad (3.11)$$

**证** 考虑问题

$$\begin{cases} \frac{dH}{d\tau} = 2H(H - 1), \\ H|_{\tau=0} = 2 - M. \end{cases} \quad (3.12)$$

由引理 3.1 及事实

$$\frac{dK}{d\tau} \geq \frac{dH}{d\tau}, \quad (3.13)$$

上述问题在区间  $[0, \tilde{\tau}(M)]$  上存在唯一的光滑解. 解问题 (3.12) 并利用 (3.13), 可得

$$K \geq \frac{2 - M}{(2 - M) - (1 - M)\exp(2\tilde{\tau}(M))}.$$

联立上式和 (3.7) 的  $(2 - M) - (1 - M)\exp(2\tilde{\tau}(M)) > 0$ . 引理 3.3 证毕.

最后, 证明下述引理.

**引理 3.4** 对任意  $0 < b_0 < \sqrt{2p_0}$ , 存在唯一的  $M \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 使得下面等式成立:

$$\frac{2p_0}{M}(1 - M)\exp(\tilde{\tau}(M)) = b_0^2. \quad (3.14)$$

**证** 首先证明存在性. 记

$$F(M) := \frac{2p_0}{M}(1 - M)\exp(\tilde{\tau}(M)).$$

这是关于  $M$  的一个连续函数. 令  $M_1 = \frac{2p_0}{2p_0 + b_0^2}$ , 则由引理 3.2 可得

$$F(M_1) = b_0^2 \exp(\tilde{\tau}(M_1)) \geq b_0^2. \quad (3.15)$$

另一方面, 若  $\tilde{\tau}(M)$  有一个一致的上界  $\hat{\tau}$ , 即对所有的  $M \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 有  $\tilde{\tau}(M) \leq \hat{\tau}$ . 则可以选取  $M_2 = \frac{4p_0 \exp(\hat{\tau})}{b_0^2 + 4p_0 \exp(\hat{\tau})}$ , 并得到

$$F(M_2) = \frac{1}{2} b_0^2 \exp[\tilde{\tau}(M_2) - \hat{\tau}] \leq \frac{1}{2} b_0^2 < b_0^2. \quad (3.16)$$

若  $\tilde{\tau}(M)$  无界, 则再次利用引理 3.2 可知, 在 1 附近存在一点  $M_3 \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 使得

$$\tilde{\tau}(M_3) \geq \ln \frac{16p_0}{b_0^2}.$$

利用 (3.11) 可得

$$(1 - M_3)\exp(\tilde{\tau}(M_3)) \leq (2 - M_3)\exp(-\tilde{\tau}(M_3)) \leq \frac{b_0^2}{8p_0}.$$

从上式可得

$$\begin{aligned} F(M_3) &= \frac{2p_0}{M_3}(1 - M_3)\exp(\tilde{\tau}(M_3)) \\ &\leq 4p_0(1 - M_3)\exp(\tilde{\tau}(M_3)) \\ &\leq \frac{1}{2}b_0^2 < b_0^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

联立 (3.15)–(3.17) 并由连续性可得, 至少存在一点  $M^* \in [M_1, \max\{M_2, M_3\}]$ , 使得  $F(M^*) = b_0^2$ .

下面证明唯一性. 只需证明  $F(M)$  在区间  $(\frac{1}{2}, 1)$  是严格单调递减的函数. 对函数  $F(M)$  关于  $M$  求导, 可得

$$F'(M) = \frac{2p_0(1 - M)}{M} \left( \tilde{\tau}'(M) - \frac{1}{M(1 - M)} \right) \exp(\tilde{\tau}(M)).$$

由  $\tilde{\tau}'(M)$  的表达式 (3.8) 并利用 (3.4) 中的第 1 个方程, 可得

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}'(M) - \frac{1}{M(1 - M)} &= -\frac{I_M(\tilde{\tau}(M); M)}{I_\tau(\tilde{\tau}(M); M)} - \frac{1}{M(1 - M)} \\ &= \frac{1}{I_\tau(\tilde{\tau}(M); M)} \left( -I_M(\tilde{\tau}(M); M) - \frac{I(\tilde{\tau}(M); M)[2K(\tilde{\tau}(M); M) - 1]}{M(1 - M)} \right). \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} G &:= -I_M(\tau; M) - \frac{I(\tau; M)[2K(\tau; M) - 1]}{M(1 - M)}, \\ H &:= -K_M(\tau; M) - \frac{K(\tau; M)[2K(\tau; M) - 2 + I(\tau; M)]}{M(1 - M)}. \end{aligned}$$

下面证明在  $\tau = \tilde{\tau}(M)$  处有  $G < 0$ , 这即是想要的结果.

利用 (3.6) 和 (3.10) 可知, 对  $M \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 有

$$\begin{cases} G|_{\tau=0} = 2 - \frac{2(1 - M)[2(2 - M) - 1]}{M(1 - M)} = \frac{6(M - 1)}{M} < 0, \\ H|_{\tau=0} = 1 - \frac{(2 - M)[2(2 - M) - 2 + 2(1 - M)]}{M(1 - M)} = \frac{5M - 8}{M} < 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

此外, 应用 (3.4) 和 (3.9) 并作一些直接的计算, 可得到函数  $G$  和  $H$  的方程

$$\begin{cases} \frac{dG}{d\tau} = (2K - 1)G + 2IH, \\ \frac{dH}{d\tau} = KG + (4K - 2 + I)H. \end{cases} \quad (3.19)$$

联立上式和初始数据 (3.18) 即得, 对任意  $\tau \in [0, \tilde{\tau}(M)]$  都有  $G < 0$ . 引理 3.4 得证.

**定理 2.1 的证明** 对  $M = M^*$ , 由引理 3.1, 在  $\tau \in [0, \tau^*]$  中, 方程 (3.4) 和初值条件  $(I, K)|_{\tau=0} = (2(1 - M^*), 2 - M^*)$  存在唯一的正光滑解  $(I^*(\tau), K^*(\tau))$ , 这里  $\tau^*$  由等式  $I^*(\tau) = 1$  解得. 基于引理 3.4 可知

$$\frac{2p_0}{M^*}(1 - M^*)\exp(\tau^*) = b_0^2. \quad (3.20)$$

此外, 解下述问题

$$\begin{cases} \frac{ds}{d\tau} = s[K^*(\tau) - 1], \\ s|_{\tau=0} = \sqrt{\frac{M^*}{p_0}}, \end{cases}$$

可得

$$s = s(\tau) = \sqrt{\frac{M^*}{p_0}} \exp\left\{\int_0^\tau [K^*(\tau) - 1] d\tau\right\}, \quad \forall \tau \in [0, \tau^*]. \quad (3.21)$$

因为  $(I^*(\tau), K^*(\tau))$  是 (3.4) 的解, 则  $\frac{d}{d\tau} \ln I^*(\tau) = 2[K^*(\tau) - 1] + 1$ . 对上述式子从 0 到  $\tau^*$  积分, 并注意事实  $I^*(\tau^*) = 1$ , 可得

$$\int_0^{\tau^*} [K^*(\tau) - 1] d\tau = -\frac{1}{2} \ln 2(1 - M^*) - \frac{1}{2} \tau^*.$$

把上式代入 (3.21) 并利用 (3.20), 可得

$$\begin{aligned} s(\tau^*) &= \sqrt{\frac{M^*}{p_0}} \exp\left(-\frac{1}{2} \ln 2(1 - M^*) - \frac{1}{2} \tau^*\right) \\ &= \sqrt{\frac{M^*}{2p_0(1 - M^*)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tau^*\right) = \frac{1}{b_0} = s_b. \end{aligned}$$

由  $s_\tau > 0$ , 解 (3.21) 得到满足  $\tau^* = \tau(s_b)$  的函数  $\tau = \tau(s)$ . 记  $(I^{**}(s), K^{**}(s)) = (I^*(\tau(s)), K^*(\tau(s)))$ . 因此

$$U(\xi) = \xi I^{**}\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad P(\xi) = \xi^2 K^{**}\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad \forall \xi \in [b_0, \sigma^*], \quad (3.22)$$

并且它们满足边界条件 (2.7), 其中  $\sigma^* = \sqrt{\frac{p_0}{M^*}}$ . 更进一步, 有

$$U(b_0) = b_0 I^{**}\left(\frac{1}{b_0}\right) = b_0 I^*(\tau(s_b)) = b_0 I^*(\tau^*) = b_0.$$

这意味着 (3.22) 中的函数满足边界条件 (2.8).

下面证明定理 2.1 的第 2 个结果. 对 (3.22) 中定义的函数  $U(\xi)$  求导, 并利用 (3.4) 和 (3.5) 以及事实  $\xi = \frac{1}{s}$ , 可得

$$\begin{aligned} \frac{dU(\xi)}{d\xi} &= I^*(\tau) + \frac{1}{s} \frac{dI^*(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} s\xi \\ &= I^*(\tau) - \frac{I^*(\tau)[2K^*(\tau) - 1]}{K^*(\tau) - 1} = -\frac{I^*(\tau)K^*(\tau)}{K^*(\tau) - 1} < 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

类似地, 对函数  $P(\xi)$  求导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dP(\xi)}{d\xi} &= \frac{2K^*(\tau)}{s} + \frac{1}{s^2} \frac{dK^*(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} s\xi \\ &= \frac{2K^*(\tau)}{s} - \frac{2K^*(\tau)[K^*(\tau) - 1 + \frac{1}{2}I^*(\tau)]}{s[K^*(\tau) - 1]} \\ &= -\frac{I^*(\tau)K^*(\tau)}{s[K^*(\tau) - 1]} < 0. \end{aligned}$$

定理 2.1 证毕.



## 4 结 论

本文研究了二维压差系统轴对称活塞向外均匀膨胀而产生的自相似流动. 假设活塞以常速度  $b_0$  向外膨胀, 则在流动中出现一个以未知的常速度  $\sigma$  向外运动的激波阵面. 在轴对称和自相似假设下, 该问题可以简化为一个非自治的非线性常微分方程组的自由边值问题. 通过引进新的变量, 把问题转变为自治的非线性常微分方程组 (3.4) 带自由边界 (3.6) 的边值问题. 基于对积分曲线性质的详细分析, 严格证明了, 对任意  $0 < b_0 < \sqrt{2p_0}$ , 问题 (3.4), (3.6) 存在唯一的正的、单调增加的光滑解. 强加的限制  $b_0 < \sqrt{2p_0}$  是为了保证流动是从  $\xi > \sigma$  这边穿过激波阵面到  $\xi < \sigma$ , 对  $b_0 \geq \sqrt{2p_0}$  的情形目前还不清楚. 我们将继续该问题的研究. 值得指出的是, 对压差系统的上述方法同样可以用来研究等熵欧拉方程的相对应问题且不需对  $b_0$  加任何限制, 这是因为由熵条件即可得到激波波后的速度小于激波速度.

## 参 考 文 献

- [1] 李荫藩, 曹亦明. 二阶“大粒子”差分方法 [J]. 中国科学: 数学, 1985, 15(8):1024–1035.
- [2] Zheng Y X. The compressible Euler system in two dimensions [M]//Chen G Q, Li T T, Liu C (eds), *Nonlinear Conservation Laws, Fluid Systems and Related Topics*. Singapore: World Scientific, 2009:301–400.
- [3] Li J Q, Zhang T, Yang S L. The two-dimensional Riemann problem in gas dynamics [M]. Harlow: Longman, 1998.
- [4] Zheng Y X. *Systems of conservation laws: Two dimensional Riemann problems* [M]. Boston: Birkhauser, 2001.
- [5] Courant R, Friedrichs K O. *Supersonic flow and flock waves* [M]. New York: Interscience, 1948.
- [6] Lighthill M J. The position of the shock-wave in certain aerodynamic problems [J]. *Quart J Mech Appl Math*, 1948, 1(3):309–318.
- [7] Chen S X. A singular multi-dimensional piston problem in compressible flow [J]. *J Differential Equations*, 2003, 189(1):292–317.
- [8] Chen S X, Wang Z J, Zhang Y Q. Global existence of shock front solutions to the axially symmetric piston problem for compressible fluids [J]. *J Hyperbol Differ Eq*, 2004, 1(1):51–84.
- [9] Chen G Q, Chen S X, Wang D H, Wang Z. J. A multidimensional piston problem for the Euler equations for compressible flow [J]. *Disc Cont Dyna Syst*, 2005, 13(2):361–383.
- [10] Chen S X, Wang Z J, Zhang Y Q. Global existence of shock front solution to axially symmetric piston problem in compressible flow [J]. *Z angew Math Phys*, 2008, 59(3):434–456.
- [11] Peng C C, Lien W C. Self-similar solutions of the Euler equations with spherical symmetry [J]. *Nonlinear Analysis*, 2012, 75(17):6370–6378.

- [12] Zhang T, Zheng Y X. Axisymmetric solutions of the Euler equations for polytropic gases [J]. *Arch Rat Mech Anal*, 1998, 142(3):253–279.
- [13] Hu Y B. Axisymmetric solutions of the pressure-gradient system [J]. *J Math Phys*, 2012, 53(7):073703.
- [14] Hu Y B. Axisymmetric solutions of the two-dimensional Euler equations with a two-constant equation of state [J]. *Nonlinear Analysis: RWA*, 2014, 15(1):67–79.

## Self-similar Solutions of the Axisymmetric Pressure-Gradient System

HU Yanbo<sup>1</sup> WANG Guodong<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou 310036, China; School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China. E-mail: yanbo.hu@hotmail.com

<sup>2</sup>Department of Mathematics and Physics, Anhui University of Architecture, Hefei 230601, China. E-mail: yxgdwang@163.com

**Abstract** This paper is concerned with self-similar flows of the two-dimensional pressure-gradient system caused by the uniform expansion of an axially symmetrical piston into the undisturbed fluid. Under the axisymmetric and self-similar assumptions, the problem can be reduced to a free boundary value problem of an autonomous nonlinear system of ordinary differential equations. The authors establish the global existence of the positive smooth solutions to the free boundary value problem by analyzing carefully the properties of the integral curves of the ODE system.

**Keywords** Pressure-gradient system, Self-similar solutions, Shock wave

**2000 MR Subject Classification** 35L45, 35L65, 76N10

The English translation of this paper will be published in

**Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 38 No. 4, 2017**

by ALLERTON PRESS, INC., USA