数 学 年 刊A辑
2018, 39(3):287–296
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2018.0025

换位子群是不可分 Abel 群的有限秩可除幂零群*

刘合国[1] 张继平[2] 廖 军[3]

提要 完整地确定了换位子群是不可分 Abel 群的有限秩可除幂零群的结构, 证明了下面的定理.

设 G 是有限秩的可除幂零群, 则 G 的换位子群是不可分 Abel 群当且仅当 $G'=\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ 且 G 可以分解为 $G=S\times D$, 其中当 $G'=\mathbb{Q}$ 时,

$$S=\left\{\left[\begin{array}{ccccccc}1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1\ r+1} & a_{1\ r+2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\ r+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{r\ r+2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r+1\ r+2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\ \middle|\ a_{ij}\in\mathbb{Q}\right\},$$

当 $G'=\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ 时, S 有中心积分解 $S=S_1*S_2*\cdots*S_r$, 并且可以将 S 形式化地写成

$$S=\left\{\left[\begin{array}{ccccccc}1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1\ r+1} & b_{1\ r+2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\ r+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{r\ r+2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r+1\ r+2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\ \middle|\ \begin{array}{c}a_{ij}\in\mathbb{Q}\\ b_{1\ r+2}\in\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}\end{array}\right\},$$

其中 $D\cong\underbrace{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}}_{s}\bigoplus\bigoplus_{k=1}^{t}(\mathbb{Q}_{\pi_k}/\mathbb{Z})$, 式中 s, t 都是非负整数, $\mathbb{Q}$ 是有理数加群, π_k ($k=1,2,\cdots,t$) 是某些素数的集合, 满足 $\pi_1\subseteq\pi_2\subseteq\cdots\subseteq\pi_t$, $\mathbb{Q}_{\pi_k}=\{\frac{m}{n}\mid(m,n)=1,m\in\mathbb{Z},n$ 为正的 π_k-数$\}$. 进一步地, 当 $G'=\mathbb{Q}$ 时, $(r;s;\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_t)$ 是群 G 的同构不变量; 当 $G'=\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ 时, $(p,r;s;\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_t)$ 是群 G 的同构不变量. 即若群 H 也是有限秩的可除幂零群, 它的换位子群是不可分 Abel 群, 那么 G 同构于 H 的充分必要条件是它们有相同的不变量.

关键词 幂零群, 局部循环群, 中心, 换位子群, 可除群

MR (2000) 主题分类 20E22, 20E34

中图法分类 O152

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2018)03-0287-10

本文 2016 年 2 月 3 日收到, 2016 年 4 月 28 日收到修改稿.

[1]湖北大学数学系, 武汉 430062. E-mail: ghliu@hubu.edu.cn

[2]北京大学数学科学学院, 北京 100871. E-mail: jzhang@pku.edu.cn

[3]通讯作者. 湖北大学数学系, 武汉 430062. E-mail: jliao@hubu.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11131001, No. 11371124, No. 11401186) 的资助.

1 引言和主要结果

本文采用文 [1] 的术语和符号.

设 A 是一个有限生成的 Abel 群, 则 A 可以分解为

$$A = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_s},$$

其中 $1 < n_1 \mid n_2 \mid \cdots \mid n_s$, 并且 $(r; n_1, n_2, \cdots, n_s)$ 是 A 的同构不变量. 这是群论里非常基本的定理, 它是许多结构定理的基石. 在文 [2] 中, 我们确定了换位子群为无限循环群的有限生成幂零群的同构不变量, 证明了如下的命题.

设 G 是有限生成幂零群, 它的换位子群是无限循环群, 则 G 可以唯一地分解为 $G = S_G \cdot \zeta G$, 其中 ζG 是 G 的中心, 它是有限生成的 Abel 群,

$$S_G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & d_1 a_{13} & d_2 a_{14} & \cdots & d_r a_{1\ r+2} & a_{1\ r+3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\ r+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{r+1\ r+3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r+2\ r+3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{Z} \right\},$$

其中 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 都是正整数, 满足 $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r$. 又记

$$\zeta G = F \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_u}, \quad \zeta G / G' = F_1 \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_v},$$

其中 F 是秩为 s 的自由 Abel 群 (由此可得 F_1 必是秩为 $s-1$ 的自由 Abel 群). $m_1, m_2, \cdots, m_u$ 都是大于 1 的正整数, 满足 $m_1 \mid m_2 \mid \cdots \mid m_u$. $n_1, n_2, \cdots, n_v$ 也都是大于 1 的正整数, 满足 $n_1 \mid n_2 \mid \cdots \mid n_v$. 上述这些数量 $(d_1, d_2, \cdots, d_r; s; m_1, m_2, \cdots, m_u; n_1, n_2, \cdots, n_v)$ 是群 G 的同构不变量.

明显地, 上述命题完整地刻画了换位子群是无限循环群的有限生成幂零群的构造, 它推广了有限生成 Abel 群的结构定理.

我们知道, 有限生成 Abel 群与有限秩的自由 Abel 群紧密相联, 在 Abel 群类, 投射群就是自由 Abel 群. 与此相对偶的结论是, 在 Abel 群类, 内射群就是可除群 (称一个 Abel 群 A 是可除的, 如果对 A 的任意元素 a 和任意自然数 n, $a = nx$ 在 A 里均可解), 可除 Abel 群具有清晰的结构. 设 D 是一个可除 Abel 群, 则 D 可以分解为

$$D = \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}}_{s} \bigoplus \bigoplus_{i=1}^{t} (\mathbb{Q}_{\pi_i} / \mathbb{Z}),$$

式中 s, t 都是非负整数, $\mathbb{Q}$ 是有理数加群, $\pi_i (i = 1, 2, \cdots, t)$ 是某些素数的集合, 满足 $\pi_1 \subseteq \pi_2 \subseteq \cdots \subseteq \pi_t$, $\mathbb{Q}_{\pi_i} = \{\frac{m}{n} \mid (m, n) = 1, m \in \mathbb{Z}, n$ 为正的 π_i-数$\}$. 进一步地, $(s; \pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_t)$ 是群 D 的同构不变量.

可除 Abel 群在 Abel 群理论里扮演着重要的角色. 我们知道, 每个 Abel 群均可嵌入到一个可除 Abel 群 D 里, 其中 “最小的” 那个 Abel 群 D 就是 A 的内射包络; 如果可除 Abel 群 D 是 Abel 群 G 的一个子群, 那么 D 一定是 G 的一个直和项. 这些整齐的结论很

难推广到非 Abel 群的情形. 现在, 我们要把可除 Abel 群的结构定理推广到一类有限秩的可除幂零群.

我们称一个群 G 是可除的, 如果对 G 的任意元素 g 和任意正整数 n, $g=x^n$ 在 G 里恒有解.

本文的主要目的是证明下面的定理.

定理 1.1 设 G 是有限秩的可除幂零群, 则 G 的换位子群是不可分 Abel 群当且仅当 $G'=\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ 且 G 可以分解为 $G=S\times D$, 其中当 $G'=\mathbb{Q}$ 时,

$$S=\left\{\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1\ r+1} & a_{1\ r+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\ r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{r\ r+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r+1\ r+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \middle| \ a_{ij}\in\mathbb{Q} \right\},$$

当 $G'=\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ 时, S 有中心积分解 $S=S_1*S_2*\cdots*S_r$, $S_i\cong S_p$, 并且可以将 S 形式化地写成

$$S=\left\{\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1\ r+1} & b_{1\ r+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\ r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{r\ r+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r+1\ r+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \middle| \begin{array}{c} a_{ij}\in\mathbb{Q} \\ b_{1\ r+2}\in\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}\end{array} \right\},$$

其中 $D\cong\underbrace{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}}_{s}\bigoplus\bigoplus\limits_{k=1}^{t}(\mathbb{Q}_{\pi_k}/\mathbb{Z})$, 式中 s, t 都是非负整数, $\mathbb{Q}$ 是有理数加群, $\pi_k(k=1,2,\cdots,t)$ 是某些素数的集合, 满足 $\pi_1\subseteq\pi_2\subseteq\cdots\subseteq\pi_t$, $\mathbb{Q}_{\pi_k}=\{\frac{m}{n}\mid(m,n)=1, m\in\mathbb{Z}, n$ 为正的 π_k-数$\}$. 进一步地, 当 $G'=\mathbb{Q}$ 时, $(r;s;\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_t)$ 是群 G 的同构不变量; 当 $G'=\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ 时, $(p,r;s;\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_t)$ 是群 G 的同构不变量, 即若群 H 也是有限秩的可除幂零群, 它的换位子群是不可分 Abel 群, 那么 G 同构于 H 的充分必要条件是它们有相同的不变量.

我们称一个群 G 是局部循环群, 如果 G 的每个有限生成的子群都是循环群. 关于局部循环群 G, 一个基本事实是 $G\leqslant\mathbb{Q}$ 或者 $G\leqslant\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. 称一个群 G 不可分, 如果 G 不能分解为它的两个真子群的直积.

2　定理 1.1 的证明

我们先证明两个引理.

引理 2.1 设 G 是有限秩可除幂零群, $G=\gamma_1(G)>\gamma_2(G)>\cdots>\gamma_c(G)>\gamma_{c+1}(G)=1$ 是 G 的下中心列, 则 $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ 都是有限秩可除 Abel 群.

证 记 $G_{ab}=G/G'$, 因 G 是有限秩的可除幂零群, 故 G_{ab} 是有限秩的可除 Abel 群, 它可以分解为

$$G_{ab}=\underbrace{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}}_{r}\oplus(\mathbb{Q}_{\pi_1}/\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Q}_{\pi_2}/\mathbb{Z})\oplus\cdots\oplus(\mathbb{Q}_{\pi_s}/\mathbb{Z}).$$

由于存在从 $G_{ab}\otimes_{\mathbb{Z}}G_{ab}$ 到 $\gamma_2(G)/\gamma_3(G)$ 的满同态

$$\varepsilon_1: G_{ab}\otimes_{\mathbb{Z}}G_{ab}\longrightarrow\gamma_2(G)/\gamma_3(G)$$
$$x\gamma_2(G)\otimes y\gamma_2(G)\longmapsto[x,y]\gamma_3(G),$$

因而 $\gamma_2(G)/\gamma_3(G)$ 是 $G_{ab}\otimes_{\mathbb{Z}}G_{ab}$ 的同态像. 注意到 $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}_{\pi_i}/\mathbb{Z})=0$, $(\mathbb{Q}_{\pi_i}/\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}_{\pi_j}/\mathbb{Z})=0$ 以及

$$G_{ab}=\underbrace{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}}_{r}\oplus(\mathbb{Q}_{\pi_1}/\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Q}_{\pi_2}/\mathbb{Z})\oplus\cdots\oplus(\mathbb{Q}_{\pi_s}/\mathbb{Z}),$$

则

$$G_{ab}\otimes_{\mathbb{Z}}G_{ab}=\underbrace{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}}_{r^2}.$$

于是 $\gamma_2(G)/\gamma_3(G)$ 是有限秩可除 Abel 群.

由于存在从 $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)\otimes_{\mathbb{Z}}G_{ab}$ 到 $\gamma_{i+1}(G)/\gamma_{i+2}(G)$ 的满同态

$$\varepsilon_i:\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)\otimes_{\mathbb{Z}}G_{ab}\longrightarrow\gamma_{i+1}(G)/\gamma_{i+2}(G)$$
$$x\gamma_{i+1}(G)\otimes y\gamma_2(G)\longmapsto[x,y]\gamma_{i+2}(G).$$

归纳地假设 $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ 是有限秩可除 Abel 群, 同理可证 $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)\otimes_{\mathbb{Z}}G_{ab}$ 的同态像 $\gamma_{i+1}(G)/\gamma_{i+2}(G)$ 是有限秩可除 Abel 群.

引理 2.2 若幂零群 G 是可除的局部循环群被局部循环群的扩张, 则 G 是 Abel 群.

证 设 $1<A<G$, 其中 A 是可除的局部循环群, G/A 是一个局部循环群. 容易看到 $A\cong\mathbb{Q}$ 或 $A\leqslant\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, 从条件知, 当 $A\leqslant\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 时, A 的每个非平凡的 Sylow p-子群都是拟循环 p-群.

(1) 当 $A\cong\mathbb{Q}$ 时, 设 $A=\{a^u\mid u\in\mathbb{Q}\}$ 对 A 的某个元 a 成立. 我们断言 A 是 G 的中心子群. 事实上, 任取 $x\in G$, x 共轭作用在 A 上, 由此诱导出 A 的一个自同构 $\alpha_x=C_x|_A$, α_x 由 a 的像 $\alpha_x(a)$ 唯一确定, 即 $\alpha_x(a^u)=(\alpha_x(a))^u$ 对每个 $u\in\mathbb{Q}$ 成立. 当 $\alpha_x(a)=a^v\neq a$, 即 $v\neq1$ 时,

$$[a,x]=a^{-1}a^x=a^{-1}\alpha_x(a)=a^{v-1},$$

由此得到对每个正整数 c,

$$[a,{}_cx]=[a,\underbrace{x,x,\cdots,x}_{c}]=a^{(v-1)^c}\neq a^0=1,$$

这与 G 是幂零群矛盾. 因此, A 是 G 的中心子群, 注意到 G/A 是局部循环群, G 是一个 Abel 群.

(2) 当 $A \leqslant \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 时, A 可分解为其 Sylow 子群的直积, $A = \prod P$, P 是 A 的 Sylow p-子群. 由条件知, P 就是一个拟循环 p-群. 我们断言 A 是 G 的中心子群, 为此只需证明每个 P 都是 G 的中心子群即可. 容易看到 P 是 G 的一个正规子群. 任取 $y \in G$, 记 $H := \langle P, y\rangle = P\langle y\rangle$. H 是个幂零群, 且 $P \lhd H$. 下面证明 H 是个 Abel 群.

若 y 是个有限阶元, 记 $Y = \langle y\rangle$, 下证 $[P, Y] = 1$. 定义映射:

$$\varphi : P \times Y \longrightarrow [P, Y]/[P, Y, Y],$$

$$(a, y^i) \longmapsto [a, y^i][P, Y, Y].$$

由于 $[ab, y^i] = [a, y^i]^b[b, y^i] = [a, y^i][b, y^i]$, $[a, y^iy^j] = [a, y^j][a, y^i]^{y^i} = [a, y^j][a, y^i][a, y^i, y^j]$, 则 φ 是双线性的. 因此 φ 诱导一个同态 $\widetilde{\varphi} : P \otimes_{\mathbb{Z}} Y \longrightarrow [P, Y]/[P, Y, Y]$. 又 $\widetilde{\varphi}$ 是满态射, 且 $P \otimes_{\mathbb{Z}} Y = 1$, 所以 $[P, Y] = [P, Y, Y]$. 归纳可得, $[P, Y] = [P, \underbrace{Y, Y, \cdots, Y}_{c}] = 1$, 即 $[P, y] = 1$. y 平凡地作用在 P 上, H 当然是个 Abel 群.

若 y 是一个无限阶元, $P \cap \langle y\rangle = 1$, $H/P = P\langle y\rangle/P \cong \langle y\rangle$ 是个无限循环群. 注意到 $H' \neq P$, 否则, H/H' 是无限循环群, 由 [1, 5.2.5], 知 H 满足极大条件, 矛盾. 假设 H 不是 Abel 群, 则 $P > H' \neq 1$, H' 是个有限循环群, 此时 $H/H' = \langle y\rangle \oplus P/H'$, $P/H' \cong P$ 是拟循环 p-群. 当 $H' \neq 1$ 时, P 不是 H 的中心子群, 否则, 由 H/P 是循环群知 H 是一个 Abel 群. $P \cap \zeta(H)$ 是 H 的非平凡有限循环子群. 如果 $\zeta(H)$ 是一个挠群, 即 $\zeta(H) < P$, 那么 H 就是一个挠群, 这与 y 是 H 的无限阶元矛盾, 于是 $\zeta(H)$ 必含有无限阶元, 这样 $\zeta(H)$ 可分解为 $\zeta(H) = (\zeta(H) \cap P) \times \langle z\rangle$, $\langle z\rangle$ 是无限循环群.

根据 Jordan Hölder 定理, 两个正规列 $1 < P < H$ 与 $1 < \zeta(H) < H$ 具有等价的加细. $H/\zeta(H)$ 是一个挠群, 且

$$\zeta(H)P/\zeta(H) \cong P/P \cap \zeta(H) \cong P$$

是一个拟循环 p-群, 又

$$H/\zeta(H)P \cong \frac{H/P}{\zeta(H)P/P}$$

是一个有限循环群, 故 $H/\zeta(H)$ 是一个具有无限幂指数的挠群. 设

$$\zeta_2(H)/\zeta(H) = \zeta\left(H/\zeta(H)\right)$$

是 $H/\zeta(H)$ 的中心, 可以验证存在自然的单同态:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \zeta_2(H)/\zeta(H) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(H/H', \zeta(H)\right), \\ \omega\zeta(H) &\longmapsto \varphi\left(\omega\zeta(H)\right) : H/H' \longrightarrow \zeta(H), \\ tH' &\longmapsto [\omega, t]. \end{aligned}$$

这表明 Abel 挠群 $\zeta_2(H)/\zeta(H)$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(H/H', \zeta(H)\right)$ 的一个子群.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(H/H', \zeta(H)\right) \\ = &\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\langle y\rangle \oplus P/H', (P \cap \zeta(H)) \times \langle z\rangle\right) \\ = &\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\langle y\rangle, (P \cap \zeta(H)) \times \langle z\rangle\right) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(P/H', (P \cap \zeta(H)) \times \langle z\rangle\right) \\ = &(P \cap \zeta(H)) \times \langle z\rangle. \end{aligned}$$

因此, $\zeta_2(H)/\zeta(H)$ 同构于 $P\cap\zeta(H)$ 的一个子群, 它是一个有限循环 p-群, 这样幂零群 $H/\zeta(H)$ 具有有限的幂指数, 矛盾. 这表明当 $A\leqslant\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 时, A 是 G 的中心子群, 再据 G/A 是局部循环群知 G 一定是 Abel 群.

总之, 我们证明了 G 是一个 Abel 群.

局部循环群就是秩等于 1 的群. 下面的群例表明, 若幂零群 G 是可除 Abel 群 A 被一个循环群的扩张, 当 A 的秩大于 1 时, G 不一定是 Abel 群.

例 2.1 取 $A=\underbrace{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}}_{m}=\mathbb{Q}^m$, 它的自同构群 $\mathrm{Aut}(A)=\mathrm{GL}(m,\mathbb{Q})$, 取 $\gamma\in\mathrm{Aut}(A)$,

$$\gamma=\begin{pmatrix}1&1&&&\\&1&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix},$$

$\langle\gamma\rangle$ 幂零地作用在 A 上, $G=A\rtimes\langle\gamma\rangle$ 是一个幂零类等于 m 的幂零群.

例 2.2 取 $A=\underbrace{\mathbb{Z}_{p^\infty}\oplus\mathbb{Z}_{p^\infty}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p^\infty}}_{n}=\mathbb{Z}_{p^\infty}^n$, 它的自同构群 $\mathrm{Aut}(A)=\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_p)$, $\mathbb{Z}_p$ 是 p-adic 整环, 取 $\delta\in\mathrm{Aut}(A)$,

$$\delta=\begin{pmatrix}1&1&&&\\&1&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix},$$

δ 是一个无限阶元, 它幂零地作用在 A 上. $G=A\rtimes\langle\delta\rangle$ 是一个幂零类等于 n 的幂零群.

在例 2.2 里, G 的中心 $\zeta(G)$ 是一个拟循环 p-群, 这个群例也表明, 对一个幂零群 X 来说, 即使其中心 $\zeta(X)$ 是一个挠群, X 不一定是挠群.

例 2.3 设 $G_i=\{x_i^u\mid u\in\mathbb{Q}\}\cong\mathbb{Q}$ $(i=1,2)$. 设 $G=G_1*G_2$ 为 G_1 和 G_2 的自由积. 设 π 是某些素数的集合, 对正整数 n 有分解 $n=n_\pi n_{\pi'}$, 其中 n_π 是 n 的 π-部分. 令 $N=\langle\gamma_3(G),[x_1,x_2^{\frac{1}{n}}]^{n_\pi}\mid n\in N\rangle^G$ 为 G 的正规子群. 设 $S_\pi=G/N$, 则 S_π 是 $\mathbb{Q}_\pi/\mathbb{Z}$ 被 $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}$ 的中心扩张, 且 $S'_\pi=\zeta(S_\pi)\cong\mathbb{Q}_\pi/\mathbb{Z}$.

特别的, 当 $\pi=\{p\}$ 时, 记 $S_\pi=S_p$. 此时 S_p 是 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ 被 $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}$ 的中心扩张, 且 $S'_p=\zeta(S_p)\cong\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$.

定理 1.1 的证明 现设 G 是一个有限秩可除幂零群, 它的换位子群是不可分 Abel 群.

首先我们可以断言 G 的换位子群 G' 是可除的. 事实上, 设

$$G=\gamma_1(G)>\gamma_2(G)>\cdots>\gamma_{c+1}(G)=1$$

是 G 的下中心列. 因为 G 是有限秩可除幂零群, 由引理 2.1, $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ 可除. 这样在 $G'=\gamma_2(G)>\gamma_3(G)>\cdots>\gamma_{c+1}(G)=1$ 里, 由假设 G' 是 Abel 群. $\gamma_c(G)$ 是可除的,

$\gamma_c(G)$ 是 Abel 群 $\gamma_{c-1}(G)$ 的一个可除子群, 于是 $\gamma_{c-1}(G)=\gamma_c(G)\oplus(\gamma_{c-1}(G)/\gamma_c(G))$. 因此, $\gamma_{c-1}(G)$ 是可除的. 采用归纳法可证 $G'=\gamma_2(G)=\gamma_3(G)\oplus(\gamma_2(G)/\gamma_3(G))$ 是可除的.

其次我们断言 $G'\leqslant\zeta(G)$. 事实上, 任取 $g\in G$, 设 $H=\langle G',g\rangle=G'\langle g\rangle$. 由于 G' 是不可分可除 Abel 群, 从而是可除局部循环群, 且 $H/G'=G'\langle g\rangle/G'\cong\langle g\rangle/\langle g\rangle\cap G'$ 是循环群, 由引理 2.2 知, H 是 Abel 群. 则 $[G',g]=1$, 从而 $G'\leqslant\zeta(G)$.

下证 $\zeta(G)$ 是可除的并且 $G/\zeta(G)$ 是无挠群. 设 $z\in\zeta(G)$, n 是一个整数. 因为 G 可除, 故存在 $x\in G$, 满足 $x^n=z$. 对于任意的 $g\in G$, 存在 $h\in G$, 使得 $h^n=g$. 因此 $[x,g]=[x,h^n]=[x,h]^n=[x^n,h]=[z,h]=1$, 则 $x\in\zeta(G)$, 所以 $\zeta(G)$ 是可除群, 并且 $G/\zeta(G)$ 是无挠群. 特别的, 设 T 是 G 的挠子群, 则 $T\leqslant\zeta(G)$.

因为 $G'\leqslant\zeta(G)$, 且 G' 可除, 所以存在 $\zeta(G)$ 的一个子群 D, 使得 $\zeta(G)=G'\oplus D$. 又由 $\zeta(G)$ 可除, 则有 D 是可除 Abel 群. 设 π_i 是某些素数的集合, 称 n 是一个 π_i数, 如果 n 是 π_i 中素数方幂的乘积. 记 $\mathbb{Q}_{\pi_i}=\{\frac{m}{n}\mid(m,n)=1,m\in\mathbb{Z},n\text{ 为正的 }\pi_i\text{数}\}$, 则存在 s 以及 $\pi_1\subseteq\pi_2\subseteq\cdots\subseteq\pi_t$, 使得

$$D\cong\underbrace{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}}_{s}\bigoplus\bigoplus_{i=1}^{t}(\mathbb{Q}_{\pi_i}/\mathbb{Z}),$$

其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数加群. 进一步地, $(s;\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_t)$ 是群 D 的同构不变量.

因 $\zeta(G)/G'$ 是 G/G' 的可除子群, 故存在 $S\leqslant G$, 使 $G/G'=(S/G')\oplus(\zeta(G)/G')$, 从而

$$\begin{aligned}G/G'&=(S/G')\oplus(\zeta(G)/G')\\&=(S/G')\oplus\frac{G'\oplus D}{G'}\\&=(S/G')\oplus D,\end{aligned}$$

则 $G=S\times D$. 又由 $S/G'\cong\frac{G/G'}{\zeta(G)/G'}\cong G/\zeta(G)$ 是可除的无挠 Abel 群, 则有它是 $\mathbb{Q}$ 上的有限维向量空间.

情形 1　$G'=\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$.

若 G' 是挠群, 那么它是可除挠 Abel 群, 则 G' 是拟循环群 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ 的直和. 由于 G' 不可分, 则存在某个素数 p, 使得 $G'=\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$.

注意到 $S'=\zeta(S)=G'$. 于是存在从 $S/\zeta S\times S/\zeta S$ 到 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ 的映射 f, 使得 $f(x\zeta S,y\zeta S)=[x,y]$, f 是非退化的反对称双线性映射. 事实上, S 是类为 2 的幂零群, 任取 $x,y,x_i,y_i\in S,i=1,2$, 容易验证 $[x_1x_2,y]=[x_1,y][x_2,y]$ 和 $[x,y_1y_2]=[x,y_1][x,y_2]$, 从而 f 是双线性的. 又由 $[x,x]=1$ 且 $[x,y]=[y,x]^{-1}$, 则有 f 是反对称的. 当 x 不是 S 的中心元时, 存在 $y\in S$ 使得 $[x,y]\neq1$, 这表明 $f(x\zeta S,y\zeta S)\neq0+\mathbb{Z}$, f 是非退化的.

设 $x\in S\setminus\zeta(S)$, 记

$$\langle(x\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle^{\perp}=\{y\zeta(S)\in S/\zeta(S)\mid[x^{\mathbb{Q}},y]=0+\mathbb{Z}\},$$

则 $\langle(x\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle^{\perp}$ 是 $S/\zeta(S)$ 的可除子群, 因此是 $S/\zeta(S)$ 的子空间. 设 $S/\zeta(S)=\langle(x\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle^{\perp}\oplus X$, 则 X 的秩一定等于 1. 假设 X 的秩大于 1, 取 $y_1,y_2\in S$, 使得 $\langle(y_1\zeta(S))^{\mathbb{Q}},(y_2\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle=\langle(y_1\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle\oplus\langle(y_2\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle\leqslant X$, 且 $[x,y_1]=\frac{1}{p}+\mathbb{Z}$, $[x,y_2]=-\frac{1}{p}+\mathbb{Z}$, 则 $[x^r,(y_1y_2)^s]=[x^r,y_1^s]+[x^r,y_2^s]+\mathbb{Z}=\frac{1}{p}(rs)_p-\frac{1}{p}(rs)_p+\mathbb{Z}=0+\mathbb{Z}$. 因此 $y_1y_2\in\langle(x\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle^{\perp}$, 与 $S/\zeta(S)=\langle(x\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle^{\perp}\oplus X$ 矛盾, 所以, X 的秩为 1. 设 $S/\zeta(S)=\langle(x\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle^{\perp}\oplus\langle(y\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle$,

则存在分解

$$S/\zeta(S)=\langle(x\zeta(S))^{\mathbb{Q}},(y\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle\oplus\langle(x\zeta(S))^{\mathbb{Q}},(y\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle^{\perp}.$$

记 $S_1=\langle(x\zeta(S))^{\mathbb{Q}},(y\zeta(S))^{\mathbb{Q}},\zeta S\rangle$, $T_1=\langle\langle(x\zeta(S))^{\mathbb{Q}},(y\zeta(S))^{\mathbb{Q}}\rangle^{\perp},\zeta S\rangle$. 则有 $[S_1,T_1]=1$, $S_1\cap T_1=\zeta S$ 且 $\zeta S_1=\zeta S=\zeta(T_1)$. 故 S 是 S_1 和 T_1 的中心积, 即 $S=S_1*T_1$.

当 $T_1/\zeta(S)\neq 0$ 时, T_1 是可除幂零群. 由于 $T_1'\leqslant S'$ 是可除群, 因而 $T_1'=S'=\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$. 又由 $\mathrm{rank}(T_1/\zeta(T_1))=\mathrm{rank}(S/\zeta S)-2$, 则归纳地假设 T_1 可以分解为中心积 $T_1=S_2*S_3*\cdots*S_r$, 从而 S 有中心积分解 $S=S_1*S_2*\cdots*S_r$, 这样可以将 S 形式化地写成

$$S=\left\{\left.\begin{bmatrix}1&a_{12}&a_{13}&a_{14}&\cdots&a_{1\ r+1}&b_{1\ r+2}\\0&1&0&0&\cdots&0&a_{2\ r+2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&a_{r\ r+2}\\0&0&0&\cdots&0&1&a_{r+1\ r+2}\\0&0&0&\cdots&0&0&1\end{bmatrix}\ \right|\ \begin{matrix}a_{ij}\in\mathbb{Q}\\b_{1\ r+2}\in\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}\end{matrix}\right\},$$

其中 $S_i\cong S_p$, 并且 (p,r) 是 S 的同构不变量.

注意到 $G=S\times D$, 其中 $D\cong\underbrace{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}}_{s}\bigoplus\bigoplus\limits_{k=1}^{t}(\mathbb{Q}_{\pi_k}/\mathbb{Z})$.

进一步地, $(p,r;s;\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_t)$ 是群 G 的同构不变量. 设 G_1 是有限秩可除幂零群且其换位子群是不可分 Abel 群, 且 $(p_1,r_1;s_1;\pi_1',\pi_2',\cdots,\pi_{t_1}')$ 为相应的参数. 如果 $(p,r;s;\pi_1,\pi_2,$
$\cdots,\pi_t)=(p_1,r_1;s_1;\pi_1',\pi_2',\cdots,\pi_{t_1}')$, 显然有 $G\cong G_1$. 反之, 如果 $\alpha:G\longrightarrow G_1$ 是一个群同构, 那么 $\alpha(G')=G_1'$, $\alpha(\zeta(G))=\zeta(G_1)$, 所以有 $G/\zeta(G)\cong G_1/\zeta(G_1)$, $\zeta(G)/G'\cong\zeta(G_1)/G_1'$. 因此 $p=p_1$, $r=r_1$, $(s;\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_t)=(s_1;\pi_1',\pi_2',\cdots,\pi_{t_1}')$.

情形 2 $G'=\mathbb{Q}$.

如果 G' 是无挠的, 那么它是可除无挠 Abel 群. 因此 G' 是有理加法群 $\mathbb{Q}$ 的直和. 由于 G' 不可分, 所以 $G'=\mathbb{Q}$.

注意到 $G=S\zeta(G)$, $G'=S'=\zeta(S)=\mathbb{Q}$. 为方便记, 设 $G'=S'=\{a^u\mid u\in\mathbb{Q}\}$ 对某个 $a\in G'$ 成立. 任取 xG', $yG'\in S/G'$, 注意到 $G'\leqslant\zeta(G)$, $[xG',yG']=[x,y]=a^{u(x,y)}$. 定义 S/S' 上的一个函数 ϕ 为 $\phi(xS',yS')=u(x,y)$, 则 ϕ 是 $S/S'\times S/S'$ 到 $\mathbb{Q}$ 的一个非退化的反对称双线性函数. 所以 S/S' 是一个辛空间. 因此存在一组辛正交基 ε_1, ε_{-1}, $\cdots$, ε_r, ε_{-r}, 设 $S_i/S'=\langle\varepsilon_i^{\mathbb{Q}},\varepsilon_{-i}^{\mathbb{Q}}\rangle$, 则

$$S_i\cong\left\{\left.\begin{bmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\&1&a_{23}\\&&1\end{bmatrix}\ \right|\ a_{ij}\in\mathbb{Q}\right\},$$

$S_i'=\zeta(S_i)=S'=\zeta(S)=\mathbb{Q}$, 并且 $S_i/S'=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}$. 显然 $S=S_1S_2\cdots S_r$, 并且当 $i\neq j$ 时, $[S_i,S_j]=1$, $S_i\cap S_j=\zeta(S)$. 因此, S 有中心积分解 $S=S_1*S_2*\cdots*S_r$, 故 S 可以形式化

的写成如下的形式:

$$S=\left\{\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1\ r+1} & a_{1\ r+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\ r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{r\ r+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r+1\ r+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \middle|\ a_{ij}\in\mathbb{Q}\right\},$$

则 $G=S\times D$, 其中 $D\cong\underbrace{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}}_{s}\bigoplus\bigoplus_{k=1}^{t}(\mathbb{Q}_{\pi_k}/\mathbb{Z})$.

进一步地, $(r;s;\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_t)$ 是 G 的同构不变量. 设 G_1 是有限秩可除幂零群且其换位子群是不可分 Abel 群, 相应的参数为 $(r_1;s_1;\pi_1',\pi_2',\cdots,\pi_{t_1}')$. 如果 $(r;s;\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_t)=(r_1;s_1;\pi_1',\pi_2',\cdots,\pi_{t_1}')$, 显然有 $G\cong G_1$. 反之, 如果 $\alpha:G\longrightarrow G_1$ 是一个群同构, 则 $\alpha(G')=G_1'$, $\alpha(\zeta(G))=\zeta(G_1)$, 所以有 $G/\zeta(G)\cong G_1/\zeta(G_1)$, $\zeta(G)/G'\cong\zeta(G_1)/G_1'$. 因此 $r=r_1$, $(s;\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_t)=(s_1;\pi_1',\pi_2',\cdots,\pi_{t_1}')$.

注 2.1 定理中只需假设 G/G' 是可除群, 此时容易证明 G 是可除群.

参 考 文 献

[1] Robinson D J S. A course in the theory of groups [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1996.

[2] 刘合国, 吴佐慧, 张继平, 等. 无限循环群被有限生成 Abel 群的中心扩张 [J]. 数学年刊 A 辑, 2015, 36(3):233–246.

Radicable Nilpotent Groups of Finite Rank with Indecomposable Abelian Commutator Subgroups

LIU Heguo[1]　ZHANG Jiping[2]　LIAO Jun[3]

[1]Department of Mathematics, Hubei University, Wuhan 430062, China.
E-mail: ghliu@hubu.edu.cn

[2]School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, China.
E-mail: jzhang@pku.edu.cn

[3]Corresponding author. Department of Mathematics, Hubei University, Wuhan 430062, China. E-mail: jliao@hubu.edu.cn

Abstract The structure of the radicable nilpotent groups of finite rank with indecomposable abelian commutator subgroups is completely determined. More exactly, the following theorem is proved.

Let G be a radicable nilpotent group of finite rank. Then the commutator subgroup of G is indecomposable and abelian if and only if $G' = \mathbb{Q}$ or $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ and G has a decomposition $G = S \times D$, where

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1\ r+1} & a_{1\ r+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\ r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{r\ r+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r+1\ r+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

if $G' = \mathbb{Q}$ and $S = S_1 * S_2 * \cdots * S_r$, $S_i \cong S_p$ if $G' = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$. Write S formally as

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1\ r+1} & b_{1\ r+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\ r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{r\ r+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r+1\ r+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \ \begin{array}{c} a_{ij} \in \mathbb{Q} \\ b_{1\ r+2} \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \end{array} \right\}.$$

Here D is a divisible abelian group such that $D \cong \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}}_{s} \bigoplus \bigoplus_{k=1}^{t} (\mathbb{Q}_{\pi_k}/\mathbb{Z})$, where s and t are nonnegative integers, and $\mathbb{Q}$ is the additive group of the rational number field, where π_k $(k = 1, 2, \cdots, t)$ are the sets of some prime numbers such that $\pi_1 \subseteq \pi_2 \subseteq \cdots \subseteq \pi_t$, and $\mathbb{Q}_{\pi_k} = \{\frac{m}{n} \mid (m, n) = 1,\ m \in \mathbb{Z},\ n$ is a positive π_k-number$\}$. Moreover, $(p, r; s; \pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_t)$ is an isomorphic invariant of G, that is to say, if H is also a radicable nilpotent group of finite rank with indecomposable abelian commutator subgroup, then G is isomorphic to H if and only if they have the same invariants.

Keywords Nilpotent group, Locally cyclic group, center, Commutator subgroup, Radicable group

2000 MR Subject Classification 20E22, 20E34

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 39 No. 3, 2018
by ALLERTON PRESS, INC., USA