数 学 年 刊 A 辑
2018, 39(3):297–308
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2018.0026

p-超循环嵌入子群的一个判别准则*

张 丽[1] 郭文彬[2] 陈啸宇[3]

提要 令 E 是有限群 G 的一个正规子群, 且 $\mathcal{U}$ 是所有有限超可解群的集合. E 称为在 G 中是 p-超循环嵌入的, 如果 E 的每个 pd-阶的 G-主因子是循环的. G 的子群 H 称为在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 如果存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G = HT$, 且 $(H \cap T)H_G/H_G \leqslant \Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$, 其中 $Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$ 是商群 G/H_G 的 $\mathcal{U}$-超中心. 作者证明, 如果 E 的一些 p-子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 那么 E 在 G 中是 p-超循环嵌入的. 作为应用, 得到了有限群是 p-超可解的若干判断准则, 并且推广了一些已知的结果.

关键词 Sylow p-子群, $\mathcal{U}$-Φ-可补充子群, p-超可解群, p-幂零群
MR (2000) 主题分类 20D10, 20D15, 20D20
中图法分类 O152
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2018)03-0297-12

1 引 言

本论文涉及的群均是有限群. 我们用 G 表示一个群, p 表示一个素数. 文中所用符号均是标准的. 没有交代的概念和符号, 读者可参见文 [1–3].

令 π 是所有素数组成的集合 $\mathbb{P}$ 的一个非空子集. 群 G 的正规子群 E 称为在 G 中是超循环嵌入的 (π-超循环嵌入的), 如果 $E = 1$ 或者 G 的所有包含于 E 的主因子 H/K (特别地, 还要求阶数 $|H/K|$ 被 π 中的至少一个素数整除) 是循环的. 我们用 $\mathcal{U}$ 表示所有超可解群的集合. 记号 $Z_{\pi\mathcal{U}}(G)$ 表示 G 的 $\pi\mathcal{U}$-超中心, 即群 G 的所有正规 π-超循环嵌入子群的乘积. 显然, $Z_{\mathcal{U}}(G) = Z_{\mathbb{P}\mathcal{U}}(G)$, 并称为 G 的 $\mathcal{U}$-超中心. 另一种极端情况, 当 $\pi = \{p\}$ 时, $Z_{p\mathcal{U}}(G)$ 是 G 的满足任一 pd-主因子是循环的最大正规子群.

超循环嵌入子群和 π-超循环嵌入子群对有限群的结构有着重要的影响, 并且一些重要的群类可由它们刻画. 例如, 若群 G 的所有素数阶和 4 阶循环子群是超循环嵌入的, 那么 G 是超可解的 (Huppert, Doerk). 群 G 是拟超可解的 (即对于 G 的每个非循环主因子 H/K, G 的每个元素作用在 H/K 上诱导内自同构) 当且仅当存在 G 的一个正规子群 E, 使得 $E \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$ 且 G/E 是半单的 (见 [4, 定理 C]). 关于这一课题的更多结果, 读者可参见文 [5–11].

我们的主要目标是用如下的新概念, 给出 p-超循环嵌入子群的一个新判别准则.

定义 1.1 群 G 的子群 H 称为在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 如果存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G = HT$, 且 $(H \cap T)H_G/H_G \leqslant \Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$, 其中 H_G 是 G 的包含

本文 2015 年 12 月 20 日收到, 2017 年 9 月 6 日收到修改稿.
[1]安徽建筑大学数理学院, 合肥 230022. E-mail: zhangli0516@ahjzu.edu.cn
[2]通信作者. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026. E-mail: wbguo@ustc.edu.cn
[3]南京师范大学数学科学学院, 南京 210023. E-mail: jelly@njnu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11771409), 安徽建筑大学科研启动基金 (No. K10807) 和南京师范大学科研启动基金 (No. 2015101XGQ0105) 的资助.

于 H 的最大正规子群, 且 $Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$ 是商群 G/H_G 的 $\mathcal{U}$-超中心.

我们知道, 群 G 的子群 H 称为在 G 中是: c-正规的 [12], 如果存在 G 的一个正规子群 T, 使得 $G=HT$, 且 $H\cap T\leqslant H_G$; $\mathcal{U}_c$-正规的 [13], 如果存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G=HT$, 且 $(H\cap T)H_G/H_G\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$; $S\Phi$-可补充的 [14], 如果存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G=HT$, 且 $H\cap T\leqslant \Phi(H)$. 由定义易知 c-正规子群, $\mathcal{U}_c$-正规子群以及 $S\Phi$-可补充子群都是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充子群. 但下例说明, 反之不一定成立.

例 1.1 令 $G=Z_4\times S_4$, 其中 $Z_4=\langle a\rangle$ 是一个 4 阶循环群, 且 S_4 是一个 4 次对称群. 令 $H=Z_2\times Z_4$, 其中 $Z_2=\langle a^2\rangle$ 且 $Z_4=\langle(1234)\rangle$, 那么

$$H_G=Z_2\times 1,\ \Phi(H/H_G)=(Z_2\times Z_2)/(Z_2\times 1),$$

且 $Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)=(Z_4\times 1)/(Z_2\times 1)$. 注意到 H 在 G 中的次正规补充只有 G 和 $Z_4\times A_4$. 容易证明, H 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 但 H 在 G 中既不是 $\mathcal{U}_c$-正规的, 也不是 $S\Phi$-可补充的.

我们的主要结果如下.

定理 1.1 令 E 是群 G 的一个正规子群, P 是 E 的一个 Sylow p-子群且 $|P|>p$. 假设存在 P 的一个子群 D, 使得 $1<|D|<|P|$, 且下列成立:

(1) 如果 $|D|=2$ 且 P 是一个非交换 2-群, 那么 P 的所有 2 阶和 4 阶循环子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的;

(2) 否则, P 的所有 $|D|$ 阶子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

因此 $E\leqslant Z_{p\mathcal{U}}(G)$.

定理 1.1 的证明包含大量的步骤, 如下的两个命题是其中的主要步骤, 同时它们也十分有意义.

命题 1.1 令 P 是群 G 的一个正规 p-子群. 假设存在 P 的一个子群 D, 使得 $1<|D|<|P|$, 且下列成立:

(1) 如果 $|D|=2$ 且 P 是一个非交换 2-群, 那么 P 的所有 2 阶和 4 阶循环子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的;

(2) 否则, P 的所有 $|D|$ 阶子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

因此 $P\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$.

命题 1.2 令 P 是群 G 的一个 Sylow p-子群且 $|P|>p$. 假设存在 P 的一个子群 D, 使得 $1<|D|<|P|$, 且下列成立:

(1) 如果 $|D|=2$ 且 P 是一个非交换 2-群, 那么 P 的所有 2 阶和 4 阶循环子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的;

(2) 否则, P 的所有 $|D|$ 阶子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

因此 G 是 p-超可解的.

2 预备知识

引理 2.1 [15] (1) 若群 G 是 p-超可解的, 且 $O_{p'}(G)=1$, 那么 G 有唯一的 Sylow p-子群.

(2) 若 T 是群 G 的一个次正规子群, 且 $|G:H|$ 是素数 p 的方幂, 那么 $O^p(G)\leqslant T$.

引理 2.2　令 H 和 K 是群 G 的子群, $H \leqslant K$ 且 H 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

(1) 存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G = HT$, $H_G \leqslant T$ 且

$$(H \cap T)/H_G \leqslant \Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(G/H_G).$$

(2) H 在 K 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

(3) 如果 N 是 G 的一个正规子群且满足 $N \leqslant H$ 或者 $(|H|, |N|) = 1$, 那么 HN/N 在 G/N 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

(4) 如果 H 是一个 p-群, 且 N 是 G 的一个包含于 $O^p(G)$ 的正规子群, 那么 HN/N 在 G/N 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

证　由假设知, 存在 G 的一个次正规子群 T_0, 使得 $G = HT_0$, 且 $(H \cap T_0)H_G/H_G \leqslant \Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$.

(1) 令 $T = T_0H_G$. 容易证明, 子群 T 使得 (1) 成立.

(2) 运用 (1) 的记号, 并考虑 K 的子群 $T_1 = T \cap K$. 易知 T_1 是 K 的次正规子群 (见 [1, 第 A 章, 引理 14.1(a)]), 且满足 $HT_1 = HT \cap K = K$. 另外, 由 [2, 第 1 章, 定理 2.7(a)] 可知

$$\begin{aligned}(H \cap T_1)/H_G &= (H \cap T)/H_G \cap K/H_G \\ &\leqslant \Phi(H/H_G)(Z_{\mathcal{U}}(G/H_G) \cap K/H_G) \\ &\leqslant \Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(K/H_G).\end{aligned}$$

注意到 $H_G \leqslant H_K$, 且存在同构 $(H \cap T_1)H_K/H_K \cong ((H \cap T_1)/H_G)(H_K/H_G)/(H_K/H_G)$. 因此, 我们可由 [1, 第 A 章, 定理9.2(e)] 和 [2, 第 1 章, 定理 2.6(d)] 得到

$$(H \cap T_1)H_K/H_K \leqslant \Phi(H/H_K)Z_{\mathcal{U}}(K/H_K).$$

这说明 H 在 K 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

(3) 运用 (1) 的记号. 显然 TN/N 是 G/N 的一个次正规子群 (见 [1, 第 A 章, 引理 14.1(b)]), 使得 $(HN/N)(TN/N) = G/N$. 如果 $N \leqslant H$, 那么 $H \cap TN = (H \cap T)N$. 现在设 $(|H|, |N|) = 1$, 那么 $N \leqslant T$, 进而 $HN \cap T = (H \cap T)N$. 与 (2) 的讨论类似, 我们有

$$\begin{aligned}(HN \cap TN)(HN)_G/(HN)_G &= (H \cap T)(HN)_G/(HN)_G \\ &\leqslant \Phi(HN/(HN)_G)Z_{\mathcal{U}}(G/(HN)_G).\end{aligned}$$

由此可知 HN/N 在 G/N 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

(4) 运用 (1) 的记号. 注意到引理 2.1(2) 表明 $N \leqslant O^p(G) \leqslant T$. 因此, 类似于 (3), 我们能够证明 HN/N 在 G/N 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

引理 2.3 [16]　令群 G 的 Sylow p-子群是 p^2 阶的, 且 $O_{p'}(G) = 1$. 如果 G 有唯一的极小正规子群 $\mathrm{Soc}(G)$, 且 $\mathrm{Soc}(G)$ 同构于一个 p 阶循环群, 那么 G 是 p-超可解的.

群类 $\mathcal{F}$ 称为群系, 如果 $\mathcal{F} = \emptyset$ 或者 $1 \in \mathcal{F}$, 且对任一群 G, 商群 $G/G^{\mathcal{F}}$ 的所有同态像属于 $\mathcal{F}$, 其中 $G^{\mathcal{F}} = \bigcap\{N | N \trianglelefteq G, G/N \in \mathcal{F}\}$. 群系 $\mathcal{F}$ 称为饱和的, 是指当 $G/\Phi(G) \in \mathcal{F}$ 时总有 $G \in \mathcal{F}$.

引理 2.4 [2,17−18]　令 $\mathcal{F}$ 是一个饱和群系, 且 F 是 $\mathcal{F}$ 的典范屏 (见 [2, P. 3] 或 [1, 第 IV 章, 定理 3.7 和定义 3.9]). 令 E 是群 G 的一个正规 p-子群, 那么 $E \leqslant Z_{\mathcal{F}}(G)$ 当且仅当下列之一是成立的:

(1) $G/C_G(E) \in F(p)$.

(2) $E/\Phi(E) \leqslant Z_{\mathcal{F}}(G/\Phi(E))$.

引理 2.5 [19] 令 P 是一个 p-群, 且 α 是 P 的一个 p'-自同构.

(1) 如果 $[\alpha, \Omega_2(P)] = 1$, 那么 $\alpha = 1$.

(2) 如果 $[\alpha, \Omega_1(P)] = 1$, 且 p 是一个奇素数或者 P 是交换的, 那么 $\alpha = 1$.

注意到, 群 G 的子群 H 称为在 G 中是 s-置换的 [20]或者 s-拟正规的, 如果 H 与 G 的所有 Sylow 子群 P 是可置换的, 即 $HP = PH$.

引理 2.6 [2,15,21] (1) 令 V 是群 G 的一个 4 阶 s-拟正规子群. 如果 $V = A \times B$, 其中 $|A| = |B| = 2$ 且 A 在 G 中是 s-拟正规的, 那么 B 在 G 中也是 s-拟正规的.

(2) 令 H 是群 G 的一个 p-子群, 那么 H 在 G 中是 s-拟正规的当且仅当 $O^p(G) \leqslant N_G(H)$.

3 主要结果的证明

引理 3.1 令 N 是 G 的一个极小正规子群, 那么 $N \leqslant O^p(G)$ 或者 $|N| = p$.

证 如果 $N \nleq O^p(G)$, 那么 $N \cap O^p(G) = 1$. 注意到 $NO^p(G)/O^p(G)$ 是 p-群 $G/O^p(G)$ 的极小正规子群. 因此 G-同构 $N \cong NO^p(G)/O^p(G)$ 表明 $|N| = p$.

下面两个引理是证明命题 1.1 的主要步骤.

引理 3.2 令 P 是群 G 的一个正规 p-子群. 如果 P 的每个极大子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 那么 $P \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$.

证 用极小反例法. 假设结论不成立, 且令 (G, P) 是一个使得 $|G| + |P|$ 最小的反例. 我们通过下面的步骤给出矛盾.

(1) 群 G 的包含于 P 的极小正规子群是唯一的, 我们记为 N, 且 N 满足 $P/N \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/N)$ 和 $|N| > p$.

如果 P 是 G 的一个极小正规子群, 那么 (1) 显然成立. 现在设 $N < P$. 由引理 2.2(3) 知 $(G/N, P/N)$ 满足引理假设, 于是 (G, P) 的选取表明 $P/N \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/N)$, 且 $|N| > p$. 令 $L(\neq N)$ 是 G 的另一个包含于 P 的极小正规子群. 类似地可知 $P/L \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/L)$. 但此时, G-同构 $N \cong NL/L$ 表明 $|N| = p$. 该矛盾说明 (1) 是成立的.

(2) $N \leqslant \Phi(P)$, 由此给出最后矛盾.

假设 $\Phi(P) = 1$, 那么 N 在 P 中是可补的. 令 B 是 N 在 P 中的一个补, 且取 N_1 是 N 的一个极大子群. 记 $K = N_1B$, 则 K 是 P 的一个极大子群, 且 $K_G = 1 = \Phi(K)$. 由假设, K 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 于是存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G = KT$, 且 $K \cap T \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 因为引理 2.1(2) 和引理 3.1 表明 $N \leqslant O^p(G) \leqslant T$, 所以 $N_1 = K \cap N \leqslant K \cap T \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 结合 N 的极小性, 则有 $N \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$, 进而 $|N| = p$, 矛盾. 因此 $\Phi(P) > 1$, 且由 (1) 知 $N \leqslant \Phi(P)$. 那么 $P/\Phi(P) \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/\Phi(P))$. 此时, 由引理 2.4(2), 我们得到 $P \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$, 矛盾. 这就完成了引理的证明.

引理 3.3 令 P 是群 G 的一个正规 p-子群. 假设 P 的每个 p 阶子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 当 P 是一个非交换 2-群时, 进一步假设 P 的每个 4 阶循环子群在 G 中也是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 那么 $P \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$.

证 假设结论不成立, 且令 (G, P) 是一个使得 $|G| + |P|$ 最小的反例. 如果 $p > 2$ 或

者 P 是交换的, 那么我们用 Ω 表示 P 的子群 $\Omega_1(P)$; 否则, 令 $\Omega=\Omega_2(P)$. 我们通过下列步骤得到矛盾.

(1) 存在 G 的一个包含于 P 的正规子群 R, 使得 P/R 是 G 的一个非循环主因子且 $R\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 另外, 对于 G 的任一正规子群 V, 如果 $V<P$, 那么 $V\leqslant R$.

显然, 存在 G 的一个正规子群 R, 使得 P/R 是 G 的一个主因子. 因为 (G,R) 满足引理假设, 所以我们可由 (G,P) 的选取得到 $R\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$, 且 P/R 是非循环的. 类似地, 可得 $V\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 如果 $V\nleqslant R$, 那么 $P=RV\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$, 矛盾. 因此 $V\leqslant R$.

(2) 不存在 G 的正规子群 M, 使得 $|G/M|=p$, 且 $G=PM$.

如若不然, 即存在 G 的一个正规子群 M, 使得 $|G/M|=p$, 且 $G=PM$. 那么由 (1) 知 $P\cap M\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 注意到 G-同构 $G/M\cong P/(P\cap M)$ 表明 $P/(P\cap M)$ 是 G 的循环主因子. 因此, 由定义知 $P\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$, 矛盾.

(3) $\Omega\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$, 由此给出最后矛盾.

如果 $\Omega\nleqslant P$, 那么由 (1) 知 $\Omega=P$. 令 $L=\langle x\rangle$, 其中 $x\in P\setminus R$, 那么 L 是 p 阶或者 4 阶的. 由假设, L 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 于是结合引理 2.2(1) 知, 存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G=LT$, $L_G\leqslant T$ 且 $(L\cap T)/L_G\leqslant\Phi(L/L_G)Z_{\mathcal{U}}(G/L_G)$. 如果 $T<G$, 那么存在 G 的一个包含 T 的极大子群 M. 容易证明 M 满足 $M\trianglelefteq G$, $|G:M|=p$ 和 $G=PM$, 这与 (2) 矛盾. 因此 $T=G$, 进而 $L/L_G\leqslant\Phi(L/L_G)Z_{\mathcal{U}}(G/L_G)$. 注意到 $L/L_G=\Phi(L/L_G)(L/L_G\cap Z_{\mathcal{U}}(G/L_G))=L/L_G\cap Z_{\mathcal{U}}(G/L_G)$, 因此 $L/L_G\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/L_G)$. 再由 (1) 和 [2, 第 1 章, 定理 2.6(d)], 我们得到 $1<LR/R\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/R)=Z_{\mathcal{U}}(G)/R$, 这说明 $P/R\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)/R$, 进而 $P\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$, 矛盾.

由上可知 $\Omega<P$. 再由 (1), 我们有 $\Omega\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 此时, 我们可由 (1), 引理 2.4(1) 以及引理 2.5 得到 $G/C_G(\Omega)\in F(p)$ 且 $C_G(\Omega)/C_G(P)\in\mathcal{N}_p$, 其中 F 是 $\mathcal{U}$ 的典范屏且 $\mathcal{N}_p$ 是所有 p-群组成的群类. 两者结合, 我们得到 $G/C_G(P)\in\mathcal{N}_pF(p)=F(p)$. 再次由引理 2.4(1) 则知 $P\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 该矛盾完成了引理的证明.

命题 1.1 的证明　假设结论不成立, 且令 (G,P) 是一个使得 $|G|+|P|$ 为最小的反例. 我们通过下列步骤得到矛盾.

(1) $|D|>p$ 且 $|P:D|>p$ (由引理 3.2 和引理 3.3 立得).

(2) 对于 P 的任一 $|D|$ 阶子群 H, 有 $H/H_G\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$.

由假设知, 存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G=HT$, 且 $(H\cap T)H_G/H_G\leqslant\Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$. 如果 $T<G$, 那么存在 G 的一个包含 T 的极大子群 M. 容易证明 M 满足 $M\trianglelefteq G$, $|G/M|=p$ 和 $G=PM$. 注意到 $|P:P\cap M|=|G/M|=p$. 因此 $(G,P\cap M)$ 满足命题假设, 这由 (1) 可知, 进而 (G,P) 的选取表明 $P\cap M\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 由定义可知, 此时 $P\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$, 矛盾. 故 $T=G$, 且 $H/H_G\leqslant\Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$. 再由等式

$$H/H_G=\Phi(H/H_G)(H/H_G\cap Z_{\mathcal{U}}(G/H_G))=H/H_G\cap Z_{\mathcal{U}}(G/H_G),$$

我们得到 $H/H_G\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$.

(3) 令 N 是 G 的一个包含于 P 的极小正规子群, 那么 $|N|<|D|$.

假设 $|N|>|D|$. 设 H 是 N 的一个 $|D|$ 阶子群. 显然 $H_G=1$, 且由 (2) 知 $H\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 从而 N 的极小性表明 $N\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 这说明 $|N|=p$ 且 $|D|=1$, 但这与 (1) 矛盾.

假设 $|N|=|D|$. 因为 $|P:D|>p$, 所以存在 P 的一个子群 S, 使得 N 是 S 的一个极大子群. 如果 $N=\Phi(S)$, 那么 S 是循环群, 于是 N 也是循环的且 $|N|=|D|=p$, 这与 (1) 矛盾. 因此 $\Phi(S)<N$, 那么存在 N 的一个包含 $\Phi(S)$ 的极大子群 N_1. 容易证明存在 S 的另一个极大子群 B, 使得 $B\cap N=N_1$. 事实上, 由于 $N/\Phi(S)$ 在 $S/\Phi(S)$ 中是可

补的, 设 $B_1/\Phi(S)$ 是 $N/\Phi(S)$ 在 $S/\Phi(S)$ 中的一个补, 那么 S 的子群 $B = B_1N_1$ 满足上述条件. 因为 $|B| = |D|$, 所以由 (2) 知 $B/B_G \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/B_G)$. 首先, 假设 $B_G = B$. 此时 $S = N \times B$ 且 $|D| = |N| = |S/B| = p$, 矛盾. 其次, 设 $1 < B_G < B$, 那么 $S = N \times B_G$. 注意到 $1 < B/B_G \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/B_G) \cap S/B_G$, 且存在 G-同构 $S/B_G \cong N$. 因此, 我们得到 $S/B_G \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/B_G)$, 同样有 $|N| = |S/B_G| = p$, 矛盾. 最后假设 $B_G = 1$, 那么 $B \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 此时 $N_1 = N \cap B \leqslant N \cap Z_{\mathcal{U}}(G) = 1$. 由此可知 $|N| = p$, 矛盾. 上述矛盾说明 $|N| < |D|$.

(4) $P/N \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/N)$. 因此, N 是 G 的唯一包含于 P 的极小正规子群, 且 $|N| > p$.

由 (3) 和引理 2.2(3), P/N 的每个 $|D|/|N|$ 阶子群在 G/N 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 现在假设 $|D|/|N| = 2$ 且 P/N 是一个非交换 2-群.

如果 $|N| = 2$, 那么 $N \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G) \cap Z(P)$ 且 $|D| = 4$. 我们将要证明, 在这种情况下, P 的所有 2 阶和 4 阶子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 令 L 是 P 的任一 2 阶子群. 因为正规子群在 G 中总是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 所以不妨设 $L_G = 1$. 记 $H = N \times L$, 那么 H 是 P 的一个 4 阶子群. 首先, 如果 $H_G = N$, 那么由 (2) 可知 $H/N \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/N) = Z_{\mathcal{U}}(G)/N$, 进而 $L \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 其次, 设 $H_G = H$. 因为 $|N| = 2 = |H/N|$, 所以由定义知 $H \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$, 我们同样得到 $L \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 综上, 总能证明 L 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 再由引理 3.3, $P \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$, 矛盾. 以上说明 $|N| > 2$, 进而由引理 3.1 知 $N \leqslant O^2(G)$. 令 X/N 是 P/N 的任一 4 阶循环子群. 如果 $N \leqslant \Phi(X)$, 那么 X 是循环群, 此时 N 是循环群且 $|N| = 2$, 矛盾. 故 $N \nleqslant \Phi(X)$, 从而存在 X 的一个极大子群 X_1, 使得 $X = X_1N$. 因为 $|X_1| = |D|$, 所以由假设和引理 2.2(4) 知 X/N 在 G/N 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 由此可知 $(G/N, P/N)$ 满足命题假设. 再由 (G, P) 的选取知 $P/N \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/N)$. 故 (4) 成立.

(5) 最后的矛盾.

假设 $\Phi(P) = 1$. 令 S 是 P 的一个满足 $N \leqslant S$ 和 $|S| = p|D|$ 的子群. 设 B 是 N 在 S 中的一个补, 并取 N_1 是 N 的一个极大子群. 记 $K = N_1B$, 那么 K 是 S 的一个极大子群且 $K_G = 1$. 因为 $|K| = |D|$, 所以由 (2) 知 $K \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 从而 $N_1 = K \cap N \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G) \cap N = 1$. 由此可知 $|N| = p$, 矛盾. 故 $\Phi(P) > 1$. 再由 (4), $N \leqslant \Phi(P)$, 进而 $P/\Phi(P) \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/\Phi(P))$. 此时, 我们可由引理 2.4(2) 得到 $P \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$, 矛盾. 命题就此得证.

为了更方便地证明命题 1.2, 我们首先给出如下两个引理.

引理 3.4 令 P 是群 G 的一个 Sylow p-子群. 如果 P 的每个极大子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 那么 G 是 p-超可解的或者 $|P| = p$.

证 假设结论不成立, 并取 G 是一个极小阶反例. 显然, $|P| \geqslant p^2$. 我们通过下列步骤给出矛盾.

(1) G 不是一个非交换单群.

如果 G 是一个非交换单群, 那么 $Z_{\mathcal{U}}(G) = 1 = (P_1)_G$, 其中 P_1 是 P 的任一极大子群. 由假设, P_1 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 于是存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G = P_1T$ 且 $P_1 \cap T \leqslant \Phi(P_1)$. 因为 G 是一个非交换单群, 所以容易证明 $T = G$. 此时 $P_1 \leqslant \Phi(P_1)$, 即 $P_1 = 1$, 矛盾. 故 (1) 成立.

(2) 令 N 是 G 的一个极小正规子群. 那么 G/N 是 p-超可解的或者 $|PN/N| = p$. 由此可知 $O_{p'}(G) = 1$.

设 M/N 是 PN/N 的一个极大子群. 那么 $M = NP_1$, 其中 $P_1 = P \cap M$ 是 P 的一个极大子群. 由引理 3.1, $N \leqslant O^p(G)$ 或者 $|N| = p$. 再由引理 2.2(3)(4), 我们得到 M/N 在 G/N 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 这说明 G/N 满足引理假设, 从而 G 的选取表明 (2) 成立.

(3) $1 < P \cap N < P$.

由 (2) 知 $1 < P \cap N$. 假设 $P \leqslant N$, 那么我们可由引理 2.2(2) 和 G 的选取得到 N 是 p-超可解的. 再由 (2) 和引理 2.1(1) 得到 $P \trianglelefteq N$. 进而得到 $P \trianglelefteq G$ 且 $P = N$. 再次由 (2) 知 $Z_{\mathcal{U}}(G) = 1$. 设 P_1 是 P 的任一极大子群, 那么 $(P_1)_G = 1 = \Phi(P_1)$. 由假设, P_1 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 于是存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G = P_1T$ 且 $P_1 \cap T = 1$. 因为引理 2.1(2) 和引理 3.1 表明 $P \leqslant O^p(G) \leqslant T$, 所以 $P_1 = P_1 \cap T = 1$, 此时 $|P| = p$, 矛盾. 故 (3) 成立.

(4) G 有唯一的极小正规子群, 记为 N.

假设 N_1 和 N_2 是 G 的两个互异的极小正规子群. 由 (2), 我们可以把证明分成 3 种情形. 首先, 如果 G/N_1 和 G/N_2 都是 p-超可解的, 那么 $G \cong G/(N_1 \cap N_2)$ 是 p-超可解的, 矛盾. 其次, 不失一般性, 假设 G/N_1 是 p-超可解的, 且 $|G/N_2|_p = p$. 由 (3) 知 $p \mid |N_2|$, 从而 G-同构 $N_2 \cong N_2N_1/N_1$ 表明 $|N_2| = p$ 且 $|P| = p^2$. 再次由 (3), 我们得到 $|N_1 \cap P| = p$. 注意到 $N_1 \cap P$ 是 N_1 的一个 Sylow p-子群. 因此 N_1 是一个非交换单群. 由假设和引理 2.2(2) 知 $N_1 \cap P$ 在 N_1 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 类似于 (1) 的证明, 可知这是不可能的. 最后, 设 $|G/N_1|_p = |G/N_2|_p = p$, 那么 $|P \cap N_1| = |P \cap N_2| = p$, 且 $|P| = p^2$. 容易证明, N_1 和 N_2 中至少有一个是非交换单群. 类似于上面的证明可知这是不可能的. 因此 (4) 成立.

(5) $O_p(G) = 1$, 从而 $Z_{\mathcal{U}}(G) = 1$.

假设 $O_p(G) \neq 1$, 那么由 (4) 知 $N \leqslant O_p(G)$. 另外, 由 (2), (4) 和引理 2.3, $|N| > p$. 那么在这种情况下, $Z_{\mathcal{U}}(G) = 1$. 再次由 (2) 知 G/N 是 p-超可解的或者 $|P/N| = p$. 首先假设 $|P/N| = p$, 那么 N 是 P 的一个极大子群. 如果 $N = \Phi(P)$, 那么 P 是循环的, 从而 N 也是循环的且 $|N| = p$, 矛盾. 所以存在 P 的一个极大子群 P_1, 使得 $N \nleqslant P_1$, 于是 $P = NP_1$. 显然, $(P_1)_G = 1$. 由假设, P_1 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 于是存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G = P_1T$, 且 $P_1 \cap T \leqslant \Phi(P_1)$. 易知 $P \nleqslant T$, 且由引理 2.1(2) 和引理 3.1 知 $N \leqslant O^p(G) \leqslant T$. 因此, N 是 T 的一个 Sylow p-子群. 再由 Schur-Zassenhaus 定理, $T = NT_{p'}$, 其中 $T_{p'}$ 是 T 的一个 Hall p'-子群. 如果 $N \leqslant \Phi(G)$, 那么 $G = P_1T_{p'}$. 由此可知 $P = P_1(P \cap T_{p'}) = P_1$, 矛盾. 该矛盾表明 $N \nleqslant \Phi(G)$, 于是存在 G 的一个极大子群 M, 使得 $G = N \rtimes M$, 那么 $P = N \rtimes (P \cap M)$. 因为 $P \cap M < P$, 所以存在 P 的一个包含 $P \cap M$ 的极大子群 P_2. 显然 $(P_2)_G = 1$. 由假设, 存在 G 的一个次正规子群 K, 使得 $G = P_2K$, 且 $P_2 \cap K \leqslant \Phi(P_2)$. 因为引理 2.1(2) 和引理 3.1 表明 $N \leqslant O^p(G) \leqslant K$, 所以 $P_2 \cap N \leqslant P_2 \cap K \leqslant \Phi(P_2)$. 此时 $P_2 = (P \cap M)(P_2 \cap N) = P \cap M$, 进而 $|N| = p$, 矛盾. 现在假设 G/N 是 p-超可解的. 显然, 此时 $N \nleqslant \Phi(G)$. 由与上述完全相同的讨论可知这是不可能的. 因此 $O_p(G) = 1$. 再结合 (2), 则有 $Z_{\mathcal{U}}(G) = 1$.

(6) 最后的矛盾.

如果 $PN < G$, 那么由引理 2.2(2) 和 G 的选取知 PN 是 p-超可解的. 由此可知 N 是 p-超可解的. 再由 (2), (3) 和引理 2.1(1), 则有 $N \leqslant O_p(G)$, 但这与 (5) 矛盾. 因此 $G = PN$, 且易知 $N = O^p(G) < G$. 所以存在 G 的一个包含 N 的极大子群 M. 容易证明 M 满足 $M \trianglelefteq G$, $G = PM$ 和 $|G/M| = p$. 注意到 $|P : P \cap M| = |G/M| = p$. 因此, $P_1 = P \cap M$ 是 P 的一个极大子群, 且由 (5) 知 $(P_1)_G = 1$. 由假设, P_1 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 于是存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G = P_1T$, 且 $P_1 \cap T \leqslant \Phi(P_1)$. 由引理 2.1(2) 知 $N = O^p(G) \leqslant T$, 从而 $P \cap N \leqslant P_1 \cap T \leqslant \Phi(P_1) \leqslant \Phi(P)$. 此时, 我们可由 [3, 第 IV 章, 定理 4.7] 得到 N 是 p-幂零的, 但这与 (2) 和 (5) 矛盾. 这就完成了引理的证明.

引理 3.5　令 p 是 $|G|$ 的一个素因子. 假设群 G 的每个 p 阶子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 当 $p = 2$ 且 G 有一个非交换的 Sylow 2-子群时, 进一步假设 G 的每个 4 阶循环子群在 G 中也是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 那么 G 是 p-超可解的.

证 假设结论不成立, 且令 G 是一个极小阶反例. 我们通过下列步骤得到矛盾.

(1) $O_{p'}(G)=1$, 且 G 是一个极小非 p-超可解群.

这由引理 2.2(2)(3) 和 G 的选取立得.

(2) $G/\Phi(G)$ 是一个非交换单群.

由 (1) 和 [22, 定理 1], $G/\Phi(G)$ 有唯一的极小正规子群 $L/\Phi(G)=G^{\mathcal{U}^p}\Phi(G)/\Phi(G)$, 且显然 $p\mid |L/\Phi(G)|$. 假设 $L/\Phi(G)<G/\Phi(G)$, 那么由 (1) 知 $L/\Phi(G)$ 是交换的, 进而 L 是可解的. 再由 (1) 和 [23, 定理 3.4.2], 我们得到: (i) $G^{\mathcal{U}^p}$ 是一个 p-子群, 且其幂指数是 p 或者 4 (当 $G^{\mathcal{U}^p}$ 是一个非交换 2-群时); (ii) $G^{\mathcal{U}^p}/\Phi(G^{\mathcal{U}^p})$ 是 G 的一个非循环主因子. 取 $x\in G^{\mathcal{U}^p}\setminus\Phi(G^{\mathcal{U}^p})$, 那么由 (i), $H=\langle x\rangle$ 是 p 阶或者 4 阶的. 另外 $H_G\leqslant\Phi(G^{\mathcal{U}^p})$. 事实上, 如果 $H_G\nleqslant\Phi(G^{\mathcal{U}^p})$, 那么 $G^{\mathcal{U}^p}/\Phi(G^{\mathcal{U}^p})=H_G\Phi(G^{\mathcal{U}^p})/\Phi(G^{\mathcal{U}^p})$ 是循环的, 但这与 (ii) 矛盾. 由假设, H 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 于是结合引理 2.2(1) 知存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G=HT$, $H_G\leqslant T$ 且 $(H\cap T)/H_G\leqslant\Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$. 因为引理 2.1(2) 表明 $G^{\mathcal{U}^p}\leqslant O^p(G)\leqslant T$, 所以 $H/H_G\leqslant\Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$. 再由等式

$$H/H_G=\Phi(H/H_G)(H/H_G\cap Z_{\mathcal{U}}(G/H_G))=H/H_G\cap Z_{\mathcal{U}}(G/H_G),$$

$H/H_G\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$, 进而 $1<H\Phi(G^{\mathcal{U}^p})/\Phi(G^{\mathcal{U}^p})\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/\Phi(G^{\mathcal{U}^p}))$. 由此可知

$$G^{\mathcal{U}^p}/\Phi(G^{\mathcal{U}^p})\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/\Phi(G^{\mathcal{U}^p})),$$

但这与 (ii) 矛盾. 因此 $G/\Phi(G)=L/\Phi(G)$ 是非交换的.

(3) $\Phi(G)=Z(G)$.

由 (1) 和 (2), $F(G)=\Phi(G)=O_p(G)\geqslant Z(G)$. 如果 $C=C_G(O_p(G))<G$, 那么由 (2) 知 $C\leqslant\Phi(G)$. 令 M 是 G 的任一极大子群. 由 (1), 我们得到 $O_p(G)\leqslant M=Z_{\mathcal{U}^p}(M)$, 于是 $O_p(G)\leqslant Z_{\mathcal{U}}(M)$. 再由引理 2.4(1), $M/C_M(O_p(G))=M/C\in F(p)\subseteq\mathcal{U}$, 其中 F 是 $\mathcal{U}$ 的典范屏. 由此可知 M/C 是超可解的, 且 G/C 是一个极小非超可解群. 因此 G/C 是可解的 (见 [24, Huppert 10.3.4]), 此时 G 也是可解的, 但这与 (2) 矛盾. 因此 $C=G$, 且 (3) 是成立的.

(4) 最后的矛盾.

注意到, 如果 G 的所有 p 阶和 4 阶 (当 $p=2$ 时) 元素属于 $\Phi(G)=Z(G)$, 那么 G 是 p-幂零的 (见[3, 第 IV 章, 定理 5.5]). 因此, 存在 $x\in G\setminus\Phi(G)$ 是一个 p 阶或者 4 阶元素. 记 $H=\langle x\rangle$. 如果 H 正规于 G, 那么由 (2) 知 $G=H\Phi(G)=H$, 矛盾. 再次由 (2) 知 $H_G\leqslant\Phi(G)$. 由假设, H 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 于是结合引理 2.2(1) 知存在 G 的一个次正规子群 T, 使得 $G=HT$, $H_G\leqslant T$ 且 $(H\cap T)/H_G\leqslant\Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$. 因为 $T\Phi(G)/\Phi(G)$ 是 $G/\Phi(G)$ 的一个次正规子群, 因此 $T\Phi(G)=\Phi(G)$ 或者 G. 若 $T=G$, 那么 $H/H_G\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$. 与 (1) 类似, 我们能够得到 $H\Phi(G)/\Phi(G)\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/\Phi(G))=1$, 但这与 x 的选取矛盾. 然而当 $T\leqslant\Phi(G)$ 时, $G=HT=H$, 矛盾. 故引理得证.

命题 1.2 的证明 假设结论不成立, 且令 G 是一个极小阶反例. 我们通过下列步骤得到矛盾.

(1) $O_{p'}(G)=1$, $|D|>p$ 且 $|P:D|>p$.

这由引理 2.2(3)、引理 3.4、引理 3.5 以及 G 的选取立得.

(2) $O^p(G)=G$ 且 $O_p(G)\neq 1$.

如果 $O^p(G)<G$, 那么存在 G 的一个包含 $O^p(G)$ 的极大子群 M. 易知 M 满足 $M\trianglelefteq G$, $|G/M|=p$ 和 $G=PM$. 因为 $|P:P\cap M|=|G:M|=p$, 所以由 (1) 和引理 2.2(2) 知 M 满足命题假设, 于是 G 的选取表明 M 是 p-超可解的, 且 G 是 p-可解的. 再由 (1) 和引理

2.1(1) 知 $P\cap M\trianglelefteq M$, 进而 $P\cap M\trianglelefteq G$. 注意到 $G/(P\cap M)$ 是 p-超可解的, 且由 (1) 和命题 1.1 知 $P\cap M\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 因此 G 是 p-超可解的, 矛盾. 故 $O^p(G)=G$.

假设 $O_p(G)=1$. 结合 (1), 我们有 $Z_{\mathcal{U}}(G)=1$. 令 H 是 P 的任一 $|D|$ 阶或者 4 阶循环 (当 $|D|=2$ 且 P 非交换时) 子群, 那么显然 $H_G=1$. 因为 H 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 所以结合上述结果就有 $H\leqslant\Phi(H)$, 即 $H=1$, 矛盾. 故 $O_p(G)>1$.

(3) 令 N 是 G 的一个包含于 $O_p(G)$ 的极小正规子群, 那么 $|N|<|D|$.

如果 H 是 G 的一个 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的 p-子群, 那么由 (2), $H/H_G\leqslant\Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$. 再由等式 $H/H_G=\Phi(H/H_G)(H/H_G\cap Z_{\mathcal{U}}(G/H_G))=H/H_G\cap Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$, 我们得到 $H/H_G\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$. 从而 (3) 可类似于命题 1.1 证明的步骤 (3) 得证.

(4) G/N 是 p-超可解的, $|N|>p$ 且 N 是 G 的唯一包含于 $O_p(G)$ 的极小正规子群. 另外, $Z_{\mathcal{U}}(G)=1$.

由 (3) 和引理 2.2(3), P/N 的每个 $|D|/|N|$ 阶子群在 G/N 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 现在设 $|D|/|N|=2$ 且 P/N 是一个非交换 2-群.

如果 $|N|=2$, 那么 $N\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)\cap Z(P)$ 且 $|D|=4$. 令 L 是 P 的任一 2 阶子群. 注意到正规子群在 G 中总是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 我们假设 $L_G=1$. 记 $H=N\times L$, 那么 H 是 P 的一个 4 阶子群, 且由 (2) 和引理 2.6(1) 知 $H_G=N$. 因为 H 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 所以由 (2) 知 $H/N\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G/N)=Z_{\mathcal{U}}(G)/N$, 于是 $H\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$ 且 $L\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 由此可知 L 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 这说明, 此时 P 的所有 2 阶和 4 阶子群在 G 中都是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 因此由引理 3.5 知 G 是 2-超可解的, 矛盾. 故 $|N|>2$. 与命题 1.1 证明的步骤 (4) 类似, 我们能够得到, 在这种情况下 P/N 的所有 2 阶或者 4 阶循环子群在 G/N 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 总体来说, G/N 满足命题假设. 因此, G 的选取表明 G/N 是 p-超可解的, 且 (4) 是成立的.

(5) 最后的矛盾.

由 (1) 和 (4), $\Phi(G)=1=Z_{\mathcal{U}}(G)$. 因此 $G=N\rtimes M$, 那么 $P=N(P\cap M)$, 其中 M 是 G 的一个不包含 N 的极大子群. 易知 $P\cap M<P$, 于是存在 P 的一个包含 $P\cap M$ 的极大子群 P_1. 再由 (1) 和 (3) 知存在 P_1 的一个子群 H, 满足 $P_1\cap N\leqslant H$ 和 $|H|=|D|$. 另外, 易知 $H_G=1$. 由假设, H 在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 所以我们可由 (2) 和 (4) 得到 $H\leqslant\Phi(H)$, 即 $H=1$, 矛盾. 该矛盾完成了命题的证明.

定理 1.1 的证明　对 $|G|+|E|$ 用数学归纳法. 因引理 2.2(3) 表明 $(G/O_{p'}(E), E/O_{p'}(E))$ 满足定理假设. 所以当 $O_{p'}(E)>1$ 时, 归纳可知 $E/O_{p'}(E)\leqslant Z_{p\mathcal{U}}(G/O_{p'}(E))$, 进而 $E\leqslant Z_{p\mathcal{U}}(G)$. 我们现在设 $O_{p'}(E)=1$. 注意到, 我们可由引理 2.2(2) 和命题 1.2 得到 E 是 p-超可解的. 因此, 引理 2.1(1) 表明 $P\trianglelefteq E$, 从而 $P\trianglelefteq G$. 再由命题 1.1, 我们得到 $P\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 最终, 由定义得知 $E\leqslant Z_{p\mathcal{U}}(G)$. 定理就此得证.

4　一些应用

由定理 1.1 立得推论 4.1 成立.

推论 4.1　令 E 是群 G 的一个可解正规子群. 对于每个素因子 $p\in\pi(E)$ 和 E 的某个 Sylow p-子群 E_p, 假设存在 E_p 的一个子群 D, 使得 $1<|D|<|E_p|$, 且下列成立:

(1) 如果 $|D|=2$ 且 E_p 是一个非交换 2-群, 那么 E_p 的所有 2 阶和 4 阶循环子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的;

(2) 否则, E_p 的所有 $|D|$ 阶子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

因此 $E\leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$.

按照文献 [1, p. 389] 的定义, 群 G 的一个正规子群 N 称为在 G 中是 $\mathcal{F}$-超中心的, 如果对于 G 的每个主因子 H/K, H/K 在 G 中是 $\mathcal{F}$-中心的, 即 $H/K \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathcal{F}$. 群 G 的所有正规 $\mathcal{F}$-超中心子群的乘积称为 G 的 $\mathcal{F}$-超中心, 并记为 $Z_{\mathcal{F}}(G)$.

推论 4.2 令 $\mathcal{F}$ 是一个包含超可解群系的饱和群系, X 和 E 是群 G 的正规子群且满足 E 是可解的, $F(E) \leqslant X \leqslant E$ 和 $G/E \in \mathcal{F}$. 对于每个素因子 $p \in \pi(X)$ 和 X 的某个 Sylow p-子群 X_p, 假设存在 X_p 的一个子群 D, 使得 $1 < |D| < |X_p|$, 且下列成立:

(1) 如果 $|D| = 2$ 且 X_p 是一个非交换 2-群, 那么 X_p 的所有 2 阶和 4 阶循环子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的;

(2) 否则, X_p 的所有 $|D|$ 阶子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

因此 $G \in \mathcal{F}$.

证 假设 $X = E$, 那么由推论 4.1 知 $E \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G) \leqslant Z_{\mathcal{F}}(G)$. 因此 $G \in \mathcal{F}$. 现在设 $X = F^*(E)$, 那么再次由推论 4.1 知 $F^*(E) \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G) \leqslant Z_{\mathcal{F}}(G)$, 再由 [2, 第 1 章, 定理 2.8(ii)], 我们同样得到 $E \leqslant Z_{\mathcal{F}}(G)$, 进而 $G \in \mathcal{F}$.

推论 4.3 令 G 是一个可解群. 那么 G 是超可解的当且仅当 G 的每个次正规子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的.

证 必要性显然, 我们对 $|G|$ 用归纳法来证明充分性. 令 N 是 G 的一个极小正规子群. 显然, N 是一个初等交换 p-群, 其中 p 是一个素数. 因为引理 2.2(3) 表明 G/N 满足推论假设, 所以归纳可知 G/N 是超可解的. 另外, 由假设知 N 的任一子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 那么我们可由命题 1.1 得到 $N \leqslant Z_{\mathcal{U}}(G)$. 因此 G 是超可解的.

推论 4.4 令 P 是群 G 的一个 Sylow p-子群, 其中 p 是 $|G|$ 的一个满足 $(|G|, p-1) = 1$ 的素因子. 假设存在 P 的一个子群 D, 使得 $1 < |D| < |P|$, 且 P 的每个 $|D|$ 阶子群在 G 中是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的. 当 P 是一个非交换 2-群且 $|D| = 2$ 时, 进一步假设 P 的每个 4 阶循环子群在 G 中也是 $\mathcal{U}$-Φ-可补充的, 那么 G 是 p-幂零的.

证 由命题 1.2 立即得到 G 是 p-超可解的或者 $|P| = p$. 注意到 $(|G|, p-1) = 1$. 容易证明, 此时 G 是 p-幂零的.

除此之外, 命题 1.2 还统一并推广了很多已得的结果, 例如 [12, 定理4.2], [13, 推论1.3和1.5], [14, 定理3.1], [25, 定理3.4], [26, 定理3] 和 [27, 定理3.1].

参 考 文 献

[1] Doerk K, Hawkes T. Finite soluble groups [M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] Guo W B. Structure theory for canonical classes of finite groups [M]. Berlin, Heidelberg, Dordrecht, New York: Walter de Gruyter, 2015.

[3] Huppert B. Endliche gruppen I [M]. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1967.

[4] Guo W B, Skiba A N. On some classes of finite quasi-$\mathcal{F}$-groups [J]. *J Group Theory*, 2009, 12:407–417.

[5] Ballester-Bolinches A, Ezquerro L M, Skiba A N. Local embeddings of some families of subgroups of finite groups [J]. *Acta Math Sin* (*Engl Ser*), 2009, 25:869–882.

[6] Guo W B, Skiba A N, Tang X Z. On boundary factors and traces of subgroups of finite groups [J]. *Commun Math Stat*, 2014, 2:349–361.

[7] Huo L J, Guo W B, Makhnev A A. On nearly SS-embedded subgroups of finite groups [J]. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 2014, 35:885–894.

[8] Skiba A N. On two questions of L A Shemetkov concerning hypercyclically embedded subgroups of finite groups [J]. *J Group Theory*, 2010, 13:841–850.

[9] Skiba A N. Cyclicity conditions for G-chief factors of a normal subgroup of a group G (Russian) [J]. *Sibirsk Mat Zh*, 2011, 52:161–166.

[10] Skiba A N. A characterization of the hypercyclically embedded subgroups of finite groups [J]. *J Pure Appl Algebra*, 2011, 215:257–261.

[11] Su N, Li Y Y, Wang Y Y. A criterion of p-hypercyclically embedded subgroups of finite groups [J]. *J Algebra*, 2014, 400:82–93.

[12] Wang Y Y. c-Normality of groups and its properties [J]. *J Algebra*, 1996, 180:945–965.

[13] Alsheik Ahmad A Y, Jaraden J J, Skiba A N. On $\mathcal{U}_c$-normal subgroups of finite groups [J]. *Algebra Colloq*, 2007, 14:25–36.

[14] Li X H, Zhao T. $S\Phi$-supplemented subgroups of finite groups [J]. *Ukrainian Math J*, 2012, 64:102–109.

[15] Ballester-Bolinches A, Esteban-Romero R, Asaad M. Products of finite groups [M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2010.

[16] Ballester-Bolinches A, Ezquerro L M, Skiba A N. On second maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups [J]. *J Pure Appl Algebra*, 2011, 215:705–714.

[17] Guo W B, Skiba A N. On $\mathcal{F}\Phi^*$-hypercentral subgroups of finite groups [J]. *J Algebra*, 2012, 372:275–292.

[18] Li B J, Guo W B. On some open problems related to X-permutability of subgroups [J]. *Comm Algebra*, 2011, 39:757–771.

[19] Gagen T M. Topics in finite groups [M]. New York, Melbourne: Cambridge, 1976.

[20] Schmid P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups [J]. *J Algebra*, 1998, 207:285–293.

[21] Shemetkov L A, Skiba A N. On the $\mathcal{X}\Phi$-hypercentre of finite groups [J]. *J Algebra*, 2009, 322:2106–2117.

[22] Ballester-Bolinches A, Pedraza-Aguilera M C. On minimal subgroups of finite groups [J]. *Acta Math Hungar*, 1996, 73:335–342.

[23] Guo W B. The theory of classes of groups [M]. Beijing, New York, Dordrecht, Boston, London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.

[24] Robinson D J S. A course in the theory of groups [M]. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1982.

[25] Ballester-Bolinches A, Guo X Y. On complemented subgroups of finite groups [J]. *Arch Math*, 1992, 72:161–166.

[26] Buckley J. Finite groups whose minimal subgroups are normal [J]. *Math Z*, 1970, 116:15–17.

[27] Ramadan M. Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroups of a finite groups [J]. *Acta Math Hungar*, 1992, 59(1-2):107–110.

A Characterization of p-Hypercyclically Embedded Subgroups of Finite Groups

ZHANG Li[1] GUO Wenbin[2] CHEN Xiaoyu[3]

[1]School of Mathematics and Physics, Anhui Jianzhu University, Hefei 230022, China. E-mail: zhangli0516@ahjzu.edu.cn

[2]Corresponding author. School of Mathematics Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China. E-mail: wbguo@ustc.edu.cn

[3]School of Mathematics Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China. E-mail: jelly@njnu.edu.cn

Abstract Let E be a normal subgroup of a finite group G and $\mathcal{U}$ the class of all finite supersolvable groups. E is said to be p-hypercyclically embedded in G if every pd-G-chief factor below E is cyclic. A subgroup H of G is $\mathcal{U}$-Φ-supplemented in G if there exists a subnormal subgroup T of G such that $G = HT$ and $(H \cap T)H_G/H_G \leqslant \Phi(H/H_G)Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$, where $Z_{\mathcal{U}}(G/H_G)$ is the $\mathcal{U}$-hypercentre of G/H_G. In this paper, it is proved that E is p-hypercyclically embedded in G if some classes of p-subgroups of E are $\mathcal{U}$-Φ-supplemented in G. As applications, some new characterizations of p-supersolvability of finite groups are obtained and some recent results are extended.

Keywords Sylow p-subgroup, $\mathcal{U}$-Φ-Supplemented subgroup, p-Supersolvable group, p-Nilpotent group

2000 MR Subject Classification 20D10, 20D15, 20D20

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 39 No. 3, 2018
by ALLERTON PRESS, INC., USA