数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(3):335–348
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0025

Bakry-Émery 里奇曲率下的 Calabi-型定理*

李冠巡[1] 刘 晗[1] 张世金[2] 郑 毅[1]

提要 得到了两个关于黎曼流形上 Bakry-Émery 里奇曲率沿着测地线的积分估计. 作为应用, 得到了两个 Calabi 定理的推广结果, 即得到了流形是紧致的充分条件.

关键词 Myers-型定理, Bakry-Émery 里奇曲率, Riccati 方程
MR (2000) 主题分类 53C20
中图法分类 O186.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)03-0335-14

1 引 言

1941 年, Myers 在文 [1] 中证明了一个非常重要的定理.

定理 1.1 (Myers) 设 (M,g) 是 n-维完备黎曼流形且满足 $\mathrm{Ric}(g)\geqslant(n-1)\delta^2>0$, 则流形 M 必须是紧致的, 并且它的直径满足

$$\mathrm{diam}(M,g)\leqslant\frac{\pi}{\delta}.$$

Myers 的定理 (有时也称 Bonnet-Myers 定理) 是黎曼几何中的一个基本定理. 很多专家写了很多论文, 关于 Myers 定理的推广, 参见文 [2–6] 以及它们中的参考文献. 也有很多人将 Myers 定理推广到 Bakry-Émery 里奇曲率 (或者 m-Bakry-Émery 里奇曲率), 参见文 [7–10] 以及它们中的参考文献.

1967 年, Calabi 在文 [11] 中得到了关于里奇曲率的平方根沿着测地线的积分估计.

定理 1.2 (Calabi) 假设 (M,g) 是 n-维完备黎曼流形且它的里奇曲率非负, 即 $\mathrm{Ric}(g)\geqslant 0$. 假设 $\gamma(s)$ 是 M 上的测地线, $s\in(A,B)$ 和 $-\infty\leqslant A<B\leqslant+\infty$, 并且 $\gamma(s)$ 上不存在共轭点对, 则对任意的子区间 $[a,b]\subseteq(A,B)$, 有

$$\begin{aligned}&\int_a^b\sqrt{K(s)}\mathrm{d}s\\&\leqslant\Big(\Big(1+\frac12\log\frac{(B-a)(b-A)}{(B-b)(a-A)}\Big)^2-1\Big)^{\frac12}\\&<1+\frac12\log\frac{(B-a)(b-A)}{(B-b)(a-A)},\end{aligned}\tag{1.1}$$

本文 2017 年 5 月 23 日收到, 2018 年 11 月 12 日收到修改稿.
[1]北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191.
E-mail: 641783717@qq.com; 1242073963@qq.com; zhengyitangshan@163.com
[2]通信作者. 北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191. E-mail: shijinzhang@buaa.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11301017) 的资助.

这里 $K(s)=\frac{\mathrm{Ric}(\dot\gamma(\mathrm{s}),\dot\gamma(\mathrm{s}))}{n-1}$. 如果以上不等式中的 A 或者 B 等于无穷小或无穷大, 只要让不等式右边式子中的 A 或者 B 趋向于无穷小或者无穷大.

作为此定理的应用, Calabi 证明了以下 Myers-型定理.

定理 1.3 (Calabi) 假设 (M,g) 是 n-维完备黎曼流形且它的里奇曲率非负. 如果存在点 $P_0\in M$, 使得从 P_0 出发的每一条测地线 $\gamma(s)$ 满足

$$\lim_{a\to\infty}\sup\Big\{\int_0^a\sqrt{K(s)}\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\log a\Big\}=\infty, \tag{1.2}$$

这里 $K(s)=\frac{\mathrm{Ric}(\dot\gamma(\mathrm{s}),\dot\gamma(\mathrm{s}))}{n-1}$, 则 M 是紧致流形.

设 (M,g) 是 n-维完备黎曼流形, f 是 M 上的光滑函数. Bakry-Émery 里奇曲率的定义如下 (见 [12]):

$$\mathrm{Ric}_f:=\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,f.$$

如果 f 是常数, Ric_f 就是里奇曲率. 因此 Bakry-Émery 里奇曲率是里奇曲率的推广. 对于任意的 $m\geqslant n$, m-Bakry-Émery 里奇曲率 $\mathrm{Ric}_{f,m}$ 定义为

$$\mathrm{Ric}_{f,m}=\mathrm{Ric}+\nabla\nabla f-\frac{\nabla f\otimes\nabla f}{m-n}, \tag{1.3}$$

上式中如果 $m=n$, 通常理解成 f 是常数的情形.

在本文中, 我们得到 Bakry-Émery 里奇曲率和 m-Bakry-Émery 里奇曲率下的 Calabi-型定理.

记

$$K_f(s)=\frac{\mathrm{Ric}_f(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))}{n-1}, \tag{1.4}$$

我们得到在 $\mathrm{Ric}_f\geqslant 0$ 的条件下的 $\sqrt{K_f(s)}$ 的积分估计.

定理 1.4 假设存在非负常数 K, 使得

$$|\mathrm{Hess}\,f|\leqslant K,\quad |\nabla f|\leqslant K.$$

设 $\gamma(s)(s\in(A,B))$ 是 M 上的测地线, 其中 $-\infty\leqslant A<B\leqslant+\infty$, 并假设 $\gamma(s)$ 在区间 (A,B) 上不存在共轭点对, 则对于任意的 $[a,b]\subset(A,B)$, 都有

$$\Big(\int_a^b\sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2\leqslant\Big(1+\frac{1}{2}\log\frac{(B-a)(b-A)}{(B-b)(a-A)}\Big)^2-1+F(A,B,a,b),$$

其中 $F(A,B,a,b)$ 的定义分以下 4 种情况:

情形 1 $A=-\infty,B=+\infty$.

$$F(A,B,a,b)=2\Big(\sqrt{\frac{K}{n-1}}+\frac{K}{n-1}\Big)(b-a).$$

情形 2 $A>-\infty,B=+\infty$.

$$F(A,B,a,b)=2\Big(\sqrt{\frac{K}{n-1}}+\frac{K}{n-1}\Big)(b-A)\log\frac{b-A}{a-A}.$$

情形 3 $A=-\infty,B<+\infty$.

$$F(A,B,a,b)=2\Big(\sqrt{\frac{K}{n-1}}+\frac{K}{n-1}\Big)(B-a)\log\frac{B-a}{B-b}.$$

情形 4 $A > -\infty, B < +\infty$.

$$F(A,B,a,b) = \Big(\sqrt{\frac{K}{n-1}} + \frac{K}{n-1}\Big)(B-a+b-A)\log\frac{(B-a)(b-A)}{(B-b)(a-A)}.$$

当 $K=0$ 时, 定理 1.4 就是定理 1.2. 受定理 1.3 的启发, 在假设 $\mathrm{Ric}_f \geqslant 0$ 的条件下, 我们得到一个流形是紧致的充分条件.

定理 1.5 设 (M,g) 是 n-维完备黎曼流形, f 是 M 上的光滑函数, 并设 $\mathrm{Ric}_f(g) \geqslant 0$. 如果还假设存在非负常数 K, 使得

$$|\mathrm{Hess}\, f| \leqslant K, \quad |\nabla f| \leqslant K.$$

如果存在 $P_0 \in M$, 使得任意从 P_0 出发的测地线 $\gamma(s)$ 都满足

$$\lim_{a\to\infty}\sup\Big\{\int_0^a \sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\log a - \Big(2\Big(\sqrt{\frac{K}{n-1}} + \frac{K}{n-1}\Big)a\log a\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\} = \infty, \tag{1.5}$$

则 M 一定是紧致的.

如果只假设 $|\nabla f|$ 的有界性, 我们也可以得到 $\sqrt{K_f(s)}$ 的积分估计.

定理 1.6 设 (M,g) 是 n-维完备黎曼流形, f 是 M 上的光滑函数. 假设存在非负常数 K, 使得 $|\nabla f| \leqslant K$, 并满足 $\mathrm{Ric}_f(g) \geqslant 0$, 设 $\gamma(s)(s \in (A,B))$ 是 M 上的测地线, 其中 $-\infty \leqslant A < B \leqslant +\infty$. 如果还假设 $\gamma(s)$ 在 (A,B) 不存在共轭点对, 则对于任意的区间 $[a,b] \subset (A,B)$ 和任意的正数 $\varepsilon \in (0,1)$, 都有

$$\Big(\int_a^b \sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2 \leqslant \Big(P(\varepsilon) + \frac{1}{2}\log\frac{(B-a)(b-A)}{(B-b)(a-A)}\Big)^2 - P^2(\varepsilon) + F(A,B,a,b,\varepsilon),$$

其中 $P(\varepsilon)$ 和 $F(A,B,a,b,\varepsilon)$ 的定义分以下 4 种情况:

情形 1 $A = -\infty, B = +\infty$.

$$P(\varepsilon) = 1,$$
$$F(A,B,a,b,\varepsilon) = \Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 2\Big)\frac{2K(b-a)}{n-1}.$$

情形 2 $A > -\infty, B = +\infty$.

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon},$$
$$F(A,B,a,b,\varepsilon) = \Big(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} + 2\Big)\frac{2K(b-A)}{n-1}\log\frac{b-A}{a-A}.$$

情形 3 $A = -\infty, B < +\infty$.

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon},$$
$$F(A,B,a,b,\varepsilon) = \Big(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} + 2\Big)\frac{2K(B-a)}{n-1}\log\frac{B-a}{B-b}.$$

情形 4 $A > -\infty, B < +\infty$.

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}},$$
$$F(A,B,a,b,\varepsilon) = \Big(\Big(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{3}{2}\Big)(B-A) + (b-a)\Big)\frac{K}{n-1}\log\frac{(B-a)(b-A)}{(B-b)(a-A)}.$$

注 1.1 如果取 $K=0$, 令 ε 趋向 0, 则定理 1.6 就是 Calabi 的定理 (定理 1.2).

如果取 $K\neq 0$, 则定理 1.6 的条件比定理 1.4 中的条件要弱, 但定理 1.6 的结论也比定理 1.4 的结论要弱, 原因在于除了情形 1 之外, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, $F(A,B,a,b,\varepsilon)\to+\infty$ 且 $P(\varepsilon)>1$.

一个自然的问题: 在同定理 1.6 一样的假设条件下, 我们能否得到同定理 1.4 一样的结论? 如果答案是肯定的话, 也许 $F(A,B,a,b)$ 的表达式也会不同于在定理 1.4 的定义.

定理 1.7 设 (M,g) 是 n-维完备黎曼流形, f 是 M 上的光滑函数. 假设存在非负常数 K, 使得 $|\nabla f|\leqslant K$ 并且 $\mathrm{Ric}_f(g)\geqslant 0$, 以及存在 $P_0\in M$, 使得任意从 P_0 出发的测地线 $\gamma(s)$ 都满足

$$\limsup_{a\to\infty}\Big\{\int_0^a\sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\log a-\Big(\frac{8Ka}{n-1}\log a\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}=\infty, \tag{1.6}$$

则 M 一定是紧致的.

注 1.2 作为定理 1.6 的应用, 取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 我们得到定理 1.7. 当 $K\geqslant\frac{n-1}{9}$ 时,

$$\frac{8K}{n-1}\geqslant 2\Big(\sqrt{\frac{K}{n-1}}+\frac{K}{n-1}\Big).$$

因此定理 1.7 中的条件 (1.6) 要强于定理 1.5 中的条件 (1.5).

对于测地线 $\gamma(s)$, 记

$$K_{f,m}(s)=\frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(s),\gamma'(s))}{m-1}.$$

利用 Calabi 定理的证明方法, 我们得到下面的定理.

定理 1.8 设 (M,g) 是 n-维完备黎曼流形, f 是 M 上的光滑函数, 并满足 $\mathrm{Ric}_{f,m}\geqslant 0(m\geqslant n)$. 设 $\gamma(s)$ 是 M 上的测地线, 其中 $s\in(A,B)$, $-\infty\leqslant A<B\leqslant+\infty$, 以及假设 $\gamma(s)$ 在 (A,B) 上没有共轭点对, 则对于任意区间 $[a,b]\subseteq(A,B)$, 都有

$$\begin{aligned}&\int_a^b\sqrt{K_{f,m}(s)}\mathrm{d}s\\ &\leqslant\Big(\Big(1+\frac{1}{2}\log\frac{(B-a)(b-A)}{(B-b)(a-A)}\Big)^2-1\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &<1+\frac{1}{2}\log\frac{(B-a)(b-A)}{(B-b)(a-A)}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

当 $A=-\infty$ 或者 $B=+\infty$ 时, 我们可以在最后一个表达式中令 A 趋向于 $-\infty$ 或者 B 趋向于 $+\infty$.

作为以上定理的应用, 我们得到另一种判断流形是紧致的充分条件.

定理 1.9 设 (M,g) 是 n-维完备黎曼流形, f 是 M 上的光滑函数, 并满足 $\mathrm{Ric}_{f,m}\geqslant 0(m\geqslant n)$. 如果存在 $P_0\in M$, 使得任意从 P_0 出发的测地线 $\gamma(s)$ 都满足

$$\lim_{a\to\infty}\sup\Big\{\int_0^a\sqrt{K_{f,m}(s)}\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\log a\Big\}=\infty, \tag{1.8}$$

则 M 一定是紧致的.

2 Riccati 不等式和 Riccati 方程

本节我们主要回顾 Riccati 不等式和 Riccati 方程.

固定点 $P \in M$ 以及从点 P 出发的测地射线 $\gamma(s)$(s 是弧长参数). 我们令 $m(s)$ 表示以点 P 为圆心、半径为 s 的测地球在 $\gamma(s)$ 处的平均曲率 (这里通过单位内法向量来定义平均曲率). 沿着任何测地射线, $m(s)$ 对于 $s>0$ 都是光滑的. 我们熟知, $m(t)$ 满足 Riccati 不等式

$$\mathrm{Ric}(\gamma'(s),\gamma'(s)) \leqslant -m'(s) - \frac{m(s)^2}{n-1}, \tag{2.1}$$

此不等式的证明可参见文 [9, 11, 13]. 如果令 $H(s) = -\frac{m(s)}{n-1}$, $K(s) = \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(s),\gamma'(s))}{n-1}$, 则

$$K(s) \leqslant H'(s) - H^2(s). \tag{2.2}$$

现在我们回顾文 [11] 中的一个引理.

引理 2.1 设 $\gamma:(A,B)\to M$ 表示 M 上无共轭点对的测地线, s 是弧长参数, 其中 $(-\infty \leqslant A < s < B \leqslant +\infty)$, 记 $K(s) = \frac{\mathrm{Ric}(\gamma'(s),\gamma'(s))}{n-1}$, 则存在一个定义在区间 (A,B) 上的可微函数 $h(s)$, 满足 Riccati 方程

$$\frac{\mathrm{d}h(s)}{\mathrm{d}s} = h^2(s) + K(s). \tag{2.3}$$

如果记 $K_f(s) = \frac{\mathrm{Ric}_f(\gamma'(s),\gamma'(s))}{n-1}$, 由 (2.2) 可推出

$$K_f(s) \leqslant H'(s) - H^2(s) + \frac{\nabla\nabla f(\gamma'(s),\gamma'(s))}{n-1}. \tag{2.4}$$

因为 $\nabla\nabla f(\gamma'(s),\gamma'(s)) = f''(\gamma(s))$, 所以

$$K_f(s) \leqslant H'(s) - H^2(s) + \frac{f''(\gamma(s))}{n-1}. \tag{2.5}$$

设 $h(s)$ 就是引理 2.1 中所定义的, 然后令 $g(s) = \frac{f(\gamma(s))}{n-1}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}h(s)}{\mathrm{d}s} = h^2(s) - g''(s) + K_f(s). \tag{2.6}$$

3 定理 1.4 和定理 1.5 的证明

3.1 定理 1.4 的证明

定理 1.4 的证明 由定理 1.4 中的条件, 推出 $\mathrm{Ric_f} \geqslant 0$, $K_f(s) \geqslant 0$, $|g''(s)| \leqslant \frac{K}{n-1}$, 以及 $|g'(s)| \leqslant \frac{K}{n-1}$. 利用文 [11] 中的证明方法, 我们分以下 4 种情况证明定理.

3.1.1 情形 1 $A=-\infty$ 且 $B=+\infty$

因为对所有的 $s\in(-\infty,+\infty)$, $g''(s) \leqslant \frac{K}{n-1}$, 所以 $\frac{\mathrm{d}h(s)}{\mathrm{d}s} \geqslant h^2(s) - \frac{K}{n-1}$.

引理 3.1 设 $h(s)$ 和 K 如上所述, 则

$$h^2(s) \leqslant \frac{K}{n-1}.$$

证 令 $l(s)=h(s)-\sqrt{\frac{K}{n-1}}$, 则

$$l'(s)=h'(s)\geqslant l\Big(l+2\sqrt{\frac{K}{n-1}}\Big).$$

假设存在点 $s_0\in\mathbb{R}$, 使得 $l(s_0)>0$, 则推出 $l'(s_0)>0$. 从而只要 $s>s_0$, 就有 $l(s)>0$, 因此就有 $l'(s)\geqslant l^2(s)$. 对不等式 $l'(s)\geqslant l^2(s)$ 两边作积分, 得到

$$\frac{1}{l(s_0)}-\frac{1}{l(s)}\geqslant(s-s_0).$$

从而

$$l(s)\geqslant\frac{1}{l^{-1}(s_0)-(s-s_0)}.$$

如果取 s 趋向于 $s_0+l^{-1}(s_0)$, 则 $\lim\limits_{s\to s_0+l^{-1}(s_0)}l(s)=+\infty$, 与 $l(s_0+l^{-1}(s_0))<\infty$ 矛盾.

因此得到对于任意的 s, 都有 $l(s)\leqslant 0$. 如果令 $\widetilde{l}(s)=h(s)+\sqrt{\frac{K}{n-1}}$, 用同样的方法可证明 $\widetilde{l}(s)\geqslant 0$. 从而完成了引理的证明.

应用施瓦茨不等式、(2.6) 和以上引理, 我们得到

$$\begin{aligned}&\Big(\int_a^b\sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2\\ &\leqslant(b-a)\int_a^b K_f(s)\mathrm{d}s\\ &=(b-a)\int_a^b[h'(s)-h^2(s)+g''(s)]\mathrm{d}s\\ &\leqslant(b-a)(h(b)-h(a)+g'(b)-g'(a))\\ &=2(b-a)\Big(\sqrt{\frac{K}{n-1}}+\frac{K}{n-1}\Big).\end{aligned}$$

从而完成了情形 1 的证明.

3.1.2 情形 2 $A>-\infty$ 且 $B=+\infty$

令 $s=A+\mathrm{e}^t$, $\omega(t)$ 的定义由下面的等式给出

$$h(s)=\mathrm{e}^{-t}\Big(\omega(t)-\frac{1}{2}\Big),$$

则 t 的取值范围就是整个实数轴, 且

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}=\mathrm{e}^{-2t}\Big(\omega'(t)-\omega(t)+\frac{1}{2}\Big),$$

和

$$h^2(s)-g''(s)=\mathrm{e}^{-2t}\Big(\omega^2(t)-\omega(t)+\frac{1}{4}\Big)-g''(s).$$

由 (2.6) , 可得到

$$\omega'(t)\geqslant\omega^2(t)-\frac{1}{4}-\frac{K}{n-1}\mathrm{e}^{2t}.$$

令 $l(t)=\omega(t)-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{K}{n-1}}\mathrm{e}^t$, 则

$$l'(t)\geqslant l^2+2\Big(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{K}{n-1}}\mathrm{e}^t\Big)l.$$

利用引理 3.1 的证明方法, 可得到 $l(t)\leqslant 0$. 另一方面, 令 $\widetilde{l}(t)=\omega(t)+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{K}{n-1}}\mathrm{e}^t$, 则 $\widetilde{l}(t)\geqslant 0$. 因此

$$-\Big(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{K}{n-1}}\mathrm{e}^t\Big)\leqslant\omega(t)\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{K}{n-1}}\mathrm{e}^t. \tag{3.1}$$

利用 (2.6) 和柯西-施瓦茨不等式, 得到

$$\begin{aligned}&\Big(\int_a^b\sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2\\&=\Big(\int_{a'}^{b'}\sqrt{\omega'(t)-\omega^2(t)+\frac{1}{4}+g''(s)\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t\Big)^2\\&\leqslant(b'-a')\Big(\omega(b')-\omega(a')+\frac{1}{4}(b'-a')+\int_{a'}^{b'}g''(s)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\Big).\end{aligned} \tag{3.2}$$

从而得到

$$\begin{aligned}\int_{a'}^{b'}g''(s)\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t&=\int_a^b g''(s)(s-A)\mathrm{d}s\\&=g'(s)(s-A)|_a^b-\int_a^b g'(s)\mathrm{d}s\\&\leqslant 2\frac{K}{n-1}(b-A).\end{aligned} \tag{3.3}$$

因此

$$\begin{aligned}&\Big(\int_a^b\sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2\\&\leqslant(b'-a')\Big(1+\sqrt{\frac{K}{n-1}}(\mathrm{e}^{b'}+\mathrm{e}^{a'})+\frac{1}{4}(b'-a')+2\frac{K}{n-1}(b-A)\Big)\\&\leqslant\Big(1+\frac{1}{2}(b'-a')\Big)^2-1+2\sqrt{\frac{K}{n-1}}(b-A)(b'-a')+2\frac{K}{n-1}(b-A)(b'-a').\end{aligned}$$

因为 $b'-a'=\log\frac{b-A}{a-A}$, 所以

$$\Big(\int_a^b\sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2\leqslant\Big(1+\frac{1}{2}\log\frac{b-A}{a-A}\Big)^2-1+F, \tag{3.4}$$

其中 $F=2\big(\sqrt{\frac{K}{n-1}}+\frac{K}{n-1}\big)(b-A)\log\frac{b-A}{a-A}$.

3.1.3 情形 3 $A=-\infty$ 且 $B<+\infty$

令 $\overline{s}=-s$, $\overline{A}=-B$, $\overline{B}=+\infty$, $\overline{h}(\overline{s})=-h(-s)$ 和 $\overline{g}(\overline{s})=g(-s)$, 则此情形就转化成情形 2. 因此

$$\Big(\int_a^b\sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2\leqslant\Big(1+\frac{1}{2}\log\frac{b-A}{a-A}\Big)^2-1+F, \tag{3.5}$$

其中 $F=2\big(\sqrt{\frac{K}{n-1}}+\frac{K}{n-1}\big)(B-a)\log\frac{B-a}{B-b}$.

3.1.4 情形 4 $A>-\infty$ 且 $B<+\infty$

令 $L=B-A$, $s=\frac{A+B}{2}+\frac{L}{2}\tanh t$(则 t 的取值范围是整个实数轴), 以及 $\omega(t)$ 的定义由下面的等式给出

$$h(t)=\frac{2}{L}(\omega(t)+\tanh t)\cosh^2 t,$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}=\frac{4}{L^2}\cosh^4 t(\omega'(t)+2\omega(t)\tanh t+1+\tanh^2 t) \tag{3.6}$$

和

$$h^2(s)=\frac{4}{L^2}\cosh^4 t(\omega^2(t)+2\omega(t)\tanh t+\tanh^2 t). \tag{3.7}$$

由 (2.6), 得到

$$\omega'(t)\geqslant\omega^2(t)-1-\frac{L^2}{4\cosh^4 t}g''(s)\geqslant\omega^2(t)-1-\frac{KL^2}{4(n-1)}.$$

再利用引理 3.1 的证明方法, 得到

$$-\Big(1+\frac{L}{2}\sqrt{\frac{K}{n-1}}\Big)\leqslant\omega(t)\leqslant 1+\frac{L}{2}\sqrt{\frac{K}{n-1}}. \tag{3.8}$$

结合 (2.6), (3.6) 和 (3.7), 并利用柯西-施瓦茨不等式, 得到

$$\begin{aligned}&\Big(\int_a^b\sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2\\&=\Big(\int_{a'}^{b'}\sqrt{\omega'(t)-\omega^2(t)+1+\frac{L^2}{4\cosh^4 t}g''(s)\mathrm{d}t}\Big)^2\\&\leqslant(b'-a')\Big(\omega(b')-\omega(a')+b'-a'+\int_{a'}^{b'}\frac{L^2}{4\cosh^4 t}g''(s)\mathrm{d}t\Big).\end{aligned} \tag{3.9}$$

因为 $A<s<B$ 和 $L=B-A$, 所以

$$-1<\frac{2}{L}\Big(s-\frac{A+B}{2}\Big)<1.$$

由于 $\mathrm{d}t=\frac{2}{L}\cosh^2 t\mathrm{d}s$, $\frac{1}{\cosh^2 t}=1-\frac{4}{L^2}\big(s-\frac{A+B}{2}\big)^2$, 所以

$$\begin{aligned}&\int_{a'}^{b'}\frac{L^2}{4\cosh^4 t}g''(s)\mathrm{d}t\\&=\frac{L}{2}\int_a^b\Big(1-\frac{4}{L^2}\Big(s-\frac{A+B}{2}\Big)^2\Big)g''(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{L}{2}\Big[(g'(b)-g'(a))-\frac{4}{L^2}\int_a^b\Big(s-\frac{A+B}{2}\Big)^2g''(s)\mathrm{d}s\Big]\\&=\frac{L}{2}\Big[(g'(b)-g'(a))-\frac{4}{L^2}\Big(\Big(g'(b)(b-\frac{A+B}{2}\Big)^2-g'(a)\Big(a-\frac{A+B}{2}\Big)^2\Big)\\&\quad-2\int_a^b g'(s)\Big(s-\frac{A+B}{2}\Big)\mathrm{d}s\Big]\\&\leqslant\frac{2KL}{n-1}+\frac{2K}{n-1}(b-a).\end{aligned} \tag{3.10}$$

结合 (3.9) 和 (3.10), 得到

$$\begin{aligned}&\Big(\int_a^b \sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2\\ &\leqslant (b'-a')\Big(2+L\sqrt{\frac{K}{n-1}}+b'-a'+\frac{2KL}{n-1}+\frac{2K}{n-1}(b-a)\Big)\\ &=(1+b'-a')^2-1+(b'-a')L\Big(\sqrt{\frac{K}{n-1}}+\frac{2K}{n-1}\Big)+\frac{2K}{n-1}(b-a)(b'-a').\end{aligned}$$

因为

$$b'-a'=\frac{1}{2}\log\frac{(b-A)(B-a)}{(B-b)(a-A)},$$

所以

$$\Big(\int_a^b \sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2 \leqslant \Big(1+\frac{1}{2}\log\frac{(b-A)(B-a)}{(B-b)(a-A)}\Big)^2-1+F, \tag{3.11}$$

其中 $F=\big(\sqrt{\frac{K}{n-1}}+\frac{K}{n-1}\big)(B-a+b-A)\log\frac{(B-a)(b-A)}{(B-b)(a-A)}$.

从而完成了定理 1.4 的证明.

3.2 定理 1.5 的证明

定理 1.5 的证明 设 M 是非紧的, 由定理 1.5 中的条件, 则对于 M 上的任意点 P_0, 存在从 P_0 出发的测地射线, 从而不存在共轭点对. 即此测地线为 $\gamma(s)(0\leqslant s<\infty)$, 则由定理 1.4 中的情形 2 的证明可知, 对任意 $a\in(1,\infty)$, 有

$$\int_1^a \sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s \leqslant 1+\frac{1}{2}\log a+\Big(\Big(2\sqrt{\frac{K}{n-1}}+2\frac{K}{n-1}\Big)a\log a\Big)^{\frac{1}{2}},$$

这与 (1.5) 矛盾. 因此 M 是紧流形.

从而完成了定理 1.5 的证明.

4 定理 1.6 和定理 1.7 的证明

去掉定理 1.4 和定理 1.5 中 $\mathrm{Hess}\, f$ 有界的条件后, 也得到类似的结论.

4.1 定理 1.6 的证明

定理 1.6 的证明 记 $g(s)=\frac{f(\gamma(s))}{n-1}$. 有定理的假设条件, $|g'(s)|\leqslant\frac{K}{n-1}$. 我们利用定理 1.4 的证明方法, 分 4 种情况证明此定理.

4.1.1 情形 1 $A=-\infty$ 和 $B=+\infty$

对任意的 $s\in(-\infty,+\infty)$, 有 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\geqslant h^2(s)-g''(s)$.

引理 4.1 设 h 和 K 如上所述. 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 则有

$$-\Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+1\Big)\frac{K}{n-1}\leqslant h(s)\leqslant\Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+1\Big)\frac{K}{n-1}.$$

证 令 $l(s)=(1-\varepsilon)(h(s)+g'(s))$, 利用柯西-施瓦茨不等式, 得到

$$-2l(s)g'(s)\geqslant -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}l^2(s)-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}g'^2(s),$$

则

$$\begin{aligned}l'(s)&=(1-\varepsilon)(h'(s)+g''(s))\geqslant(1-\varepsilon)h^2\\&=(1-\varepsilon)\Big(\frac{1}{1-\varepsilon}l(s)-g'(s)\Big)^2\\&=\frac{1}{1-\varepsilon}l^2(s)-2l(s)g'(s)+(1-\varepsilon)g'^2(s)\\&\geqslant l^2(s)-\frac{(1-\varepsilon)^2}{(n-1)^2\varepsilon}K^2.\end{aligned}$$

利用引理 3.1 的证明方法, 得到

$$-\frac{1-\varepsilon}{(n-1)\sqrt{\varepsilon}}K\leqslant l(s)\leqslant\frac{1-\varepsilon}{(n-1)\sqrt{\varepsilon}}K,$$

那么

$$-\Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+1\Big)\frac{K}{n-1}\leqslant h(s)\leqslant\Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+1\Big)\frac{K}{n-1}.$$

利用柯西-施瓦茨不等式、(2.6) 和引理 4.1, 则得到

$$\begin{aligned}\Big(\int_a^b\sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2&\leqslant(b-a)\int_a^b(h'(s)-h^2(s)+g''(s))\mathrm{d}s\\&\leqslant(b-a)(h(b)-h(a)+g'(b)-g'(a))\\&\leqslant2\Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+2\Big)\frac{K}{n-1}(b-a).\end{aligned}$$

4.1.2 情形 2 $A>-\infty$ 和 $B=+\infty$

令 $s=A+\mathrm{e}^t$, $\omega(t)$ 的定义由以下等式给出:

$$h(s)=\mathrm{e}^{-t}\Big(\omega(t)-\frac{1}{2}\Big).$$

类似定理 1.4 中的情形 2 的证明, 得到

$$\omega'(t)\geqslant\omega^2(t)-\frac{1}{4}-g''(s)\mathrm{e}^{2t}.$$

结合引理 4.1 的证明方法和定理 1.4 中的情形 2 的证明, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$-\frac{1}{2(1-\varepsilon)}-\Big(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}+1\Big)\frac{K}{n-1}\mathrm{e}^t\leqslant\omega(t)\leqslant\frac{1}{2(1-\varepsilon)}+\Big(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}+1\Big)\frac{K}{n-1}\mathrm{e}^t.\tag{4.1}$$

然后利用柯西-施瓦茨不等式和 (2.6), 得到

$$\begin{aligned}\Big(\int_a^b\sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2&\leqslant\Big(\int_{a'}^{b'}\sqrt{\omega'(t)-\omega^2(t)+\frac{1}{4}+g''(s)\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t\Big)^2\\&\leqslant(b'-a')\int_{a'}^{b'}\Big(\omega'(t)+\frac{1}{4}+g''(s)\mathrm{e}^{2t}\Big)\mathrm{d}t\\&\leqslant(b'-a')\Big(\omega(b')-\omega(a')+\frac{1}{4}(b'-a')+\int_{a'}^{b'}g''(s)\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t\Big),\end{aligned}\tag{4.2}$$

并且

$$\begin{aligned}\int_{a'}^{b'} g''(s)\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t = \int_a^b g''(s)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}s &= \int_a^b g''(s)(s-A)\mathrm{d}s \\ &= g'(s)(s-A)|_a^b - \int_a^b g'(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant 2(b-A)\frac{K}{n-1}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

将 (4.1) 和 (4.3) 代入 (4.2), 得到

$$\begin{aligned}&\Big(\int_a^b \sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2 \\ &\leqslant (b'-a')\Big(\frac{1}{1-\varepsilon} + \Big(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}+1\Big)\frac{K}{n-1}(\mathrm{e}^{b'}+\mathrm{e}^{a'}) + \frac{1}{4}(b'-a') + 2(b-A)\frac{K}{n-1}\Big) \\ &\leqslant \Big(\frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{1}{2}(b'-a')\Big)^2 - \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} + F,\end{aligned}$$

其中 $F = \big(2\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}+4\big)\frac{K}{n-1}(b-A)(b'-a')$.

由于

$$b'-a' = \log\frac{b-A}{a-A},$$

所以

$$\Big(\int_a^b \sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2 \leqslant \Big(\frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{1}{2}\log\frac{b-A}{a-A}\Big)^2 - \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} + F, \tag{4.4}$$

其中 $F = \big(2\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}+4\big)\frac{K(b-A)}{n-1}\log\frac{b-A}{a-A}$.

4.1.3　情形 3 $A=-\infty$ 和 $B<+\infty$

令 $\overline{s}=-s$, $\overline{A}=-B$, $\overline{B}=+\infty$, $\overline{h}(\overline{s})=-h(-s)$ 和 $\overline{g}(\overline{s})=g(-s)$, 此情形就转化成情形 2, 则

$$\Big(\int_a^b \sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2 \leqslant \Big(\frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{1}{2}\log\frac{B-a}{B-b}\Big)^2 - \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} + F, \tag{4.5}$$

其中 $F = \big(2\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}+4\big)\frac{K(B-a)}{n-1}\log\frac{B-a}{B-b}$.

4.1.4　情形 4 $A>-\infty$ 和 $B<+\infty$

令 $L=B-A$, $S=\frac{A+B}{2}+\frac{L}{2}\tanh t$, $\omega(t)$ 的定义由下式给出:

$$h(t) = \frac{2}{L}(\omega(t)+\tanh t)\cosh^2 t.$$

同定理 1.4 中的情形 4 的证明方法, 得到

$$\omega'(t) \geqslant \omega^2(t) - 1 - \frac{L^2}{4}g''(s).$$

利用引理 4.1 相同的证明方法, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 得到

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} - \frac{L}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+1\Big)\frac{K}{n-1} \leqslant \omega(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{L}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+1\Big)\frac{K}{n-1}. \tag{4.6}$$

然后利用柯西-施瓦茨不等式, 得到

$$\begin{aligned}&\Big(\int_a^b \sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2\\ =&\Big(\int_{a'}^{b'}\sqrt{\omega'(t)-\omega^2(t)+1+\frac{L^2}{4\cosh^4 t}g''(s)\mathrm{d}t}\Big)^2\\ \leqslant&(b'-a')\int_{a'}^{b'}\Big(\omega'(t)-\omega^2(t)+1+\frac{L^2}{4\cosh^4 t}g''(s)\Big)\mathrm{d}t\\ \leqslant&(b'-a')\Big(\omega(b')-\omega(a')+b'-a'+\int_{a'}^{b'}\frac{L^2}{4\cosh^4 t}g''(s)\mathrm{d}t\Big).\end{aligned}\tag{4.7}$$

由 (3.10), 得到

$$\int_{a'}^{b'}\frac{L^2}{4\cosh^4 t}g''(s)\mathrm{d}t\leqslant\frac{2KL}{n-1}+\frac{2K}{n-1}(b-a).\tag{4.8}$$

将 (4.6) 和 (4.8) 代入 (4.7), 得到

$$\begin{aligned}&\Big(\int_a^b \sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2\\ \leqslant&(b'-a')\Big(2\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}+L\frac{K}{n-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+1\Big)+b'-a'+2\frac{K}{n-1}L+2\frac{K}{n-1}(b-a)\Big)\\ =&\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}+b'-a'\Big)^2-\frac{1}{1-\varepsilon}+\Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+3\Big)\frac{KL(b'-a')}{n-1}+\frac{2K(b-a)(b'-a')}{n-1}.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}b'-a'&=\operatorname{arctanh}\frac{2b-A-B}{L}-\operatorname{arctanh}\frac{2a-A-B}{L}\\ &=\frac{1}{2}\log\frac{(b-A)(B-a)}{(B-b)(a-A)},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\Big(\int_a^b \sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\Big)^2\\ \leqslant&\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}+\frac{1}{2}\log\frac{(b-A)(B-a)}{(B-b)(a-A)}\Big)^2-\frac{1}{1-\varepsilon}+F,\end{aligned}\tag{4.9}$$

其中 $F=\dfrac{K}{2(n-1)}\big((\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+3)(B-A)+2(b-a)\big)\log\dfrac{(b-A)(B-a)}{(B-b)(a-A)}$.

因此完成了定理 1.6 的证明.

4.2 定理 1.7 的证明

利用定理 1.5 相同的证明方法, 可证明定理 1.7.

定理 1.7 的证明 假设此定理不对, 则对 M 上的任意点 P_0, 存在从 P_0 出发的测地射线, 不存在共轭点对. 记此测地线为 $\gamma(s)(0\leqslant s<\infty)$, 则在定理 1.6 中的情形 2 的证明中, 取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 则

$$\int_1^a\sqrt{K_f(s)}\mathrm{d}s\leqslant 2+\frac{1}{2}\log a+\Big(\frac{8Ka}{n-1}\log a\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

与 (1.6) 矛盾. 因此 M 是紧流形.

从而完成了定理 1.7 的证明.

5 m-Bakry-Émery 里奇曲率

回顾 m-Bakry-Émery 里奇曲率的 Riccati 不等式, 参见文 [9] 中的附录 A, 对于给定的测地线 $\gamma(s)$

$$\mathrm{Ric}_{f,m}(\gamma'(s),\gamma'(s)) \leqslant -m_f'(s) - \frac{m_f^2(s)}{m-1}, \tag{5.1}$$

其中 $m_f(s) = m(s) - \langle \nabla f, \gamma'(s) \rangle$. 如果我们令 $K_{f,m} = \frac{\mathrm{Ric}_{f,m}(\gamma'(s),\gamma'(s))}{m-1}$, 以及 $H_{f,m}(s) = -\frac{m_f(s)}{m-1}$, 则

$$K_{f,m}(s) \leqslant H_{f,m}'(s) - H_{f,m}^2(s). \tag{5.2}$$

利用文 [11] 中定理的证明方法, 可得到定理 1.8 和定理 1.9.

致谢 感谢审稿人提出宝贵的建议.

参　考　文　献

[1] Myers S B. Riemannian manifols with positive mean curvature [J]. *Duke Math J*, 1941, 8:401–404.

[2] Galloway G J. A generalization of Myers theorem and an application to relativistic cosmology [J]. *J Diff Geom*, 1979, 14:105–116.

[3] Li X M. On extensions of Myers' theorem [J]. *Bull London Math Soc*, 1995, 27:392–396.

[4] Mastrolia P, Rimoldi M, Veronelli G. Myers-type theorems and some related oscillation results [J]. *J Geom Anal*, 2012, 22(3):763–779.

[5] Morgan F. Myers' theorem with density [J]. *Kodai Math J*, 2006, 29(3):454–460.

[6] Yun J G. A note on the generalized Myers theorem [J]. *Bull Korean Math Soc*, 2009, 46(1):61–66.

[7] Limoncu M. The Bakry-Émery Ricci tensor and its applications to some compactness theorems [J]. *Math Z*, 2012, 271:715–722.

[8] Wang L F. A Myers theorem via m-Bakry-Émery curvature [J]. *Kodai Math J*, 2014, 37:187–195.

[9] Wei G, Wylie W. Comparison geometry for the Bakry-Émery Ricci tensor [J]. *J Diff Geom*, 2009, 83(2):377–405.

[10] Zhang S. A theorem of Ambrose for Bakry-Émery Ricci tensor [J]. *Ann Glob Anal Geom*, 2014, 45:233–238.

[11] Calabi E. On Ricci curvature and geodesics [J]. *Duke Math J*, 1967, 34:667–676.

[12] Bakry D, Émery M. Diffusions hypercontractives [M]//Séminaire de Probadilités, XIX, 1983/84, Lecture Notes in Math, Vol 1123, Berlin: Springer-Verlag, 1985:177–206.

[13] Cheeger J. Critical points of distance functions and applications to geometry [M]//Lecture Notes in Math. Vol 1504, Berlin: Springer-Verlag, 1991:1–38.

On a Theorem of Calabi for Bakry-Émery Ricci Tensor

LI Guanxun[1] LIU Han[1] ZHANG Shijin[2] ZHENG Yi[1]

[1]School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 100191, China.
E-mail: 641783717@qq.com; 1242073963@qq.com; zhengyitangshan@163.com

[2]Corresponding author. School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 100191, China. E-mail: shijinzhang@buaa.edu.cn

Abstract In this paper, the authors obtain two theorems about the estimate for the integral of the Bakry-Émery Ricci curvature along a geodesic on Riemannian manifold. As an application, the authors obtain the sufficient conditions for compactness. They are as generalizations of one theorem of Calabi.

Keywords Myers-type theorem, Bakry-Émery Ricci curvature, Riccati equation
2000 MR Subject Classification 53C20

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 3, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA