数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(3):233–262
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0017

噪声可退化且依赖于状态和分布的平均场博弈 *

虞嘉禾[1] 汤善健[1]

提要 文章考虑状态方程关于状态和控制仿射, 效用关于状态和控制凸的平均场博弈, 允许状态方程的扩散项可退化且依赖状态和分布. 由于允许漂移项和扩散项关于分布可以线性增长, 因此可以包含线性二次平均场博弈, 且允许状态的期望以线性形式出现在状态方程中. 作者证明了对应的 McKean-Vlasov 型正倒向微分方程解的存在性, 并获得了对应的解耦函数的正则性. 最后作者证明了用平均场博弈的解和解耦函数可以以 $N^{-\frac{1}{d+4}}$ 的速度逼近多人博弈的 Nash 均衡.

关键词 平均场博弈, McKean-Vlasov 型正倒向随机微分方程, 混沌传播, 随机最大值原理
MR (2000) 主题分类 93E20, 60H30, 60H10, 60F99
中图法分类 O225, O231.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)03-0233-30

1 引 言

在物理学和社会科学系统里, 个体的演化不仅受到其它个体的影响, 还往往受到该个体所处的群体的整体表现或特征的影响. 要完整地描述如此复杂的系统, 既要考察群体 (如密度等宏观量) 的演化, 也要考察个体的演化; 个体的微观演化与群体的宏观演化是互相作用而交织在一起的, 无法仅从微观上描述个体的演化或从宏观上描述群体的演化来把握整个系统的变化. 数学上, 个体的演化由一个动态方程 (如常微分方程和随机微分方程) 来描述的, 而群体的整体表现或特征如空间分布则由一个测度值的偏微分方程或随机偏微分方程来刻画; 个体与群体的交织则表现在个体的微观运动方程与群体的宏观运动方程是相互耦合的. 表征群体特征的量称为群体的平均场, 而个体的微观运动方程由于系数依赖于群体的平均场, 称为平均场微观动态方程. 这里, 个体是没有决策的.

在个体有决策的系统里, 个体的行为由一个受控的平均场微观动态方程的最优控制来刻画, 控制变量表示个体的选择, 其行为即最优控制依赖于一个共同的平均场. 而群体的宏观运动方程则取决于各个体的决策, 诱导出新的平均场. 个体决策时参照的平均场与后来产生的新的平均场会一样吗? 这就是所谓的平均场博弈, 而与后来诱导的新的平均场相同的各个体在决策时所参照的共同平均场就称为平均场博弈的平衡点.

本文考虑这样一类平均场博弈, 其状态方程关于状态和控制变量仿射, 非齐次的部分为非线性的平均场项, 且效用函数关于状态和控制凸. 进一步地, 噪音项不是一个常数或

本文 2020 年 1 月 7 日收到, 2020 年 5 月 23 日收到修改稿.
[1]复旦大学数学科学学院, 上海 200433. E-mail: 15110180029@fudan.edu.cn; sjtang@fudan.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11631004) 和国家重点研发计划 (No. 2018YFA0703900) 的资助.

者给定过程, 而是允许退化且可以依赖状态和平均场项, 这引起了直接应用非退化的抛物方程理论和获得逼近列紧性的困难. 我们将利用概率方法和一些与效用函数凸性相关联的估计去克服这一困难. 由于关于平均场博弈问题的研究非常丰富, 我们将主要介绍一些近期的且与这个主题相关的研究, 这其中的大部分要求状态方程的噪声为可加噪声, 或者是非退化的可乘噪声.

Lasry 和 Lions[1] 提出了一种策略来逼近大量对称参与者的随机微分博弈. 在他们的模型中, 每个参与者通过所有参与者状态的经验分布与别的参与者进行相互作用, 统计物理把类似这种形式的相互作用称为平均场作用. Lasry 和 Lions 通过解当参与者数量趋向于无穷时的极限问题获得反馈控制, 使得每个参与者与其他参与者独立, 并得到近似 Nash 均衡. 由于大量参与者的随机微分博弈通常很难处理, 因此这个方法非常重要. Lasry 和 Lions 提出的极限问题是一对耦合的非线性且非局部的偏微分方程: 第一个偏微分方程是给定终端值的 Hamilton-Jacobi-Bellman 型的, 描述最优部分, 同时, 第二个偏微分方程是给定初始值的 Kolmogorov 型的, 描述状态的分布的演化. Guéant, Lasry 和 Lions 将这种平均场博弈应用到了包括金融[2] 等很多领域. 另一方面, Huang, Malhaḿe 和 Caines[3]也引入了一种类似的策略, 他们称为纳什确定性等价 (Nash Certainty Equivalence).

部分受 Lasry 和 Lions 等工作的影响, 平均场型的倒向随机微分方程在近期也被研究, 例如, 可参见文 [4–5].

目前平均场博弈问题的解法大致可分为两大类. 一类是偏微分方程方法, 在 Lasry 和 Lions 的分析框架下, 状态方程的扩散项 σ 通常被假设为非退化的, 这样就可以应用非退化抛物方程的相关技术 (见 [6–9]). 另一类是概率方法, Carmona 和 Delarue[10]针对一类平均场博弈问题, 通过随机最大值原理, 将原问题转化为解一个 McKean-Vlasov 型正倒向随机微分方程, 其中状态方程的扩散项 σ 是一个可以退化的常数. Lacker[11]也通过概率方法, 在受控鞅问题的框架下, 利用松弛控制证明了一类扩散项更一般的平均场博弈解在弱解意义下的存在性 (见 [12]).

扩散项含控制的情形主要在线性二次平均场博弈中被考虑. 例如 Graber[13]证明了, 在状态方程中没有平均场项等特殊条件下, 线性二次平均场博弈等价于平均场型控制. Hu, Huang 和 Nie[14]在压缩条件下证明了线性二次混合平均场博弈解的存在性. Hu[15]则分别讨论了有限和无限时区下的线性二次平均场博弈, 获得了对应的 Ricatti 方程, 并证明了 Ricatti 方程的解与原问题解的等价性. 此外, 文 [16–18] 也考虑了倒向线性二次平均场博弈, 其中个体的状态方程是一个线性倒向随机微分方程.

在第二节中, 我们考虑一种比文 [10] 更一般的情形, 将文 [10] 中的常数扩散项推广为关于状态仿射且非线性依赖于分布, 进一步, 状态方程中的平均场项不再要求有界, 而是可以关于分布呈多线性增长, 这样就可以包含一些例如线性二次平均场博弈这样的特殊情形 (状态的期望以线性方式出现在状态方程中). 线性二次平均场博弈作为一种典型情形, 已经被广泛地研究, 除了之前提到的一些扩散项含控制的情形, 还有文 [19–23]. 例如,

文 [20] 考虑了 σ 是一个关于时间平方可积的给定函数, Tchuendom[23]证明了在一类线性二次平均场博弈中, 公共噪声的存在能保证解的唯一性.

首先, 给定一个的概率测度流, 平均场博弈问题就转变为一个标准的随机最优控制问题, 然后利用随机最大值原理, 将求解随机最优控制问题转化为求解正倒向随机微分方程. 读者可以参见文 [24], 该文可作为正倒向随机微分方程和随机最大值原理的背景材料. 关于标准的正倒向随机微分方程的可解性, 读者也可以参见文 [25–26]. 然后, 为了寻找一个不变的概率测度流, 我们将上述正倒向随机微分方程变为 McKean-Vlasov 型 (即方程的解的分布也出现在方程中).

然后, 为了证明这个 McKean-Vlasov 型正倒向随机微分方程解的存在性, 我们首先在系数有界的条件下, 利用 Schauder 不动点定理证明方程解的存在性, 然后再用逼近的方法证明原问题解的存在性. 为了获得逼近列收敛性, 我们需要一些一致的先验估计, 这些先验估计可以利用对应我们这个问题的随机最大值原理获得 (背景材料和标准情形可以参考文 [24]). 然而, 由于我们这里的扩散项系数不是个常数, 同时依赖状态和分布, 且状态方程中的平均场项不是一致有界的, 因此直接使用文 [10] 中的方法获得逼近列的紧性似乎有些困难. 这里我们寻找一些适当的条件, 在这些条件下获得了逼近列的紧性.

最后, 我们证明了 McKean-Vlasov 型正倒向随机微分方程的解和其解耦函数一起为多人博弈的参与者提供的策略, 是一个 ε_N-近似 Nash 均衡,

$$\varepsilon_N \leqslant cN^{-\frac{1}{d+4}},$$

其中 N 为参与者数量, d 为状态空间维数, c 是一个正常数. 这里, 我们的证明借鉴了混沌传播 (propagation of chaos) 理论中的标准的收敛估计 (见 [27–28]).

2 记号和预备知识

这里我们先引入一些本节的定义和假设.

2.1 多人博弈

我们考虑一个有 N 个参与者的随机微分博弈. 参与者 i 的状态满足随机微分方程:

$$\mathrm{d}U_t^i = [b_0(t,\overline{\nu}_t^N) + b_1(t)U_t^i + b_2(t)\beta_t^i]\mathrm{d}t + [\sigma_0(t,\overline{\nu}_t^N) + \sigma_1(t)U_t^i]\mathrm{d}W_t^i, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad (2.1)$$

其中 $i = 1,\cdots,N$, $W^i = (W_t^i)_{0\leqslant t\leqslant T}$, $i = 1,2,\cdots,N$ 是 m 维相互独立的 Wiener 过程. 这里 $U_t^i \in \mathbb{R}^d$ 和 $\beta_t^i \in \mathbb{R}^k$ 分别是参与者 i 在 $t \in [0,T]$ 时刻的状态和策略. 每个参与者的策略是取值于 $\mathbb{A} := \mathbb{R}^k$ 的循序可测过程 $\beta = (\beta_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, 满足

$$E\Big[\int_0^T |\beta_t|^2 \mathrm{d}t\Big] < +\infty. \qquad (2.2)$$

系数 $b_0^i, b_1^i, b_2^i, \sigma_0^i$ 和 σ_1^i 是维数适当的确定型可测函数. $\overline{\nu}_t^N \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 是

$$U_t = (U_t^1,\cdots,U_t^N)$$

的经验分布, 定义为

$$\overline{\nu}_t^N(\mathrm{d}x') = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{U_t^i}(\mathrm{d}x'), \tag{2.3}$$

其中 δ_x 是集中在 x 点的 Dirac 点质量, $\mathcal{P}(E)$ 是具有 Borel σ-域的拓扑空间 E 上的概率测度的集合.

参与者 i 的目标是最小化下面这个目标泛函:

$$J^i(\beta) = E\Big[g(U_T^i, \overline{\nu}_T^N) + \int_0^T f(t, U_t^i, \overline{\nu}_t^N, \beta_t^i)\mathrm{d}t\Big]. \tag{2.4}$$

可以看到, 参与者 i 通过所有参与者状态的经验分布间接地收到别的参与者策略的影响.

这个博弈的 Nash 均衡是指一族允许策略

$$\beta^* = (\beta^{*1}, \cdots, \beta^{*N}),$$

使得对所有 i 和允许策略 β^i, 都有

$$J^i(\beta^*) \leqslant J^i(\beta^{*-i}, \beta^i).$$

这里 (β^{*-i}, β^i) 是指一族策略

$$(\beta^{*1}, \cdots, \beta^{*N}),$$

其中用 β^i 替代 β^{*i}.

2.2 平均场博弈

为了研究参与者人数 $N \to \infty$ 时的情形, 我们考虑 Lasry 和 Lions 提出的平均场博弈问题. 对应这里的情况, 就是要解如下的不动点问题:

(i) 固定一个确定的函数 $\mu : [0, T] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$;

(ii) 解如下的随机控制问题:

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{A}} E\Big[\int_0^T f(t, X_t, \mu_t, \alpha_t)\mathrm{d}t + g(X_T, \mu_T)\Big], \tag{2.5}$$

受控状态方程是

$$\mathrm{d}X_t = [b_0(t, \mu_t) + b_1(t)X_t + b_2(t)\alpha_t]\mathrm{d}t + [\sigma_0(t, \mu_t) + \sigma_1(t)X_t]\mathrm{d}W_t, \quad X_0 = x_0, \tag{2.6}$$

其中 $W = (W_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ 是一个 m 维 Wiener 过程. 记最优控制为 $\overline{\alpha}^\mu$, 则对应

$$\alpha = \overline{\alpha}^\mu$$

时, (2.6) 的解记为 $\overline{X}^\mu$, $\overline{X}_t^\mu$ 的分布记为 $\mathbb{P}_{\overline{X}_t^\mu}$;

(iii) 找到一个函数 $\mu : [0, T] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, 使得对任意 $t \in [0, T]$, 有

$$\mathbb{P}_{\overline{X}_t^\mu} = \mu_t.$$

我们将在第 3 节中考虑上述不动点问题.

2.3 假　设

令 E 是一个可分 Banach 空间. 对一个整数 $p \geqslant 1$, $\mathcal{P}_p(E)$ 代表 E 上概率测度空间 $\mathcal{P}(E)$ 的一个子空间, 其中的概率测度的 p 阶矩有限, 即: 如果

$$\mu \in \mathcal{P}(E)$$

且满足

$$M_{p,E}(\mu) := \Big(\int_E \|x\|_E^p \mathrm{d}\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

那么

$$\mu \in \mathcal{P}_p(E).$$

有时将 $M_{p,\mathbb{R}^d}$ 简记为 M_p.

对 $p \geqslant 1$, 定义 $\mu, \mu' \in \mathcal{P}_p(E)$ 之间的 p-Wasserstein 距离 $W_p(\mu, \mu')$ 如下:

$$W_p(\mu, \mu') = \inf_{\pi \in \mathcal{P}_p(E \times E)} \Big\{ \Big[\int_{E \times E} |x - y|_E^p \pi(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \Big]^{\frac{1}{p}} \Big\},$$

其中

$$\pi(\cdot, E) = \mu, \quad \pi(E, \cdot) = \mu'.$$

(A1) 函数 b_1, b_2 和 σ_1 可测且有界. 存在正常数 C, C_1 和 C_2, 使得

$$|b_0(t, \mu)| \leqslant C + C_1 M_2(\mu),$$

$$|\sigma_0(t, \mu)| \leqslant C + C_2 M_2(\mu).$$

(A2) 存在一个正常数 C, 使得对任何

$$(t, \mu, \mu') \in [0, T] \times \mathcal{P}_2(E) \times \mathcal{P}_2(E)$$

都有

$$|(b_0, \sigma_0)(t, \mu') - (b_0, \sigma_0)(t, \mu)| \leqslant C\, W_2(\mu, \mu').$$

(A3) 对任何

$$(t, \mu) \in [0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d),$$

有 $f(t, \cdot, \mu, \cdot)$ 和 $g(\cdot, \mu)$ 是可微的, 且对所有

$$(t, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \mu) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2k} \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d),$$

存在正常数 c_L, 使得

$$|\partial_{x,\alpha} f(t, x_1, \mu, \alpha_1) - \partial_{x,\alpha} f(t, t, x_2, \mu, \alpha_2)| \leqslant c_L(|x_1 - x_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|),$$

$$|\partial_x g(x_1, \mu) - \partial_x g(x_2, \mu)| \leqslant c_L |x_1 - x_2|,$$

且 $f(t, \cdot, \mu, \cdot)$ 和 $g(\cdot, \mu)$ 是凸的. 进一步, 存在一个正常数 λ, 使得

$$f(t, x', \mu, \alpha') - f(t, x, \mu, \alpha) - \langle (x' - x, \alpha' - \alpha), \partial_{(x,\alpha)} f(t, x, \mu, \alpha) \rangle \geqslant \lambda |\alpha' - \alpha|^2. \qquad (2.7)$$

(A4) 存在一个正常数 c_L, 使得

$$f(t,0,\delta_0,0)\leqslant c_L,\quad \forall t\in[0,T].$$

进一步, 对任意 $t\in[0,T]$ 和 $(x_i,\mu_i,\alpha_i)\in\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^k, i=1,2$, 有

$$\begin{aligned}&|(f,g)(t,x_1,\mu_1,\alpha_1)-(f,g)(t,x_2,\mu_2,\alpha_2)|\\ \leqslant\ & c_L[1+|(x_1,\alpha_1)|+|(x_2,\alpha_2)|+M_2(\mu_1)+M_2(\mu_2)][|(x_1,\alpha_1)-(x_2,\alpha_2)|+W_2(\mu_1-\mu_2)]\end{aligned}$$

和

$$|\partial_\alpha f(t,x,\mu,0)|\leqslant c_L.$$

(A5) 对任意 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, 有

$$\langle x,\partial_x f(t,0,\delta_x,0)\rangle\geqslant -c_L(1+|x|),$$

以及

$$\langle x,\partial_x g(0,\delta_x)\rangle\geqslant -c_L(1+|x|).$$

假设(A5)在文 [10] 中被称为弱均值回归 (weak mean-reverting) 条件.

对于 (ii) 中的标准随机控制问题, 对于

$$(t,\alpha,\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathcal{P}(\mathbb{R}^d),\quad x,y,z\in\mathbb{R}^d,$$

Hamiltonian 为

$$H(t,x,\mu,\alpha,y,z)=\langle\, b(t,x,\mu,\alpha),y\,\rangle+\langle\,\sigma(t,x,\mu),z\,\rangle+f(t,x,\mu,\alpha),\tag{2.8}$$

其中

$$\begin{aligned}b(t,x,\mu,\alpha)&:=b_0(t,\mu)+b_1(t)x+b_2(t)\alpha,\\ \sigma(t,x,\mu)&:=\sigma_0(t,\mu)+\sigma_1(t)x.\end{aligned}$$

引理 2.1 [10, Lemma 2.1, p. 2709] 对任意

$$(t,x,\mu,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d,$$

存在唯一的 $\widehat{\alpha}(t,x,\mu,y)$, 使得 H 取到最小值. 进一步地, 我们有 $\widehat{\alpha}(t,x,\mu,y)$ 可测, 局部有界, 且关于 (x,y)Lipschitz 连续, 其 Lipschitz 系数关于 (t,μ) 一致 (只依赖于 λ, $|b_2|$ 的上界以及 $\partial_\alpha f$ 关于 x 的 Lipschitz 系数). 另外, 我们有

$$|\widehat{\alpha}(t,x,\mu,y)|\leqslant\lambda^{-1}(|\partial_\alpha f(t,x,\mu,0)|+|b_2(t)||y|).$$

令 $\mu:[0,T]\to\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 为一个可测且有界的映射. 令 $\beta=(\beta_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 为循序可测的允许策略, $U=(U_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 满足随机微分方程

$$\mathrm{d}U_t=b(t,U_t,\mu_t,\beta_t)\mathrm{d}t+\sigma(t,U_t,\mu_t)\mathrm{d}W_t,\quad U_0=x_0.$$

定义效用泛函 J 为

$$J(\beta;\mu)=E\Big[g(U_T,\mu_T)+\int_0^T f(t,U_t,\mu_t,\beta_t)\mathrm{d}t\Big].\tag{2.9}$$

定理 2.1　假设正倒向微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t = b(t, X_t, \mu_t, \widehat{\alpha}_t(t, X_t, \mu_t, Y_t))\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t, \mu_t)\mathrm{d}W_t, \quad X_0 = x_0, \\ \mathrm{d}Y_t = \partial_x H(t, X_t, \mu_t, \widehat{\alpha}(t, X_t, \mu_t, Y_t), Y_t, Z_t) + Z_t \mathrm{d}W_t, \quad Y_T = \partial_x g(X_T, \mu_T)\end{cases} \tag{2.10}$$

有解 $(X_t, Y_t, Z_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, 满足

$$E\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(|X_t|^2 + |Y_t|^2) + \int_0^T |Z_t|^2 \mathrm{d}t\Big] < +\infty. \tag{2.11}$$

记

$$\widehat{\alpha}_t = \widehat{\alpha}(t, X_t, \mu_t, Y_t),$$

那么对于任意允许策略 β, 有

$$J(\widehat{\alpha}; \mu) + \lambda E\int_0^T |\beta_t - \widehat{\alpha}|^2 \mathrm{d}t \leqslant J(\beta; \mu).$$

证　由引理 2.1, $\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha})_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是允许策略. 根据文 [29, Theorem 6.4.6, p.149] 证明, 由 (2.7), 以及漂移项和扩散项关于状态和控制线性得证.

注 2.1　根据文 [29] 中的证明, 即使策略 β 适应于一个更大的域流, 只要 $W = (W_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 在这个域流下仍是一个 Brown 运动, 那么定理 2.1 中的结论就仍然成立.

命题 2.1　在定理 2.1 的假设下, 对另一个可测有界映射 $\mu' : [0, T] \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 和过程 $U' = (U'_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, 满足

$$\mathrm{d}U'_t = b(t, U'_t, \mu'_t, \beta_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, U'_t, \mu'_t)\mathrm{d}W_t, \quad U'_0 = x'_0 \in \mathbb{R}^d,$$

有

$$\begin{aligned} &J(\widehat{\alpha}; \mu) + \langle\, x'_0 - x_0, Y_0 \,\rangle + \lambda E\int_0^T |\beta_t - \widehat{\alpha}_t|^2 \mathrm{d}t \\ \leqslant\ & J([\beta, \mu']; \mu) + E\Big[\int_0^T \langle\, b_0(t, \mu_t) - b_0(t, \mu'_t), Y_t \,\rangle \,\mathrm{d}t\Big] \\ &+ E\Big[\int_0^T \langle\, \sigma_0(t, \mu_t) - \sigma_0(t, \mu'_t), Z_t \,\rangle \,\mathrm{d}t\Big], \end{aligned} \tag{2.12}$$

其中

$$J([\beta, \mu']; \mu) := E\Big[g(U'_T, \mu_T) + \int_0^T f(t, U'_t, \mu_t, \beta)\mathrm{d}t\Big]. \tag{2.13}$$

$J([\beta, \mu']; \mu)$ 中的参数 $[\beta, \mu']$ 指状态方程中的概率测度流为 $(\mu'_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, 效用中的概率测度流为 $(\mu_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$.

证　用 Itô 引理计算下面的式子:

$$\langle U'_t - X_t, Y_t \rangle + \int_0^t [f(s, U'_s, \mu_s, \beta_s) - f(s, X_s, \mu_s, \widehat{\alpha}_s)]\mathrm{d}s.$$

由于 U' 的满足的随机微分方程的漂移和扩散项都依赖于 $(\mu'_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, 因此不等式 (2.12) 的右边会多出两项. 使用 Itô 引理计算后直接得证.

3 平均场型正倒向随机微分方程

通过 2.2 节中的定理 2.1, 我们可以将平均场博弈的解与一个 McKean-Vlasov 型正倒向随机微分方程的解相关联:

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t = [b_0(t,\mathbb{P}_{X_t}) + b_1(t)X_t + b_2(t)\widehat{\alpha}(t,X_t,\mathbb{P}_{X_t},Y_t)]\mathrm{d}t \\ \qquad\quad +[\sigma_0(t,\mathbb{P}_{X_t}) + \sigma_1(t)X_t]\mathrm{d}W_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d; \\ \mathrm{d}Y_t = -[b_1^\top Y_t + \sigma_1^\top Z_t + \partial_x f(t,X_t,\mathbb{P}_{X_t},\widehat{\alpha}(t,X_t,\mathbb{P}_{X_t},Y_t))]\mathrm{d}t \\ \qquad\quad +Z_t\mathrm{d}W_t, \quad Y_T = \partial_x g(X_T,\mathbb{P}_{X_T}),\end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $\mathbb{P}_{X_t}$ 是 X_t 的分布, $a^\top$ 表示矩阵 a 的转置.

3.1 不动点问题的定义

我们记 $[0,T]\to\mathbb{R}^d$ 的连续函数全体为 $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$. 为了使 (iii) 中的定义明确, 需要如下引理.

引理 3.1 假设有 (A1)–(A5) 成立, 给定 $\mu\in\mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d))$ (记其在 $t\in[0,T]$ 时刻对应的分布为 $\mu_t\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$), 那么正倒向随机微分方程 (2.10) 有唯一解, 记为 $(X_t^{x_0,\mu}, Y_t^{x_0,\mu}, Z_t^{x_0,\mu})_{0\leqslant t\leqslant T}$, 且存在一个只依赖于(A1)–(A5)中的常数 $c>0$ 和一个可测函数 $u^\mu: [0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, 使得对所有

$$(t,x,x')\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2d},$$

有

$$|u^\mu(t,x') - u^\mu(t,x)| \leqslant c|x'-x|,$$
$$|u^\mu(t,x)| \leqslant c(1+|x|),$$
$$Y_t^{x_0,\mu} = u^\mu(t,X_t^{x_0,\mu}), \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

证 由引理 2.1, (2.10) 中的倒向随机微分方程的生成元 $\partial_x H$ 关于 (x,y) 一致 Lipschitz 连续. 由文 [30, Theorem 1.1, p.213], 正倒向随机微分方程 (2.10) 在小时间上存在唯一解. 因此, 对任意时间 T, 存在一个常数 $\delta>0$, 使得对任意 $t_0\in[T-\delta,T]$, 正倒向随机微分方程 (2.10) 在 $[t_0,T]$ 上有唯一解, 记为

$$(X_t^{t_0,x_0}, Y_t^{t_0,x_0}, Z_t^{t_0,x_0})_{t_0\leqslant t\leqslant T}.$$

根据文 [30, Theorem 2.6, p.240], 为了获得正倒向随机微分方程在 $[0,T]$ 上解的存在唯一性, 我们只要证明, 存在一个不依赖于 t_0 和 δ 的常数 c, 使得

$$\forall x_0, x_0'\in\mathbb{R}^d, \quad |Y_{t_0}^{t_0,x_0} - Y_{t_0}^{t_0,x_0'}|^2 \leqslant c|x_0 - x_0'|^2. \tag{3.2}$$

由 Blumenthal 0-1 律, $Y_{t_0}^{t_0,x_0}$ 和 $Y_{t_0}^{t_0,x_0'}$ 是确定的. 由 (2.12), 有

$$\widehat{J}^{t_0,x_0} + \langle x_0' - x_0, Y_{t_0}^{t_0,x_0}\rangle + \lambda E\int_0^T |\widehat{\alpha}_t^{t_0,x_0} - \widehat{\alpha}_t^{t_0,x_0'}|^2\mathrm{d}t \leqslant \widehat{J}^{t_0,x_0'} \tag{3.3}$$

和

$$\widehat{J}^{t_0,x_0'}+\langle\, x_0-x_0', Y_{t_0}^{t_0,x_0'}\,\rangle+\lambda E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^{t_0,x_0}-\widehat{\alpha}_t^{t_0,x_0'}|^2\mathrm{d}t\leqslant\widehat{J}^{t_0,x_0}, \tag{3.4}$$

其中

$$\widehat{J}^{t_0,x_0}=J((\widehat{\alpha}_t^{t_0,x_0})_{t_0\leqslant t\leqslant T}),$$
$$\widehat{\alpha}_t^{t_0,x_0}=\widehat{\alpha}(t,X_t^{t_0,x_0},\mu_t,Y_{t_0}^{t_0,x_0}),$$

对 $\widehat{J}^{t_0,x_0'}$ 和 $\widehat{\alpha}_t^{t_0,x_0'}$ 也类似定义. 将 (3.4) 和 (3.3) 相加, 有

$$2\lambda E\int_{t_0}^T|\widehat{\alpha}_t^{t_0,x_0}-\widehat{\alpha}_t^{t_0,x_0'}|^2\mathrm{d}t\leqslant\langle\, x_0'-x_0, Y_{t_0}^{t_0,x_0'}-Y_{t_0}^{t_0,x_0}\,\rangle\,. \tag{3.5}$$

然后, 由随机微分方程和倒向随机微分方程的标准先验估计, 存在一个不依赖于 (t_0,δ) 的常数 $c>0$, 使得

$$\begin{aligned}&E\Big[\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}|X_t^{t_0,x_0}-X_t^{t_0,x_0'}|^2\Big]+E\Big[\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}|Y_t^{t_0,x_0}-Y_t^{t_0,x_0'}|^2\Big]\\&\leqslant c\Big(E\int_{t_0}^T|\widehat{\alpha}_t^{t_0,x_0}-\widehat{\alpha}_t^{t_0,x_0'}|^2\mathrm{d}t+|x_0-x_0'|^2\Big).\end{aligned}$$

将 (3.5) 代入上个不等式, 有 (3.2). 然后, 我们将 u^μ 定义为 $u^\mu(t,x)=Y_t^{t,x}$. u^μ 关于 x 的 Lipschitz 连续性

$$|u^\mu(t,x')-u^\mu(t,x)|\leqslant c|x'-x|,\quad \forall t\in[0,T],$$

可直接由文 [30, Corollary 1.5, p.222] 获得. 最后, 由如下不等式:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|u^\mu(t,0)|\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant T}[E[|u^\mu(t,X_t^{0,0})-u^\mu(t,0)|]+E[|Y_t^{0,0}|]]<+\infty, \tag{3.6}$$

有

$$|u^\mu(t,x)|\leqslant c(1+|x|).$$

注 3.1　令 $\{\mu^n\}$ 为 $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d))$ 中的满足

$$\sup_n M_2(\mu^n)\leqslant C$$

的一族概率测度, 其中 C 是一个正常数. 由引理 3.1 和文 [30, Corollary 1.5, p.222], 存在一个独立于 n 的正常数 c, 使得

$$\forall(n,x,x')\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d,\quad |u^{\mu^n}(t,x')-u^{\mu^n}(t,x)|\leqslant c|x'-x|.$$

定义 3.1　由引理 3.1, 对任意 $\mu\in\mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d))$, 初值为 x_0 的正倒向随机微分方程 (2.10) 有唯一解

$$(X^{x_0,\mu},Y^{x_0,\mu},Z^{x_0,\mu}).$$

定义映射 Φ 为

$$\Phi(\mu):=\mathbb{P}_{X^{x_0,\mu}}.$$

因此 Φ 的不动点 (即 μ 满足 $\mu=\Phi(\mu)$) 是 (iii) 中问题的解. 这样的不动点 μ 和对应的 (3.1) 的解

$$(X^{x_0,\mu},Y^{x_0,\mu},Z^{x_0,\mu})$$

一起被称为平均场博弈的解.

3.2 唯一性

在文 [12, Theorem 6.2, p.32] 一样的条件下, 我们可以建立平均场博弈解的唯一性.

命题 3.1 若除了假设(A1)–(A5)之外, 还有

$$b_0:=0,\quad \sigma_0:=0,\quad f:=f_0(t,x,\mu)+f_1(t,x,\alpha),$$

以及 f_0 和 g 满足如下的单调性条件: 对任意 $\mu,\mu'\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^d}(f_0(t,x,\mu)-f_0(t,x,\mu'))\mathrm{d}(\mu-\mu')(x)\geqslant 0,\quad t\in[0,T]$$

和

$$\int_{\mathbb{R}^d}(g(x,\mu)-g(x,\mu'))\mathrm{d}(\mu-\mu')(x)\geqslant 0,$$

那么正倒向随机微分方程 (3.1) 只有至多一个解.

证 假设 μ 和 μ' 是 Φ 的两个不动点, $(\widehat{\alpha},X)$ 和 $(\widehat{\alpha}',X')$ 分别是对应的策略和状态过程. 由 (2.12), 有

$$J(\widehat{\alpha};\mu)+\lambda E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t-\widehat{\alpha}'_t|^2\mathrm{d}t\leqslant J([\widehat{\alpha}',\mu'];\mu)=E\Big[g(X'_T,\mu_T)+\int_0^T f(t,X'_t,\mu_t,\widehat{\alpha}'_t)\mathrm{d}t\Big].$$

因此,

$$\begin{aligned}&J(\widehat{\alpha};\mu)-J(\widehat{\alpha}';\mu')+\lambda E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t-\widehat{\alpha}'_t|^2\mathrm{d}t\\ \leqslant\ &E\Big[g(X'_T,\mu_T)-g(X'_T,\mu'_T)+\int_0^T f(t,X'_t,\mu_t,\widehat{\alpha}'_t)\mathrm{d}t-\int_0^T f(t,X'_t,\mu'_t,\widehat{\alpha}'_t)\mathrm{d}t\Big]\\ =\ &\int_{\mathbb{R}^d}(g(x,\mu_T)-g(x,\mu'_T))\mathrm{d}\mu'_T(x)+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}(f_0(t,x,\mu_t)-f_0(t,x,\mu'_t))\mathrm{d}\mu'(x)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

交换 μ 和 μ', 有

$$\begin{aligned}&J(\widehat{\alpha}';\mu')-J(\widehat{\alpha};\mu)+\lambda E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t-\widehat{\alpha}'_t|^2\mathrm{d}t\\ \leqslant\ &\int_{\mathbb{R}^d}(g(x,\mu'_T)-g(x,\mu_T))\mathrm{d}\mu_T(x)+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}(f_0(t,x,\mu'_t)-f_0(t,x,\mu_t))\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

将上面两个不等式相加, 有

$$E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t-\widehat{\alpha}'_t|^2\mathrm{d}t\leqslant 0.$$

这样我们获得了唯一性.

3.3 有界系数

命题 3.2 如果在假设 (A1)–(A5) 之外, 还有 $|b_0|$, $|\sigma_0|$, $|\partial_x f|$ 和 $|\partial_x g|$ 一致有界, 小于一个常数 c_B, 那么, 正倒向随机微分方程 (3.1) 有解.

证 我们在 $\mathcal{M}_1(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d))$ 空间的一个适当的子空间上应用 Schauder 不动点定理, 其中 $\mathcal{M}_1(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d))$ 是 $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ 上的具有有限 1- 阶矩的符号测度 ν 全体, 被赋予 Kantorovich-Rubinstein 范数. 对 $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d))$,

$$\|\nu\|_{\mathrm{KR}} = \sup\Big\{\Big|\int_{\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)} F(\omega)\mathrm{d}\nu(\omega)\Big|; F \in \mathrm{Lip}_1(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)\Big\},$$

这个范数与 $\mathcal{P}_1(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d))$ 上的 1-Wasserstein 距离一致 (见 [31, Remark 7.5, p.207]). 我们将构造一个凸的闭子集 $\Gamma \subset \mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)) \subset \mathcal{M}_1(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d))$, 使得

$$\Phi(\nu) \in \Gamma, \quad \forall \nu \in \Gamma,$$

且 Φ 是 Γ 上紧连续映射 (即像集为相对紧集的连续映射). 然后, 我们将在 Γ 上应用 Schauder 不动点定理.

根据 (2.10) 的倒向部分的标准先验估计, 由于 g_x 和 f_x 有界, 存在一个正常数 c, 使得

$$\begin{aligned} &E\int_0^T |Z_t^{x_0,\mu}|^2\mathrm{d}t \leqslant c, \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)), \\ &|Y_t^{x_0,\mu}| \leqslant c, \quad \mathbb{P}-\text{a.s.} \quad \forall (t,\mu) \in [0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

由(A4)和引理 2.1, 存在一个正常数 c, 使得

$$\forall t \in [0,T], \quad \widehat{\alpha}(t, X_t^{x_0,\mu}, \mu_t, Y_t^{x_0,\mu}) \leqslant c. \tag{3.8}$$

将上式代入 (2.10) 的正向部分, 再由随机微分方程的标准先验估计, 则存在一个独立于 μ 的常数 c', 使得

$$\|X_T^{x_0,\mu_0,*}\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c'. \tag{3.9}$$

对 RCLL 过程, 我们引入这样的记号

$$X_T^* := \sup_{t\in[0,T]} |X_t|.$$

我们定义 $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d))$ 的一个子集

$$\Gamma = \{\mu \in \mathcal{P}_4(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)) : M_{4,\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)}(\mu) \leqslant c'\},$$

则 Γ 是凸的, 且满足

$$\Phi(\nu) \in \Gamma, \quad \forall \nu \in \Gamma.$$

由文 [31, Theorem 7.12, p.212], 1-Wasserstein 距离有如下性质:

$$\lim_{k\to\infty} W_1(\mu_k,\mu) = 0$$

等价于 μ_k 弱收敛于 μ 且

$$\lim_{k\to\infty} M_1(\mu_k) = M_1(\mu),$$

其中概率测度的弱收敛是指对任何 $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ 上的有界连续函数 f, 都有

$$\lim_{k\to\infty} \int f\mathrm{d}\mu_k = \int f\mathrm{d}\mu.$$

因此, Γ 关于 1-Wasserstein 距离闭.

然后, 根据文 [32, Theorem 4.10, Problem 4.11, p.63], 由于有 (3.8) 和 (3.9), 因此过程族 $\{(X_t^{x_0,\mu})_{0\leqslant t\leqslant T,\mu\in\Gamma}\}$ 胎紧. 因此其中的任意序列都具有弱收敛子列 $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$, 记其弱收敛到 μ. 由 (3.9), $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ 具有子列 (μ_{n_k}), 满足

$$\lim_{k\to\infty} M_1(\mu_{n_k}) = A \leqslant c',$$

即

$$\lim_{k\to\infty} E[X_T^{x_0,\mu_{n_k},*}] = A.$$

为了符号简便, 仍然把这个子列记为 (μ_n). 我们定义如下截断函数 f_R:

$$f_R(x) = \begin{cases} x, & x < R; \\ R, & x \geqslant R. \end{cases}$$

有

$$\begin{aligned} &|E[f_R(X_T^{x_0,\mu_n,*})] - E[X_T^{x_0,\mu_n,*}]| \\ \leqslant{}& E[X_T^{x_0,\mu_n,*} \cdot 1_{X_T^{x_0,\mu_n,*}\geqslant R}] \\ \leqslant{}& \frac{1}{R^3} E[|X_T^{x_0,\mu_n,*}|^4] \leqslant \frac{(c')^4}{R^3}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

我们把期望 $E[f_R(X_T^{x_0,\mu_n,*})]$ 记为 $M_1^R(\mu_n)$. 由上面的不等式, 当 $R\to\infty$ 时, $M_1^R(\mu_n)$ 关于 n 一致收敛到 $M_1(\mu_n)$. 由于 (μ_n) 弱收敛到 μ, 因此固定 R, $M_1^R(\mu_n)$ 收敛到 $M_1^R(\mu)$. 综上, 有

$$M_1(\mu) = A = \lim_{n\to\infty} M_1(\mu_n).$$

由 Wasserstein 距离的性质, 有

$$\lim_{n\to\infty} W_1(\mu_n,\mu) = 0.$$

因此, $\Phi(\Gamma)$ 在 1-Wasserstein 距离下相对紧.

我们还需要证明 Φ 在 Γ 上连续. 给定两个测度 $\mu,\mu'\in\Gamma$, 由 (2.12), 有

$$\begin{aligned} &J(\widehat{\alpha};\mu) + \lambda E\int_0^T |\widehat{\alpha}_t' - \widehat{\alpha}_t|^2 \mathrm{d}t - J([\widehat{\alpha}',\mu'];\mu) \\ \leqslant{}& E\Big[\int_0^T \langle\, b_0(t,\mu_t) - b_0(t,\mu_t'), Y_t \,\rangle\, \mathrm{d}t\Big] + E\Big[\int_0^T \langle\, \sigma_0(t,\mu_t) - \sigma_0(t,\mu_t'), Z_t \,\rangle\, \mathrm{d}t\Big]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

由 $\widehat{\alpha}'$ 的最优性, 有

$$J([\widehat{\alpha}',\mu'];\mu) \leqslant J(\widehat{\alpha};\mu') + J([\widehat{\alpha}',\mu'];\mu) - J(\widehat{\alpha}';\mu').$$

因此

$$\lambda E\int_0^T |\widehat{\alpha}_t'-\widehat{\alpha}_t|^2\mathrm{d}t \leqslant J(\widehat{\alpha};\mu')-J(\widehat{\alpha};\mu)+J([\widehat{\alpha}',\mu'];\mu)-J(\widehat{\alpha}';\mu')$$
$$+E\Big[\int_0^T \langle\, b_0(t,\mu_t)-b_0(t,\mu_t'),Y_t\,\rangle\,\mathrm{d}t\Big]$$
$$+E\Big[\int_0^T \langle\, \sigma_0(t,\mu_t)-\sigma_0(t,\mu_t'),Z_t\,\rangle\,\mathrm{d}t\Big]. \tag{3.12}$$

然后, 比较 $J(\widehat{\alpha};\mu')$ 和 $J(\widehat{\alpha};\mu)$. $J(\widehat{\alpha};\mu)$ 对应的过程为 $X^{x_0,\mu}$, 而 $J(\widehat{\alpha};\mu')$ 对应的过程为 U, 满足

$$\mathrm{d}U_t=[b_0(t,\mu')+b_1(t)U_t+b_2(t)\widehat{\alpha}_t]\mathrm{d}t+[\sigma_0(t,\mu')+\sigma_1(t)U_t]\mathrm{d}W_t,\quad U_0=x_0.$$

由 Gronwall 不等式, 有

$$E\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^{x_0,\mu}-U_t|^2\Big]\leqslant c\int_0^T W_2^2(\mu_t,\mu_t')\mathrm{d}t.$$

由(A4), (3.8)–(3.9), 得到

$$J(\widehat{\alpha};\mu')-J(\widehat{\alpha};\mu)\leqslant c\Big(\int_0^T W_2^2(\mu_t,\mu_t')\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

一样地处理 $J([\widehat{\alpha}',\mu'];\mu)$ 和 $J(\widehat{\alpha}';\mu')$ 后, 得到

$$J([\widehat{\alpha}',\mu'];\mu)-J(\widehat{\alpha}';\mu')\leqslant c\Big(\int_0^T W_2^2(\mu_t,\mu_t')\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

因此由 (3.7), (3.12) 和(A2), 有

$$E\int_0^T |\widehat{\alpha}_t'-\widehat{\alpha}_t|^2\mathrm{d}t\leqslant c\Big(\int_0^T W_2^2(\mu_t,\mu_t')\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

再次使用 Gronwall 不等式, 有

$$E\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^{x_0,\mu}-X_t^{x_0,\mu'}|^2\Big]\leqslant c\Big(\int_0^T W_2^2(\mu_t,\mu_t')\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

由 Wasserstein 距离的定义, 得到

$$W_1(\Phi(\mu),\Phi(\mu'))\leqslant E\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^{x_0,\mu}-X_t^{x_0,\mu'}|\Big],$$
$$\Big(\int_0^T W_2^2(\mu_t,\mu_t')\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant cW_2(\mu,\mu').$$

综上, 有

$$W_1(\Phi(\mu),\Phi(\mu'))\leqslant cW_2(\mu,\mu')^{\frac{1}{2}}.$$

由于 Γ 上的概率测度有一致有界的 4 阶矩, 因此根据 Wasserstein 距离的定义以及 Hölder 不等式, 有

$$W_2(\mu,\mu')\leqslant cW_1(\mu,\mu')^{\frac{1}{4}}.$$

所以, 得到

$$W_1(\Phi(\mu),\Phi(\mu'))\leqslant cW_1(\mu,\mu')^{\frac{1}{8}}.$$

因此, Φ 在 Γ 上关于 1-Wasserstein 距离连续. 最后, 直接应用 Schauder 不动点定理得证.

3.4 逼近方法

我们将用一列 $(b_0^n,\sigma_0^n,f^n,g^n)$ 来逼近 (b_0,σ_0,f,g), 这列 $(b_0^n,\sigma_0^n,f^n,g^n)$ 一致地满足假设 (A1)–(A5). 对任意给定的 $n\geqslant 1$, 当 $b_0^n,\sigma_0^n,\partial_x f^n$ 和 $\partial_x g^n$ 有界时, 由命题 3.2, (b_0,σ_0,f,g) 被替换成 $(b_0^n,\sigma_0^n,f^n,g^n)$ 的正倒向随机微分方程 (3.1) 有解, 记为

$$(X^n,Y^n,Z^n).$$

我们将证明这样的一列解能逼近正倒向随机微分方程 (3.1) 的解.

由于我们这里的噪声依赖于状态和分布, 且状态方程中的平均场项都是无界的, 因此, 似乎直接应用文 [10] 中的方法去建立逼近列的紧性有一定的困难. 这里, 我们将在 λ' 充分大或者 $|b_2|$ 充分小这样进一步的假设下获得逼近列的紧性. 即使是线性二次情形[20](其中 σ 是一个给定的关于时间的 L^2 函数), 为了得到解的存在性, 也需要一些进一步的假设 (见 [20, Proposition 3.1, Theorem 3.1, p.507]), 所以, 对于我们考虑的这个更一般的情形, 需要一些进一步假设似乎是合理的.

引理 3.2 如果存在一列 $(b_0^n,\sigma_0^n,f^n,g^n)$, 使得

(i) 关于相同的参数 $(\lambda,c_L):=(\lambda',c_L')\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, (b_0^n,σ_0^n) 关于 n 一致地满足(A1)–(A2), 且 (f^n,g^n) 关于 n 一致地满足(A3)–(A5);

(ii) 在任何有界集上, $(b_0^n,\sigma_0^n,f^n,g^n)$ 一致收敛到 (b_0,σ_0,f,g);

(iii) 对任意 $n\geqslant 1$, (b_0,σ_0,f,g) 被替换成 $(b_0^n,\sigma_0^n,f^n,g^n)$ 的正倒向随机微分方程 (3.1) 有解 (X^n,Y^n,Z^n);

那么, 当 λ' 充分大或者 $|b_2|$ 充分小时, 正倒向随机微分方程 (3.1) 有解.

证 为了得到这列过程的收敛子列 $(X^n)_{n\geqslant 1}$, 首先, 我们需要这族过程的胎紧性. 对任意 $n\geqslant 1$, 有对应的 Hamiltonian

$$H^n(t,x,\mu,\alpha,y,z)=\langle\, b^n(t,x,\mu,\alpha),y\,\rangle+\langle\,\sigma^n(t,x,\mu),z\,\rangle+f^n(t,x,\mu,\alpha),$$

其中

$$b^n(t,x,\mu,\alpha):=b_0^n(t,\mu)+b_1(t)x+b_2(t)\alpha,\quad \sigma^n(t,x,\mu):=\sigma_0^n(t,\mu)+\sigma_1(t)x,$$

使其取到最小值的函数记为 $\widehat{\alpha}^n(t,x,\mu,y)$. 记

$$\widehat{\alpha}_t^n=\widehat{\alpha}^n(t,X_t^n,\mathbb{P}_{X_t^n},Y_t^n).$$

为了获得 $(X^n)_{n\geqslant 1}$ 的胎紧性, 首先要证明

$$\sup_{n\geqslant 1}E\int_0^T[|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t]<+\infty.$$

步骤 1 令

$$\beta_t^n := E(\widehat{\alpha}_t^n),$$

该策略对应的 U^n 满足

$$\mathrm{d}U_t^n = [b_0^n(t,\mathbb{P}_{X_t^n}) + b_1(t)U_t^n + b_2(t)E(\widehat{\alpha}_t^n)]\mathrm{d}t + [\sigma_0^n(t,\mathbb{P}_{X_t^n}) + \sigma_1(t)U_t^n]\mathrm{d}W_t, \quad U_0^n = x_0.$$

取期望, 得到

$$E(U_t^n) = E(X_t^n)$$

和

$$U_t^n - E(U_t^n) = \int_0^t b_1(t)[U_s^n - E(U_s^n)]\mathrm{d}s + \int_0^t [\sigma_0^n(s,\mathbb{P}_{X_s^n}) + \sigma_1(s)U_s^n]\mathrm{d}W_s.$$

因此, 存在一个常数 $c>0$, 使得

$$\mathrm{Var}(U_t^n) \leqslant T(c + 2C_2^2E[|X_T^{n,*}|^2] + 2|\sigma_1|^2E[|U_T^{n,*}|^2])\mathrm{e}^{|b_1|^2T}. \tag{3.13}$$

由随机微分方程的标准先验估计和 Gronwall 不等式, 有

$$\begin{aligned} E[|X_T^{n,*}|^2] &\leqslant \Big(c + cT + 2|b_2|^2E\int_0^T |\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t\Big)\mathrm{e}^{[|b_1|^2+|\sigma_1|^2+C_2^2+C_1^2]T} \\ &\leqslant c\Big(1 + E\int_0^T |\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t\Big) \end{aligned} \tag{3.14}$$

和

$$\begin{aligned} E[|U_T^{n,*}|^2] &\leqslant \Big[c(1+T) + 2(C_1^2+C_2^2)TE[|X_T^{n,*}|^2] + 2|b_2|^2E\int_0^T |\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t\Big]\mathrm{e}^{[|b_1|^2+|\sigma_1|^2]T} \\ &\leqslant c\Big(1 + E\int_0^T |\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t\Big). \end{aligned} \tag{3.15}$$

因此

$$\mathrm{Var}(U_t^n) \leqslant c + c'\left(C_2^2 + |\sigma_1|^2\right)E\int_0^T |\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t, \tag{3.16}$$

其中

$$c' := 4T[1 + (C_1^2 + C_2^2)T]|b_2|^2\mathrm{e}^{[2|b_1|^2+|\sigma_1|^2+C_1^2+C_2^2]T},$$

可以看出, 当 $|b_2|$ 趋于 0 时, c' 也趋向于 0.

由定理 2.1, 有

$$\begin{aligned} &E[g^n(X_T^n,\mathbb{P}_{X_T^n})] + E\int_0^T [\lambda'|\widehat{\alpha}_t^n - \beta_t^n|^2 + f^n(t,X_t^n,\mathbb{P}_{X_t^n},\widehat{\alpha}_t^n)]\mathrm{d}t \\ &\leqslant E\Big[g^n(U_T^n,\mathbb{P}_{X_T^n}) + \int_0^T f^n(t,U_t^n,\mathbb{P}_{X_t^n},\beta_t^n)\mathrm{d}t\Big]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

由凸性条件和 Jensen 不等式, 有

$$g^n(E(X_T^n),\mathbb{P}_{X_T^n}) + \int_0^T [\lambda'\mathrm{Var}(\widehat{\alpha}_t^n) + f^n(t,E(X_t^n),\mathbb{P}_{X_t^n},E(\widehat{\alpha}_t^n))]\mathrm{d}t$$

$$\leqslant E\Big[g^n(U_T^n,\mathbb{P}_{X_T^n})+\int_0^T f^n(t,U_t^n,\mathbb{P}_{X_t^n},E(\widehat{\alpha}_t^n))\mathrm{d}t\Big]. \tag{3.18}$$

根据(A4), 存在正常数 $c_0\leqslant c'_L$, 使得

$$\begin{aligned}&|(f^n,g^n)(t,x',\mu',\alpha)-(f^n,g^n)(t,x,\mu,\alpha)|\\ &\leqslant c_0(1+|(x,x')|+M_2(\mu)+M_2(\mu')+2|\alpha|)(|x'-x|+W_2(\mu,\mu')).\end{aligned}$$

进一步, 有

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathrm{Var}(\widehat{\alpha}_t^n)\mathrm{d}t\leqslant{}& \frac{4c_0}{\lambda'}(1+E[|U_T^n|^2]^{\frac12}+E[|X_T^n|^2]^{\frac12})E[|U_T^n-E(X_T^n)|^2]^{\frac12}\\ &+\frac{4c_0}{\lambda'}\int_0^T(1+E[|U_t^n|^2]^{\frac12}+E[|X_t^n|^2]^{\frac12}\\ &+E[|\widehat{\alpha}_t^n|^2]^{\frac12})E[|U_t^n-E(X_t^n)|^2]^{\frac12}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.19}$$

由于 $E(U_t^n)=E(X_t^n)$, 有

$$\int_0^T \mathrm{Var}(\widehat{\alpha}_t^n)\mathrm{d}t\leqslant c\Big[1+\Big(E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\Big]+\frac{4c_0c'}{\lambda'}(C_2^2+|\sigma_1|^2)E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t. \tag{3.20}$$

所以

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{Var}(X_t^n)\leqslant{}& c'(C_2^2+|\sigma_1|^2)E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t+c\Big[1+\Big(E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\Big]\\ &+\frac{4c_0c'}{\lambda'}(C_2^2+|\sigma_1^n|^2)E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t\\ \leqslant{}& c'\Big(\frac{4c_0}{\lambda'}+1\Big)(C_2^2+|\sigma_1|^2)E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t\\ &+c\Big[1+\Big(E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\Big].\end{aligned} \tag{3.21}$$

步骤 2 令

$$\beta_t^n:=0,$$

该策略对应的状态 U^n 满足

$$\mathrm{d}U_t^n=[b_0^n(t,\mathbb{P}_{X_t^n})+b_1(t)U_t^n]\mathrm{d}t+[\sigma_0^n(t,\mathbb{P}_{X_t^n})+\sigma_1(t)U_t^n]\mathrm{d}W_t,\quad U_0^n=x_0.$$

然后, 有

$$E[|U_T^{n,*}|^2]\leqslant c+c'(C_1^2+C_2^2)E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t. \tag{3.22}$$

再次使用定理 2.1 和 Jensen 不等式, 有

$$\begin{aligned}&g^n(E(X_T^n),\mathbb{P}_{X_T^n})+\int_0^T[\lambda' E(|\widehat{\alpha}_t^n|^2)+f^n(t,E(X_t^n),\mathbb{P}_{X_t^n},E(\widehat{\alpha}_t^n))]\mathrm{d}t\\ &\leqslant E\Big[g^n(U_T^n,\mathbb{P}_{X_T^n})+\int_0^T f^n(t,U_t^n,\mathbb{P}_{X_t^n},0)\mathrm{d}t\Big].\end{aligned} \tag{3.23}$$

由 $\partial_\alpha f^n(t,x,\mu,0)\leqslant c_L'$, 有

$$\begin{aligned}
&g^n(E(X_T^n),\mathbb{P}_{X_T^n})+\int_0^T[\lambda' E(|\widehat{\alpha}_t^n|^2)+f^n(t,E(X_t^n),\mathbb{P}_{X_t^n},0)]\mathrm{d}t-cE\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|\mathrm{d}t\\
\leqslant{}& E\Big[g^n(U_T^n,\mathbb{P}_{X_T^n})+\int_0^T f^n(t,U_t^n,\mathbb{P}_{X_t^n},0)\mathrm{d}t\Big].
\end{aligned}\tag{3.24}$$

根据(A4), 存在一个依赖于 T 的正常数 $c(T)$, 使得

$$\begin{aligned}
&g^n(E(X_T^n),\delta_{E(X_T^n)})+\int_0^T[\lambda' E(|\widehat{\alpha}_t^n|^2)+f^n(t,E(X_t^n),\delta_{E(X_t^n)},0)]\mathrm{d}t\\
\leqslant{}& c(T)c_0\Big(1+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}[E|X_t^n|^2]^{\frac12}+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}[E|U_t^n|^2]^{\frac12}\Big)\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}[E|U_t^n|^2]^{\frac12}+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}[\mathrm{Var}(X_t^n)]^{\frac12}\Big)\\
&+g^n(0,\delta_{E(X_T^n)})+\int_0^T f^n(t,0,\delta_{E(X_t^n)},0)\mathrm{d}t+cE\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

令

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\quad B=\sqrt{(\frac{4c_0}{\lambda'}+1)(C_2^2+|\sigma_1|^2)}.$$

由 Young 不等式, (3.21)–(3.22), 有

$$\begin{aligned}
&g^n(E(X_T^n),\delta_{E(X_T^n)})+\int_0^T\Big[\frac{\lambda'}{2}E(|\widehat{\alpha}_t^n|^2)+f^n(t,E(X_t^n),\delta_{E(X_t^n)},0)\Big]\mathrm{d}t\\
\leqslant{}& g^n(0,\delta_{E(X_T^n)})+\int_0^T f^n(t,0,\delta_{E(X_t^n)},0)\mathrm{d}t\\
&+c(T)c_0c'(A+B+A^2+AB)E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由 (A5), 得到

$$\Big[\frac{\lambda'}{2}-c(T)c_0c'(A+B+A^2+AB)\Big]E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t\leqslant c\Big(1+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E[|X_t^n|^2]^{\frac12}\Big).$$

记

$$B'=\sqrt{2(C_2^2+|\sigma_1|^2)}.$$

当 λ' 充分大或者 $|b_2|$ 充分小, 使得

$$\lambda'>\max\{4c_0,2c(T)c_0c'(A+B'+A^2+AB')\},\tag{3.25}$$

或者

$$|b_2|^2<\frac{\lambda'\mathrm{e}^{-[2|b_1|^2+|\sigma_1|^2+C_1^2+C_2^2]T}}{8Tc(T)c_0(A+B+A^2+AB)[1+(C_1^2+C_2^2)T]},\tag{3.26}$$

有

$$\Big[\frac{\lambda'}{2}-c(T)c_0c'(A+B+A^2+AB)\Big]>0,\tag{3.27}$$

因此

$$E\int_0^T|\widehat{\alpha}_t^n|^2\mathrm{d}t\leqslant c\Big(1+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E[|X_t^n|^2]^{\frac12}\Big).\tag{3.28}$$

把上式代入 (3.14), 则存在一个不依赖于 n 的正常数 c, 使得

$$E[|X_T^{n,*}|^2] \leqslant c. \tag{3.29}$$

然后, 由引理 3.1 和

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{0\leqslant t\leqslant T} M_2(\mathbb{P}_{X_t^n}) \leqslant c,$$

有

$$|u^n(t,x') - u^n(t,x)| \leqslant c|x'-x| \tag{3.30}$$

和

$$\begin{aligned}\sup_{n\geqslant 1}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|u^n(t,0)| &\leqslant \sup_{n\geqslant 1}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}[E[|u^n(t,X_t^n) - u^n(t,0)|] + E[|Y_t^n|]] \\ &\leqslant \sup_{n\geqslant 1}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}[c(E[|X_t^n|^2])^{\frac{1}{2}} + (E[|Y_t^n|^2])^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \tag{3.31}$$

实际上, 由于 $M_2(\mathbb{P}_{X_t^n})$ 关于 n 一致有界, 因此根据注 3.1, (3.30) 中的常数 c 不依赖于 n.

由导向随机微分方程的标准先验估计, 得到

$$\sup_{n\geqslant 1}(E[|Y_T^{n,*}|^2])^{\frac{1}{2}} \leqslant c, \quad \sup_{n\geqslant 1}\Big(E\int_0^T |Z_t^n|^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant c.$$

于是

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|u^n(t,x)| \leqslant c(1+|x|), \quad \forall n\geqslant 1.$$

由 2.1, 有

$$|\widehat{\alpha}_t^n| \leqslant c(1+|X_t^n|). \tag{3.32}$$

然后, 由 (3.32) 和微分方程的标准先验估计, 有

$$\forall l\geqslant 1, \quad \sup_{n\geqslant 1} E[|X_T^{n,*}|^l] < +\infty. \tag{3.33}$$

由 (3.32)–(3.33) 和文 [32, Theorem 4.10, Problem 4.11, p.63], 所以 $(X^n)_{n\geqslant 1}$ 是胎紧的.

步骤 3 由 $(X^n)_{n\geqslant 1}$ 的胎紧性, 记 μ 为序列 $(\mathbb{P}_{X^n})_{n\geqslant 1}$ 的收敛子列的极限. 记

$$\mu_t^n := \mathbb{P}_{X_t^n}, \quad \mu^n := (\mu_t^n)_{0\leqslant t\leqslant T}.$$

类似于命题 3.2 中的证明, 由 (3.33), 有子列 (仍记为 (μ^n)) 满足

$$\lim_{n\to\infty} W_2(\mu^n,\mu) = 0.$$

因此

$$M_{2,\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)}(\mu) < +\infty.$$

然后, 有

$$(E[|Y_T^*|^2])^{\frac{1}{2}} \leqslant c, \quad \Big(E\int_0^T |Z_t|^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant c. \tag{3.34}$$

给定 μ, 由引理 3.1, 正倒向随机微分方程 (2.10) 有唯一解

$$(X_t, Y_t, Z_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}.$$

最后, 只要证明 μ 与 X 的分布一致.

重复 (3.12) 的证明过程, 有

$$\begin{aligned}\lambda' E\int_0^T |\widehat{\alpha}_t^n - \widehat{\alpha}_t|^2 \mathrm{d}t \leqslant J^n(\widehat{\alpha};\mu^n) - J(\widehat{\alpha};\mu) + J([\widehat{\alpha}^n,\mu^n];\mu) - J^n(\widehat{\alpha}^n;\mu^n) \\ + E\Big[\int_0^T \langle\, b_0(t,\mu_t) - b_0^n(t,\mu_t^n), Y_t\,\rangle\, \mathrm{d}t\Big] \\ + E\Big[\int_0^T \langle\, \sigma_0(t,\mu_t) - \sigma_0^n(t,\mu_t^n), Z_t\,\rangle\, \mathrm{d}t\Big].\end{aligned} \tag{3.35}$$

根据 J 的定义, 有

$$\begin{aligned}&J^n(\widehat{\alpha};\mu^n) - J(\widehat{\alpha};\mu) \\ &= E[g^n(U_T^n,\mu_T^n) - g(X_T,\mu_T)] + E\int_0^T [f^n(t,U_t^n,\mu_t^n,\widehat{\alpha}_t) - f(t,X_t,\mu_t,\widehat{\alpha}_t)]\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{3.36}$$

其中 U^n 满足

$$\mathrm{d}U_t^n = [b_0^n(t,\mu_t^n) + b_1(t)U_t^n + b_2(t)\widehat{\alpha}_t]\mathrm{d}t + [\sigma_0^n(t,\mu_t^n) + \sigma_1(t)U_t^n]\mathrm{d}W_t, \quad U_0^n = x_0.$$

记 $\mathcal{S}^2([0,T],\mathbb{R}^d)$ 为一个 Banach 空间, 赋予范数 $E[|(\cdot)^*|^2]^{\frac{1}{2}}$.

由 Gronwall 不等式以及 (b_0^n,σ_0^n) 在有界集上一致收敛到 (b_0,σ_0), 在 Banach 空间 $\mathcal{S}^2([0,T],\mathbb{R}^d)$ 中,

$$U^n \longrightarrow X.$$

然后, 由 (3.32), (3.36) 以及在有界集上 (f_n,g_n) 一致收敛到 (f,g), 有

$$J^n(\widehat{\alpha};\mu^n) \longrightarrow J(\widehat{\alpha};\mu),$$

同理,

$$J([\widehat{\alpha}^n,\mu^n];\mu) \longrightarrow J^n(\widehat{\alpha}^n;\mu^n).$$

由 (3.34) 和 (b_0^n,σ_0^n) 在有界集上一致收敛到 (b_0,σ_0), 不等式式 (3.35) 右侧的其他项也趋于 0.

综上, 我们有在 $L^2([0,T]\times\Omega, \mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}\mathbb{P})$ 中,

$$\widehat{\alpha}^n \longrightarrow \widehat{\alpha},$$

因此, 在 $\mathcal{S}^2([0,T],\mathbb{R}^d)$ 中,

$$X^n \longrightarrow X,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} W_2(\mu^n,\mathbb{P}_X) = 0.$$

所以 μ 与 X 的分布一致, 得证.

注 3.2 文 [10] 中考虑的情形为 b_0 是有界的, 且 σ 是一个常数, 可作为我们考虑的情形的特例.

下面, 我们来构造引理 3.2 中的逼近列.

引理 3.3 [10, Lemma 3.10, p. 2723] 假设存在常数 $\gamma > 0$, 使得 f 和 g 满足

$$\begin{aligned}&f(t,x',\mu,\alpha') - f(t,x,\mu,\alpha) - \langle (x'-x,\alpha'-\alpha), \partial_{(x,\alpha)} f(t,x,\mu,\alpha)\rangle\\ \geqslant\ &\lambda|\alpha'-\alpha|^2 + \gamma|x'-x|^2,\\ &g(x',\mu) - g(x,\mu) - \langle\, x'-x, \partial_x g(x,\mu)\,\rangle \geqslant \gamma|x'-x|^2,\end{aligned}\tag{3.37}$$

那么, 存在序列 $(f^n, g^n)_{n\geqslant 1}$, 以及依赖于 λ, c_L 和 γ 的正常数 λ' 和 c'_L, 使得

(i) f^n 和 g^n 以参数 (λ', c'_L) 满足 (A3)–(A5);

(ii) 导数 $\partial_x f^n$ 和 $\partial_x g^n$ 有界;

(iii) 任给一个有界集上, 存在整数 n_0, 使得对任意 $n \geqslant n_0$, (f^n, g^n) 与 (f, g) 相等.

注 3.3 由文 [10, Lemma 3.10, p.2723] 中的证明, 新参数 $\lambda' = \lambda$, 且 c'_L 只依赖于 c_L 和 γ. 因此, 当 λ 充分大或者 $|b_2|$ 充分小时, 条件 (3.25) 或 (3.26) 对新参数 (λ', c'_L) 成立.

3.5 主要结论

定理 3.1 如果 (A1)–(A5) 成立, (f, g) 满足 (3.37), 且 λ 充分大或者 $|b_2|$ 充分小, 那么, 正倒向随机微分方程 (3.1) 有解 $(X_t, Y_t, Z_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$. 进一步地, 存在常数 $c > 0$ 和函数 $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, 满足

$$|u(t,x)| \leqslant c(1+|x|), \quad |u(t,x) - u(t,x')| \leqslant c|x-x'|, \quad \forall (t,x,x') \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d,\tag{3.38}$$

且

$$\forall t \in [0,T], \quad Y_t = u(t, X_t), \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

最后, 对任意 $l \geqslant 1$, 有

$$E[|X_t^*|^l] < +\infty.\tag{3.39}$$

证 令

$$b_0^n(t,\mu) = \begin{cases} b_0(t,\mu), & |b_0(t,\mu)| \leqslant n,\\ n\dfrac{b_0(t,\mu)}{|b_0(t,\mu)|}, & |b_0(t,\mu)| > n;\end{cases}\tag{3.40}$$

$$\sigma_0^n(t,\mu) = \begin{cases} \sigma_0(t,\mu), & |\sigma_0(t,\mu)| \leqslant n,\\ n\dfrac{\sigma_0(t,\mu)}{|\sigma_0(t,\mu)|}, & |\sigma_0(t,\mu)| > n.\end{cases}\tag{3.41}$$

由正交分解, 有

$$|b_0^n(t,\mu)| \leqslant |b_0(t,\mu)| \leqslant C + C_1 M_2(\mu), \quad |b_0^n(t,\mu)| \leqslant n,$$
$$|b_0^n(t,\mu) - b_0^n(t,\mu')| \leqslant |b_0(t,\mu) - b_0(t,\mu')| \leqslant C\, W_2(\mu,\mu'),$$
$$|\sigma_0^n(t,\mu)| \leqslant |\sigma_0(t,\mu)| \leqslant C + C_2 M_2(\mu), \quad |\sigma_0^n(t,\mu)| \leqslant n,$$
$$|\sigma_0^n(t,\mu) - \sigma_0^n(t,\mu')| \leqslant |\sigma_0(t,\mu) - \sigma_0(t,\mu')| \leqslant C\, W_2(\mu,\mu').$$

然后, 由引理 3.3 和注 3.3, 有 $((b_0^n),(\sigma_0^n),(f^n),(g^n),\lambda',c_L')$ 满足引理 3.2 的假设, 则正倒向随机微分方程 (3.1) 有解. 再由引理 3.1, 有 (3.38). 与 (3.33) 的证明一样, 我们可以获得 (3.39).

注 3.4　条件 (3.37) 是 Legendre 变换[10, Lemma 3.10, p. 2723]的一个技术性引理. 如果在具体的例子中, 我们可以找到别的方法构造逼近列, 那么可以不需要条件 (3.37), 我们可以直接利用引理 3.2 去获得平均场博弈的解, 例如下一节中的线性二次情形.

4　线性二次情形

考虑一个一维的线性二次情形:

$$b_0(t,\mu) := b_0(t)\overline{\mu},$$
$$\sigma_0(t,\mu) := \sigma_0(t)\overline{\mu},$$
$$g(x,\mu) := \frac{1}{2}|qx + \overline{q\mu}|^2,$$
$$f(t,x,\mu,\alpha) := \frac{1}{2}|m(t)x + \overline{m}(t)\overline{\mu}|^2 + \frac{1}{2}|n(t)\alpha|^2,$$

其中 $(q,\overline{q}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 且 $(b_0(t),\sigma_0(t),m(t),\overline{m}(t))$ 是关于 t 有界的确定型函数.

文 [20] 考虑了一类线性二次平均场博弈, 其中 σ 是一个时间的 L^2 函数, 为了使用压缩映像原理, 需要一些与本文不同的假设 (见 [20, Proposition 3.1, Theorem 3.1, p.507]). 这里, 在我们考虑的情形中, σ 同时依赖状态和分布. 我们的假设(A5), 借鉴自文 [10], 在线性二次的情形下意味着 $\overline{q}q$ 和 $\overline{m}(t)m(t)$ 是非负的, 这个条件要强于文 [21] 中的线性二次模型下可解性的充分条件 $q(q+\overline{q}) \geqslant 0$ 和 $m(t)(m(t)+\overline{m}(t)) \geqslant 0$, 这是由于我们考虑的框架更一般.

我们将 f 重写为

$$f(t,x,\mu,\alpha) = a(t)x^2 + b(t)\overline{\mu}x + c(t)\overline{\mu}^2 + d(t)\alpha^2.$$

当只有 $a(t) \geqslant 0$ 时, 条件 (3.37) 不满足, 考虑这样的逼近列 f^n:

$$f^n(t,x,\mu,\alpha) = a^n(t,x)x + b^n(t,\mu)x + c(t)\overline{\mu}^2 + d(t)\alpha^2,$$

其中

$$a^n(t,x):=\begin{cases}n, & 2a(t)x>n,\\ a(t)x, & -n\leqslant 2a(t)x\leqslant n,\\ -n, & 2a(t)x<n;\end{cases}$$

$$b^n(t,\mu)=\begin{cases}n, & b(t)\overline{\mu}>n,\\ b(t)\overline{\mu}, & -n\leqslant b(t)\overline{\mu}\leqslant n,\\ -n, & b(t)\overline{\mu}<n.\end{cases}$$

记非负实数为 $\mathbb{R}^*$.

假设对所有 $t\in[0,T]$, 有 $(\overline{q}q,\overline{m}(t)m(t))\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$, 且 $\inf_t|n(t)|$ 充分大或者 $|b_2|$ 充分小, 那么, 由引理 3.2, 该线性二次平均场博弈有解.

5 多人博弈的近似 Nash 均衡

在这节中, 我们将利用平均场博弈的解来逼近多人博弈的 Nash 均衡. 技术上主要借鉴的是文 [33, Section 10, p.277].

引理 5.1 [33, Theorem 10.2.1, p. 323] 给定 $\mu\in\mathcal{P}_{d+5}(\mathbb{R}^d)$, 存在一个依赖于 d 和 $M_{d+5}(\mu)$ 的常数 C, 使得

$$E[W_2^2(\overline{\mu}^N,\mu)]\leqslant CN^{-\frac{2}{d+4}},$$

其中 $\overline{\mu}^N$ 是任意 N 个分布服从 μ 的相互独立的样本的经验分布.

记正倒向随机微分方程 (3.1) 的解为

$$(X_t,Y_t,Z_t)_{0\leqslant t\leqslant T},$$

u 是对应的解耦函数,

$$\mu_t=\mathbb{P}_{X_t}.$$

J 是平均场博弈问题的最优效用:

$$J=E\Big[g(X_T,\mu_T)+\int_0^T f(t,X_t,\mu_t,\widehat{\alpha}(t,X_t,\mu_t,Y_t))\mathrm{d}t\Big],\tag{5.1}$$

其中 $\widehat{\alpha}$ 如引理 2.1 中的定义. $((W_t^i)_{0\leqslant t\leqslant T})_{i\geqslant 1}$ 是一列相互独立的 Wiener 过程. 对任意整数 N, 令

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t^i=&[b_0(t,\overline{\mu}_t^N)+b_1(t)X_t^i+b_2(t)\overline{\alpha}_t^{N,i}]\mathrm{d}t+[\sigma_0(t,\overline{\mu}_t^N)\\&+\sigma_1(t)X_t^i]\mathrm{d}W_t^i,\quad i=1,\cdots,N,\end{aligned}\tag{5.2}$$

其中

$$\overline{\mu}_t^N=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{X_t^j},$$

$$X_0^i = x_0,$$
$$\overline{\alpha}_t^{N,i} = \widehat{\alpha}(t, X_t^i, \mu_t, u(t, X_t^i)).$$

由引理 2.1 和 (3.38), (5.2) 的系数关于状态 Lipschitz 连续且呈多线性增长, 因此 (5.2) 的解存在且唯一. 由 $(X^i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ 的对称性, 有

$$E[|X_T^{i,*}|^2] = E[|X_T^{j,*}|^2], \quad i \neq j.$$

因此

$$\sup_{N\geqslant 1}\max_{1\leqslant i\leqslant N}\Big[E[|X_T^{i,*}|^2] + E\int_0^T |\overline{\alpha}_t^{N,i}|^2\mathrm{d}t\Big] < +\infty. \tag{5.3}$$

对于一个允许策略 $((\beta_t^i)_{0\leqslant t\leqslant T})_{1\leqslant i\leqslant N}$, 过程 $((U_t^i)_{0\leqslant t\leqslant T})_{1\leqslant i\leqslant N}$ 满足

$$\mathrm{d}U_t^i = [b_0(t, \overline{\nu}_t^N) + b_1(t)U_t^i + b_2(t)\beta_t^i]\mathrm{d}t + [\sigma_0(t, \overline{\nu}_t^N) + \sigma_1(t)U_t^i]\mathrm{d}W_t^i, \quad i = 1, \cdots, N, \tag{5.4}$$

其中

$$\overline{\nu}_t^N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{U_t^j},$$
$$U_0^i = x_0.$$

第 i 个参与者的效用是

$$\overline{J}^{N,i}(\beta^1, \cdots, \beta^N) = E\Big[g(U_T^i, \overline{\nu}_T^N) + \int_0^T f(t, U_t^i, \overline{\nu}_t^N, \beta_t^i)\mathrm{d}t\Big]. \tag{5.5}$$

下面, 我们叙述本节的主要定理.

定理 5.1　在定理 3.1 的相同条件下, 存在一个常数 $c > 0$ 和一列正数 $(\varepsilon_N)_{N\geqslant 1}$, 使得对任意整数 $N \geqslant 1$, 有

(i) $\varepsilon_N \leqslant cN^{-\frac{1}{d+4}}$;

(ii) 对任意 $i = 1, \cdots, N$, 以及允许策略 $\beta^i = (\beta^i)_{0\leqslant t\leqslant T}$, 有

$$\overline{J}^{N,i}(\overline{\alpha}^{N,1}, \cdots, \overline{\alpha}^{N,i-1}, \beta^i, \overline{\alpha}^{N,i+1}, \cdots, \overline{\alpha}^{N,N}) \geqslant \overline{J}^{N,i}(\overline{\alpha}^{N,1}, \cdots, \overline{\alpha}^{N,N}) - \varepsilon_N. \tag{5.6}$$

证　由系数的对称性, 只要证明对 $i = 1$ 定理成立即可.

由 Gronwall 不等式, 有

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N E[|U_T^{j,*}|^2] \leqslant c\Big(1 + \frac{1}{N}E\int_0^T |\beta_t^1|^2\mathrm{d}t\Big). \tag{5.7}$$

然后, 引入解耦过程

$$\mathrm{d}\overline{X}_t^i = [b_0(t, \mu_t) + b_1(t)\overline{X}_t^i + b_2(t)\widehat{\alpha}(t, \overline{X}_t^i, \mu_t, u(t, \overline{X}_t^i))]\mathrm{d}t + [\sigma_0(t, \mu_t) + \sigma_1(t)\overline{X}_t^i]\mathrm{d}W_t^i. \tag{5.8}$$

显然, $\overline{X}^i$ 是 X 的相互独立的复制, 且 $\mathbb{P}_{\overline{X}_t^i} = \mu_t$. 令

$$\widehat{\alpha}_t^i = \widehat{\alpha}(t, \overline{X}_t^i, \mu_t, u(t, \overline{X}_t^i)), \quad i = 1, \cdots, N.$$

由 Wasserstein 距离的三角不等式, 有

$$W_2(\overline{\mu}_t^N,\mu_t)\leqslant W_2\Big(\overline{\mu}_t^N,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{\overline{X}_t^i}\Big)+W_2\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{\overline{X}_t^i},\mu_t\Big).\tag{5.9}$$

由文 [27, Theorem 3, p.6], 有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}E\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^i-\overline{X}_t^i|^2\Big]\leqslant cN^{-\frac{2}{d+4}}.\tag{5.10}$$

因此

$$E\Big[W_2^2\Big(\overline{\mu}_t^N,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{\overline{X}_t^i}\Big)\Big]\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant N}E\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^i-\overline{X}_t^i|^2\Big]\leqslant cN^{-\frac{2}{d+4}}.\tag{5.11}$$

由引理 5.1, 有

$$E\Big[W_2^2\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{\overline{X}_t^i},\mu_t\Big)\Big]\leqslant cN^{-\frac{2}{d+4}}.\tag{5.12}$$

由 (5.11) 和 (5.12), 有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E[W_2^2(\overline{\mu}_t^N,\mu_t)]\leqslant cN^{-\frac{2}{d+4}}.\tag{5.13}$$

根据(A4)和 Cauchy-Schwarz 不等式, 存在一个常数 $c>0$,

$$\begin{aligned}
&|J-\overline{J}^{N,i}(\overline{\alpha}^{N,1},\cdots,\overline{\alpha}^{N,N})|\\
=&\Big|E\Big[g(\overline{X}_T^i,\mu_T)+\int_0^T f(t,\overline{X}_t^i,\mu_t,\widehat{\alpha}_t^i)\mathrm{d}t-g(X_T^i,\overline{\mu}_T^N)-\int_0^T f(t,X_t^i,\overline{\mu}_t^N,\overline{\alpha}_t^{N,i})\mathrm{d}t\Big]\Big|\\
\leqslant& cE\Big[1+|\overline{X}_T^i|^2+|X_T^i|^2+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|X_T^j|^2\Big]^{\frac12}E[|\overline{X}_T^i-X_T^i|^2+W_2^2(\mu_T,\overline{\mu}_T^N)]^{\frac12}\\
&+c\int_0^T\Big\{E\Big[1+|\overline{X}_t^i|^2+|X_t^i|^2+|\widehat{\alpha}_t^i|^2+|\overline{\alpha}_t^{N,i}|^2+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|X_t^j|^2\Big]^{\frac12}\\
&\times E[|\overline{X}_t^i-X_t^i|^2+|\widehat{\alpha}_t^i-\overline{\alpha}_t^{N,i}|^2+W_2^2(\mu_t,\overline{\mu}_t^N)]^{\frac12}\Big\}\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

由 (5.3), 有

$$\begin{aligned}
&|J-\overline{J}^{N,i}(\overline{\alpha}^{N,1},\cdots,\overline{\alpha}^{N,N})|\\
\leqslant& cE[|\overline{X}_T^i-X_T^i|^2+W_2^2(\mu_T,\overline{\mu}_T^N)]^{\frac12}\\
&+c\Big(\int_0^T E[|\overline{X}_t^i-X_t^i|^2+|\widehat{\alpha}_t^i-\overline{\alpha}_t^{N,i}|^2+W_2^2(\mu_T,\overline{\mu}_T^N)]\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}.
\end{aligned}$$

由 $\widehat{\alpha}$ 和 u 的 Lipschitz 连续性, 有

$$|\widehat{\alpha}_t^i-\overline{\alpha}_t^{N,i}|\leqslant c|\overline{X}_t^i-X_t^i|.$$

因此, 由 (5.10) 和 (5.13), 有对任意 i,

$$\overline{J}^{N,i}(\overline{\alpha}^{N,1},\cdots,\overline{\alpha}^{N,N})\leqslant J+O(N^{-\frac{1}{d+4}}).\tag{5.14}$$

在有了 (5.14) 之后, 对 $i=1$, 为了证明 (5.6), 我们只需要比较 $J^{N,1}(\beta^1,\overline{\alpha}^{N,2},\cdots,\overline{\alpha}^{N,N})$ 和 J.

首先, 从 U^i 和 X^i 的定义出发, 得到

$$E\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|U_s^1-X_s^1|^2\Big]\leqslant\frac{c}{N}\int_0^t\sum_{j=1}^N E\Big[\sup_{0\leqslant r\leqslant s}|U_r^j-X_r^j|^2\Big]\mathrm{d}s+cE\int_0^t|\beta_s^1-\overline{\alpha}_s^{N,1}|^2\mathrm{d}s,$$

$$E\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|U_s^i-X_s^i|^2\Big]\leqslant\frac{c}{N}\int_0^t\sum_{j=1}^N E\Big[\sup_{0\leqslant r\leqslant s}|U_r^j-X_r^j|^2\Big]\mathrm{d}s,\quad 2\leqslant i\leqslant N.$$

由 Gronwall 不等式, 有

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N E\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|U_t^j-X_t^j|^2\Big]\leqslant\frac{c}{N}E\int_0^T|\beta_t^1-\overline{\alpha}_t^{N,1}|^2\mathrm{d}t.\tag{5.15}$$

因此

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E[|U_t^i-X_t^i|^2]\leqslant\frac{c}{N}E\int_0^T|\beta_t^1-\overline{\alpha}_t^{N,1}|^2\mathrm{d}t,\quad 2\leqslant i\leqslant N.\tag{5.16}$$

对任意 $A>0$, 假设

$$E\int_0^T|\beta_t^1|^2\mathrm{d}t\leqslant A.$$

由 (5.3), (5.10) 和 (5.16), 存在一个依赖于 A 的正常数 c_A, 使得

$$\max_{2\leqslant i\leqslant N}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E[|U_t^i-\overline{X}_t^i|^2]\leqslant c_AN^{-\frac{2}{d+4}}.\tag{5.17}$$

这里, 我们先固定 A 进行证明, 之后将说明如何选取 A. 因此, 有

$$\frac{1}{N-1}\sum_{j=2}^N E[|U_t^j-\overline{X}_t^j|^2]\leqslant c_AN^{-\frac{2}{d+4}}.\tag{5.18}$$

由 Wasserstein 距离的三角不等式, 有

$$\begin{aligned}E[W_2^2(\overline{\nu}_t^N,\mu_t)]\leqslant c\Big\{&E\Big[W_2^2\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{U_t^j},\frac{1}{N-1}\sum_{j=2}^N\delta_{U_t^j}\Big)\Big]\\&+E\Big[W_2^2\Big(\frac{1}{N-1}\sum_{j=2}^N\delta_{\overline{X}_t^j},\mu_t\Big)\Big]\\&+\frac{1}{N-1}\sum_{j=2}^N E[|U_t^j-\overline{X}_t^j|^2]\Big\}.\end{aligned}\tag{5.19}$$

根据 Wasserstein 距离的定义, 有

$$\begin{aligned}&E\Big[W_2^2\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{U_t^j},\frac{1}{N-1}\sum_{j=2}^N\delta_{U_t^j}\Big)\Big]\\&\leqslant\frac{1}{N(N-1)}\sum_{j=2}^N E[|U_t^1-U_t^j|^2]\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{c}{N(N-1)}\Big\{(N-2)E[|U_t^1|^2]+\sum_{j=1}^N E[|U_t^j|^2]\Big\}. \tag{5.20}$$

由 (5.7) 和

$$E[|U_T^{1,*}|^2]\leqslant c\Big(1+\frac{N+1}{N}E\int_0^T|\beta_t^1|^2\mathrm{d}t\Big),$$

我们得到 (5.20) 是 $O(N^{-1})$. 然后, 利用引理 5.1 去控制 (5.19) 右边的第二项, 再利用 (5.18) 去控制第三项, 有

$$E[W_2^2(\overline{\nu}_t^N,\mu_t)]\leqslant c_A N^{-\frac{2}{d+4}}. \tag{5.21}$$

接着, 记过程 $(\overline{U}_t^1)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 满足

$$\mathrm{d}\overline{U}_t^1=[b_0(t,\mu_t)+b_1(t)\overline{U}_t^1+b_2(t)\beta_t^1]\mathrm{d}t+[\sigma_0(t,\mu_t)+\sigma_1(t)\overline{U}_t^1]\mathrm{d}W_t^1,\quad \overline{U}_0^1=x_0.$$

因此

$$\begin{aligned}U_t^1-\overline{U}_t^1=&\int_0^t\{[b_0(s,\overline{\nu}_s^N)-b_0(s,\mu_s)]+b_1(s)[U_s^1-\overline{U}_s^1]\}\mathrm{d}s\\&+\int_0^t\{[\sigma_0(s,\overline{\nu}_s^N)-\sigma_0(s,\mu_s)]+\sigma_1(s)[U_s^1-\overline{U}_s^1]\}\mathrm{d}W_s^1.\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式和 (5.21), 有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E[|U_t^1-\overline{U}_t^1|^2]\leqslant c_A N^{-\frac{2}{d+4}}. \tag{5.22}$$

然后, 重复 (5.14) 的证明, 有

$$\overline{J}^{N,1}(\beta^1,\overline{\alpha}^{N,2},\cdots,\overline{\alpha}^{N,N})\geqslant J(\beta^1)-c_A N^{-\frac{1}{d+4}}, \tag{5.23}$$

其中

$$J(\beta^1)=E\Big[g(\overline{U}_T^1,\mu_T)+\int_0^T f(t,\overline{U}_t^1,\mu_t,\beta_t^1)\mathrm{d}t\Big].$$

值得注意的是, 尽管 β^1 适应的域流大于 W_1 生成的域流, 由注 2.1, 随机最大值原理仍然成立, 有 $J\leqslant J(\beta^1)$. 由 (5.14) 和 (5.23), 我们得到 (5.6).

最后, 我们需要说明如何选取 A.

由 f 和 g 关于 (x,α) 在点 $(x,\alpha)=(0,0)$ 的凸性, 有

$$\begin{aligned}&\overline{J}^{N,1}(\beta^1,\overline{\alpha}^{N,2},\cdots,\overline{\alpha}^{N,N})\\ \geqslant\ & E\Big[g(0,\overline{\nu}_T^N)+\int_0^T f(t,0,\overline{\nu}_t^N,0)\mathrm{d}t\Big]+\lambda E\int_0^T|\beta_t^1|^2\mathrm{d}t\\&+E\Big[\langle U_T^1,\partial_x g(0,\overline{\nu}_T^N)\rangle+\int_0^T(\langle U_t^1,\partial_x f(t,0,\overline{\nu}_t^N,0)\rangle+\langle\beta_t^1,\partial_\alpha f(t,0,\overline{\nu}_t^N,0)\rangle)\mathrm{d}t\Big].\end{aligned} \tag{5.24}$$

由(A4)和 Wasserstein 距离的定义, 有

$$E[|f(t,0,\overline{\nu}_t^N,0)-f(t,0,\delta_0,0)|]\leqslant cE[1+M_2^2(\overline{\nu}_t^N)]\leqslant c\Big[1+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N E|U_t^i|^2\Big].$$

类似地处理 g, 有

$$\begin{aligned}&\overline{J}^{N,1}(\beta^1,\overline{\alpha}^{N,2},\cdots,\overline{\alpha}^{N,N})\\ \geqslant\ & g(0,\delta_0)+\int_0^T f(t,0,\delta_0,0)\mathrm{d}t\\ &+E\Big[\langle U_t^1,\partial_x g(0,\overline{\nu}_T^N)\rangle+\int_0^T(\langle U_t^1,\partial_x f(t,0,\overline{\nu}_t^N,0)\rangle+\langle\beta_t^1,\partial_\alpha f(t,0,\overline{\nu}_t^N,0)\rangle)\mathrm{d}t\Big]\\ &+\lambda E\int_0^T|\beta_t^1|^2\mathrm{d}t-c\Big(1+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|U_t^i|^2\Big).\end{aligned}$$

对任意 $\delta>0$, 由(A4), 存在一个正常数 c_δ, 使得

$$\begin{aligned}&\overline{J}^{N,1}(\beta^1,\overline{\alpha}^{N,2},\cdots,\overline{\alpha}^{N,N})\\ \geqslant\ & g(0,\delta_0)+\int_0^T f(t,0,\delta_0,0)\mathrm{d}t+\frac{\lambda}{2}E\int_0^T|\beta_t^1|^2\mathrm{d}t\\ &-\delta\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E[|U_t^1|^2]-c_\delta\Big(1+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|U_t^i|^2\Big).\end{aligned}\tag{5.25}$$

由于

$$E[|U_T^{1,*}|^2]\leqslant c\Big(1+\frac{N+1}{N}E\int_0^T|\beta_t^1|^2\mathrm{d}t\Big),$$

我们可以取一个充分小的 δ, 使得

$$\overline{J}^{N,1}(\beta^1,\overline{\alpha}^{N,2},\cdots,\overline{\alpha}^{N,N})\geqslant -c+\Big(\frac{\lambda}{4}-\frac{c}{N}\Big)E\int_0^T|\beta_t^1|^2\mathrm{d}t.$$

因此, 存在一个整数 N_0, 使得对任意整数 $N\geqslant N_0$ 和 $\overline{A}$, 我们可以选到一个正常数 A, 使得

$$E\int_0^T|\beta_t^1|^2\mathrm{d}t\geqslant A\quad\Longrightarrow\quad\overline{J}^{N,1}(\beta^1,\overline{\alpha}^{N,2},\cdots,\overline{\alpha}^{N,N})\geqslant\overline{A}.$$

例如, 令 $\overline{A}=J$ 直接给出了 A 选取, 证明完成.

注 5.1　根据上述证明可知, 如果已知正倒向随机微分方程 (3.1) 有如定理 3.1 中描述的解, 那么只需要假设 (A1)–(A4) 就有定理 5.1 成立.

致谢 感谢审稿人对本文初稿提出的宝贵的修改意见.

参　考　文　献

[1] Lasry J M, Lions P L. Mean field games [J]. *Japan J Math*, 2007, 2(1):229–260.

[2] Guéant O, Lasry J M, Lions P L. Mean field games and applications [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.

[3] Huang M, Malhame R P, Caines P E. Large population stochastic dynamic games: closed-loop mckean-vlasov systems and the nash certainty equivalence principle [J]. *Commun Inf Syst*, 2006, 6(3):221–251.

[4] Buckdahn R, Li J, Peng S. Mean-field backward stochastic differential equations and related partial differential equations [J]. *Stochastic Process Appl*, 2007, 119:3133–3154.

[5] Buckdahn R, Djehiche B, Li J, et al. Mean-field backward stochastic differential equations: a limit approach [J]. *Ann Probab*, 2009, 37:1524–1565.

[6] Bensoussan A, Frehse J, Yam P. Mean field games and mean field type control theory [M]. Springerbriefs in Mathematics, New York: Springer-Verlag, 2013.

[7] Cardaliaguet P. Notes on mean field games [R]. Roma: Tor Vergata, 2010.

[8] Carmona R, Delarue F. Mean field forward-backward stochastic differential equations [J]. *Electron Commun Probab*, 2013, 68(18):1–15.

[9] Graber P J, Bensoussan A. Existence and uniqueness of solutions for bertrand and cournot mean field games [J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 2016, 8(4):1–25.

[10] Carmona R, Delarue F. Probabilistic analysis of mean-field games [J]. *Siam Journal on Control and Optimization*, 2013, 51(4):2705–2734.

[11] Lacker D. Mean field games via controlled martingale problems: existence of Markovian equilibria [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2015, 125(7):2856–2894.

[12] Carmona R, Delarue F, Lacker D. Mean field games with common noise [J]. *Annals of Probability An Official Journal of the Institute of Mathematical Statistics*, 2016, 44(6):3740–3803.

[13] Graber P J. Linear quadratic mean field type control and mean field games with common noise, with application to production of an exhaustible resource [J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 2016, 74:459–486.

[14] Hu Y, Huang J, Nie T. Linear-Quadratic-Gaussian mixed mean-field games with heterogeneous input constraints [J]. *Siam Journal on Control and Optimization*, 2018, 56(4):2835–2877.

[15] Hu F. Stochastic LQ games involving a major player and a large number of minor players [J]. *J Fudan Univ Nat Sci*, 2011, 50(6):720–731.

[16] Du K, Wu Z. Linear quadratic mean-field-game of backward stochastic differential systems [J]. *Mathematical Control and Related Fields*, 2018, 8:653–678.

[17] Du K, Wu Z. Linear-Quadratic stackelberg game for mean-field backward stochastic differential system and application [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019:1–17.

[18] Huang J, Wang S, Wu Z. Backward mean-field linearquadratic-gaussian (LQG) games: full and partial information [J]. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(12):3784–3796.

[19] Bardi M. Explicit solutions of some linear-quadratic mean field games [J]. *Networks and Heterogeneous Media*, 2013, 7(2):243–261.

[20] Bensoussan A, Sung K C J, Yam S C P, et al. Linear-quadratic mean field games [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, 169(2):496–529.

[21] Carmona R, Delarue F, Lachapelle A. Control of McKean-Vlasov dynamics versus mean field games [J]. *Mathematics and Financial Economics*, 2013, 7(2):131–166.

[22] Huang M, Caines P E, Malhame R P. Large-population cost-coupled LQG problems with nonuniform agents: individual-mass behavior and decentralized ε-nash equilibria [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(9):1560–1571.

[23] Tchuendom R F. Uniqueness for linear-quadratic mean field games with common noise [J]. *Dyn Games Appl*, 2018, 8(1):199–210.

[24] Ma J, Yong J. Forward-backward stochastic differential equations and their applications [M]//Lecture Notes in Mathematics, 1702, Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[25] Hu Y, Peng S. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems [J]. *Stochastics Stochastic Rep*, 1990, 33:159–180.

[26] Peng S, Wu Z. Fully coupled forward-backward stochastic differential equations and applications to optimal control [J]. *SIAM J Control Optim*, 1999, 37:825–843.

[27] Jourdain B, Méléard S, Woyczynski W. Nonlinear SDEs driven by levy processes and related PDEs [J]. *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, 2008, 4:1–29.

[28] Sznitman A S. Topics in propagation of chaos [J]. *Biophysical Journal*, 1991, 108(2):501a.

[29] Pham H. Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.

[30] Delarue F. On the existence and uniqueness of solutions to fbsdes in a non-degenerate case [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2002, 99(2):209–286.

[31] Villani C. Topics in optimal transportation [M]//Graduate Studies in Mathematics, Rhode Island: American Mathematical Society, 2003.

[32] Karatzas I, Shreve S E. Brownian motion and stochastic calculus [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[33] Rachev S T, Ruschendorf L. Mass transportation problems [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

Mean-Field Game with Degenerate State- and Distribution-Dependent Noises

YU Jiahe[1] TANG Shanjian[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China.
E-mail: 15110180029@fudan.edu.cn; sjtang@fudan.edu.cn

Abstract The mean-field game is studied for state-affine systems with degenerate state- and distribution-dependent noises. The mean field terms of both drift and diffusion coefficients are allowed to grow in the distribution in a linear way, and therefore the linear-quadratic case (where the expected state appears in a linear way in the system dynamics) is included. The authors prove existence of the solution to the associated forward-backward stochastic differential equations of a McKean-Vlasov type and regularity of the decoupled function. Finally, they prove that solutions of the mean-field game together with the decoupled function approximate the Nash equilibrium of the N-players' game with an order up to $N^{-\frac{1}{d+4}}$.

Keywords Mean-Field games, McKean-Vlasov forward-backward stochastic differential equations, Propagation of chaos, Stochastic maximum principle

2000 MR Subject Classification 93E20, 60H30, 60H10, 60F99

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 3, 2020
by ALLERTON PRESS, INC., USA